Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten.

Von **H. Hencky** in Gustavsburg.

1. Einleitung. Die naheliegende Aufgabe der Berechnung der Biegelinie von Platten und Balken unter Berücksichtigung des Einflusses der Schubverzerrung hat noch keine einwandfreie Lösung gefunden. Die in der Technik übliche Berechnung einer zusätzlichen Durchbiegung kann nur für den Fall eines freigelagerten Balkens mit gleichmäßig verteilter Belastung den Wert einer groben Näherung beanspruchen und ist nicht geeignet, diese Frage zu klären.

Es ist zunächst klar, daß der Einfluß der Schubverzerrungen bei stark wechselnden Lastkonzentrationen entsprechend wächst. Außerdem hat die Annahme der gewöhnlichen Theorie, daß die Normalen zur Plattenmittelfläche auch nach der Verformung normal bleiben, etwas Unbefriedigendes. Um diesen Komplex von Fragen und Unklarheiten einmal aufzulösen, stellen wir uns die Aufgabe, eine nicht zu dicke ebene Platte hinsichtlich ihres Verhaltens gegenüber veränderlichen, aber stetig verteilten Lasten zu untersuchen.

2. Das Prinzip der virtuellen Arbeit und sein Nutzen bei derartigen Untersuchungen. Ganz wie in der Dynamik des *Lagrange* gehen wir vom Kinematischen aus. Die Normale zur Mittelfläche sei zur z-Richtung gewählt, dann machen wir zur Darstellung der Verformung den folgenden Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{z}{h}\,\psi(x,y),\\ v &= -\frac{z}{h}\,\chi(x,y),\\ w &= \varphi(x,y); \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ψ, χ, φ sind drei unbekannte Funktionen von x und y; u, v, w sind die elastischen Verschiebungen eines beliebigen Punktes der Platte.

Daß die Verschiebungen w unabhängig von z angenommen sind, ist nur dann unbedenklich, wenn die Normalspannungen zur Plattenoberfläche verglichen mit dem durch die Lasten hervorgerufenen Spannungszustand vernachlässigbar klein sind. Man kann dann die Platte in parallele Schichten zerlegt denken, die man hinsichtlich der Normalspannungen nach den für ebene Spannungszustände geltenden Regeln behandeln kann.

Setzt man $E' = \dfrac{E m^2}{m^2-1}$, $\quad 2G = \dfrac{E'(m-1)}{m}$,

so erhalten wir aus dem *Hooke*schen Gesetz wegen

$$\sigma_z = \frac{Em}{m+1}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z}\right) = 0$$

das Elastizitätsgesetz

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= E'\left(\frac{\partial u}{\partial u} + \frac{1}{m}\frac{\partial v}{\partial y}\right),\\ \sigma_y &= E'\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{m}\frac{\partial u}{\partial x}\right),\\ \tau_x &= E'\,\frac{m-1}{2m}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),\\ \tau_y &= E'\,\frac{m-1}{2m}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\\ \tau_z &= E'\,\frac{m-1}{2m}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Spannung σ_z kann auf Grund des Elastizitätsgesetzes nicht bestimmt werden, sondern muß durch die statischen Bedingungen des Problems gegeben sein.

Durch Kombination von (2) und (1) erhalten wir jetzt die Spannungswerte in der Platte

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -E'\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{1}{m}\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)\frac{z}{h},\\
\sigma_y &= -E'\left(\frac{\partial \chi}{\partial y}+\frac{1}{m}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\frac{z}{h},\\
\tau_x &= -E'\frac{m-1}{2m}\left(\frac{\chi}{h}-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right),\\
\tau_y &= -E'\frac{m-1}{2m}\left(\frac{\psi}{h}-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right),\\
\tau_z &= -E'\frac{m-1}{2m}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)\frac{z}{h}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die Spannungswerte τ_x und τ_y verschwinden bei der klassischen Plattentheorie; hier werden sie nur von x und y abhängig, so daß nunmehr wenigstens der mittlere Wert des Schubes in die Rechnung einbezogen wird. Auf der Ober- und Unterseite der Platte sollen keine Schubspannungen wirken.

Mit dieser Oberflächenbedingung sind nun aber unsere Gleichungen (3) im Widerspruch, denn die τ_x und τ_y sind danach nicht mehr Null. Beim Anschreiben der virtuellen Arbeit muß aus diesem Grunde der vollständige, aus Oberflächenarbeit und innerer Arbeit bestehende Ausdruck gesetzt werden.

Wir wollen folgende Bezeichnungen einführen:

$(P_x)_a$, $(P_y)_a$, $(P_z)_a$ belastende äußere Randspannungen,
$(P_x)_i$, $(P_y)_i$, $(P_z)_i$ die sich aus den angenommenen u, v, w und dem Elastizitätsgesetz ergebenden Randspannungen, ferner die „Gleichgewichtsbedingungen"

$$\left.\begin{aligned}
L_I &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_z}{\partial y}+\frac{\partial \tau_y}{\partial z},\\
L_{II} &= \frac{\partial \tau_z}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_x}{\partial z},\\
L_{III} &= \frac{\partial \tau_y}{\partial x}+\frac{\partial \tau_x}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dann lautet die Gleichung der virtuellen Arbeit

$$\left.\begin{aligned}
&\iint d0\left\{[(P_x)_a-(P_x)_i]\,\delta u+[(P_y)_a-(P_y)_i]\,\delta v+[(P_z)_a-(P_z)_i]\,\delta w\right\}\\
&\quad+\iiint dV\left\{L_I\,\delta u+L_{II}\,\delta v+L_{III}\,\delta w\right\}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Hat man die genaue Lösung für u, v, w, dann ist

$$(P_x)_a=(P_x)_i,\quad (P_y)_a=(P_y)_i,\quad (P_z)_a=(P_z)_i,$$
$$L_I=L_{II}=L_{III}=0$$

beim Fehlen von Volumen- oder Massenkräften. In der technischen Mechanik stehen uns aber genaue Lösungen meist nicht zur Verfügung. Setzt man nun ein willkürliches System u, v, w, so sind die $(P_x)_a-(P_x)_i$, ... L_I ... eben nicht Null, sondern stellen unvermeidliche Fehlspannungen bzw. Fehlvolumenkräfte vor. Schränken wir nun die kinematischen Möglichkeiten der u, v, w durch entsprechende Annahmen, wie sie z. B. in unserer Gleichung (1) vorliegen, ein, so wird es trotzdem möglich, das Arbeitsintegral aus allen diesen Fehlspannungen bzw. Fehlkräften zum Verschwinden zu bringen.

Insbesondere bei einer Platte haben wir die Gleichung der virtuellen Arbeit zunächst in der Form

$$\left.\begin{aligned}
&\iint\Big\{[(\tau_y)_a-(\tau_y)_i]\,\delta u\left(z=+\tfrac{h}{2}\right)-[(\tau_y)_a-(\tau_y)_i]\,\delta u\left(z=-\tfrac{h}{2}\right)+\\
&+[(\tau_x)_a-(\tau_x)_i]\,\delta v\left(z=+\tfrac{h}{2}\right)-[(\tau_x)_a-(\tau_x)_i]\,\delta v\left(z=-\tfrac{h}{2}\right)+\\
&+[(\sigma_z)_a-(\sigma_z)_i]\,\delta w\left(z=+\tfrac{h}{2}\right)-[(\sigma_z)_a-(\sigma_z)_i]\,\delta w\left(z=-\tfrac{h}{2}\right)\Big\}\,dx\,dy+\\
&+\iiint\left\{L_I\,\delta u+L_{II}\,\delta v+L_{III}\,\delta w\right\}dx\,dy\,dz=0.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Äußere Spannungen $(\tau_x)_a$, $\tau_y)_a$ nehmen wir nicht an, ferner

$$(\sigma_z)_a\left(z=+\frac{h}{2}\right)=p, \qquad (\sigma_z)_a\left(z=-\frac{h}{2}\right)=0.$$

Die inneren Spannungen, die wir aus dem Elastizitätsgesetz bekommen, müssen wir hinnehmen. Wir setzen nun die Werte aus (1) und (3)

$$\delta u\left(z=+\frac{h}{2}\right)-\delta u\left(z=-\frac{h}{2}\right)=-\delta\psi,$$

$$\delta v\left(z=+\frac{h}{2}\right)-\delta v\left(z=-\frac{h}{2}\right)=-\delta\chi,$$

$$(\sigma_z)_i=0$$

in (6) ein und erhalten

$$+\iint(\tau_y\delta\psi+\tau_x\delta\chi+p\,\delta\varphi)\,dx\,dy+$$
$$+\iiint\left(-L_I\frac{z}{h}\delta\psi-L_{II}\frac{z}{h}\delta\chi+L_{III}\delta\varphi\right)dx\,dy\,dz=0.$$

Da sich die Integrale über z auswerten lassen, kann man die Gleichung in folgender Weise schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\iint\Big[-E'\frac{m-1}{2m}\left(\frac{\psi}{h}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\delta\psi-E'\frac{m-1}{2m}\left(\frac{\chi}{h}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\delta\chi+\\+p\,\delta\varphi-\delta\psi\int L_I\frac{z}{h}\,dz-\delta\chi\int L_{II}\frac{z}{h}\,dz+\delta\varphi\int L_{III}\,dz\Big]\,dx\,dy=0\end{aligned}\right\}\tag{6a}$$

und in etwas anderer Ordnung:

$$\left.\begin{aligned}\iint\Big\{-\delta\psi\left[E'\frac{m-1}{2m}\left(\frac{\psi}{h}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\int L_I\frac{z}{h}\,dx\right]-\\-\delta x\left[E'\frac{m-1}{2m}\left(\frac{\chi}{h}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\int L_{II}\frac{z}{h}\,dx\right]+\\+\delta\varphi\left[\int L_{III}\,dz+p\right]\Big\}\,dx\,dy=0.\end{aligned}\right\}\tag{6b}$$

Wegen der Unabhängigkeit der Variationen $\delta\psi, \delta\chi, \delta\varphi$ müssen dann die drei Gleichungen gelten

$$E'\frac{m-1}{2m}\left(\psi-h\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\int L_I z\,dz=0,\tag{I}$$

$$E'\frac{m-1}{2m}\left(\chi-h\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\int L_{II} z\,dz=0,\tag{II}$$

$$\int L_{III}\,dz+p=0.\tag{III}$$

Die hier vorkommenden Integrale lassen sich noch etwas weiter umformen. Es ist

$$\begin{aligned}\int L_I z\,dz&=\int\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_z}{\partial y}+\frac{\partial\tau_y}{\partial z}\right)z\,dz\\&=\int\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_z}{\partial y}\right)z\,dz+\int_{-h/2}^{+h/2}\frac{\partial\tau_y}{\partial z}z\,dz\\&=\int\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_z}{\partial y}\right)z\,dz+(\tau_y z)_{-h/2}^{+h/2}-\int\tau_y\,dz.\end{aligned}$$

Hier ist aber nach (3)

$$(\tau_y z)_{-h/2}^{+h/2}=-E'\frac{m-1}{2m}\left(\psi-h\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right).$$

Durch Einsetzen in (1) kommt daher

$$\int\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_z}{\partial y}\right)z\,dz-\int\tau_y\,dz=0\tag{I}$$

und analog

$$\int\left(\frac{\partial\tau_z}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)z\,dz-\int\tau_x\,dz=0.\tag{II}$$

Setzt man die Werte von τ_y und τ_x aus (I) und (II) in die dritte Gleichung (4) ein, so wird aus (III)

$$\int\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 \tau_z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right)z\,dz+p=0. \tag{III}$$

Damit sind die drei Differentialgleichungen für die unbekannten Funktionen ψ, χ, φ gefunden. Alle drei gelten unverändert auch für den klassischen Ansatz der Plattentheorie. Nur dienen in diesem Fall die Gleichungen (I) und (II) bloß dazu, die in diesem Fall statisch bestimmten Scherspannungsresultanten zu ermitteln.

3. Die Differentialgleichungen für die dicke Platte. Durch Einsetzen der Spannungswerte (3) erhalten wir

$$E'\frac{m-1}{2m}\left(\psi-\frac{\partial\varphi}{\partial x}h\right)=\frac{E'h^2}{12}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{m-1}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{m+1}{2m}\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}\right), \tag{I}$$

$$E'\frac{m-1}{2m}\left(\chi-\frac{\partial\varphi}{\partial y}h\right)=\frac{E'h^2}{12}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}+\frac{m-1}{2m}\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+\frac{m+1}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right), \tag{II}$$

$$\frac{E'h^2}{12}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right)\right]=p. \tag{III}$$

In dieser Form ist nicht ohne weiteres zu sehen, wie man von diesen Gleichungen zur klassischen Plattengleichung kommen kann. Wir eliminieren daher aus (I) und (II) zunächst φ, indem wir nach x bzw. y differentiieren und abziehen:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\chi}{\partial x}=\frac{h^2}{12}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)\right]. \tag{Ia}$$

Differentiieren wir andererseits die Gleichung (I) nach $\frac{\partial^3}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}$, die Gleichung (II) nach $\frac{\partial^3}{\partial y^3}$, $\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y}$ und addieren, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}&E'\frac{m-1}{2m}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right)-h\left[\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}\right]\right\}\\&\quad=\frac{E'h^2}{12}\left[\frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)\right].\end{aligned}\right\} \tag{IIa}$$

Differentiieren wir andererseits die Gleichung (III) zweimal nach x und y und addieren (Laplacesche Operation), so erhalten wir

$$\frac{E'h^2}{12}\left[\frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)\right]=\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}. \tag{IIIa}$$

Kombination von (IIa), (IIIa) und (III) ergibt schließlich die von ψ und χ freie Gleichung

$$\frac{E'h^3}{12}\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}\right)=p-\frac{h^2}{6}\frac{m}{m-1}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right). \tag{IIIb}$$

Die drei Gleichungen (Ia), (III) und (IIIb) kann man nun zum Übergang zur klassischen Plattentheorie verwenden, wenn das Verhältnis der Dicke zur mittleren Plattenseite klein ist. Zuvor wollen wir aber diese Gleichungen auf eine etwas einfachere Form bringen. Es ergibt sich dabei ein Vorteil in der Schreibweise, wenn man für die Operation $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ das Zeichen Δ setzt. Die drei Gleichungen lassen sich dann in folgender Form anschreiben:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\chi}{\partial x}=\frac{h^2}{12}\Delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\chi}{\partial x}\right); \tag{Ic}$$

aus (III) durch Änderung der Differentiationsfolge

$$\frac{E'h^2}{12}\Delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)=p; \tag{IIc}$$

und schließlich noch mit (IIIb)

$$\frac{E'h^3}{12}\Delta\Delta\varphi=p-\frac{h^2}{6}\frac{m}{m-1}\Delta p. \tag{IIIc}$$

Bei kleinem h kann man nun dieses System vereinfachen zu

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{h^2}{12} \Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) = \frac{p}{E'},$$

$$\frac{E' h^3}{12} \Delta \Delta \varphi = p.$$

Man kann dann eine neue Funktion ω einführen, um wenigstens die erste dieser Gleichungen von vornherein zu befriedigen:

$$\psi = h \frac{\partial \omega}{\partial x}, \qquad \chi = h \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Damit wird aber die zweite Gleichung identisch mit der dritten, d. h. $\omega = \varphi$, womit der Anschluß an die klassische Theorie vollzogen ist.

Die Vernachlässigung der Glieder mit h kann unzulässig werden, wenn man konzentrierte Lasten hat. Beachtenswert ist, daß in der neuen Theorie die Bildung der Spannungsresultanten und -momente sich erübrigt. Das Gleichungssystem (3) gibt über alle Spannungen Aufschluß. Die Spannungen hängen aber nicht mehr unmittelbar und hauptsächlich von φ ab, sondern von ψ und χ. Dies hat zur Folge, daß z. B. bei der eingespannten Platte mit konstanter Last sich das gleiche φ ergibt wie in der klassischen Theorie, die Randspannungen werden aber höher.

4. Zusammenfassung. Ausgehend von einem kinematischen Schema wird eine Methode entwickelt, welche es möglich macht, den Anschluß der technischen Festigkeitslehre an die mathematische Elastizitätstheorie zu bewerkstelligen. Ganz wie in der Methode von *Lagrange* nur mit Kinematik und Energiebegriff gearbeitet wird, werden die Gleichungen aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen hergeleitet[1].

Die Randbedingungen brauchen dabei nicht von vornherein im kinematischen Ansatz schon befriedigt zu sein; das Verfahren ist so geartet, daß man das Optimum der Näherung, das sich mit dem gewählten Ansatz überhaupt erreichen läßt, auch wirklich erhält. Von großer praktischer Bedeutung wird die Schubkorrektion dann, wenn es sich um I-Profile handelt. Der Einfluß kann bei handelsüblichen Formen 10 bis 30 % betragen.

(Eingegangen am 29. November 1944.)

---

[1] Für wertvolle kritische Anregung bei der Behandlung derartiger Probleme bin ich Herrn *R. Kappus* zu Dank verpflichtet.