

ANNALEN DER PHYSIK

5. F O L G E, 1929, B A N D 2, H E F T 6

Das Superpositionsgesetz eines endlich deformierten relaxationsfähigen elastischen Kontinuums und seine Bedeutung für eine exakte Ableitung der Gleichungen für die zähe Flüssigkeit in der Eulerschen Form

Von Heinrich Hencky

Inhalt: Aus dem Dehnungsgesetz eines ideal elastischen Stoffes wird ein im allgemeinen nichtlineares Superpositionsgesetz abgeleitet. Mit Hilfe des Ansatzes einer Relaxation im Maxwellschen Sinn werden die Grundgleichungen der zähen Flüssigkeitsbewegung aus der endlichen Verformung eines ursprünglich elastischen Kontinuums heraus entwickelt. Es wird gezeigt, daß die Navier-Stokesschen Gleichungen der Hydrodynamik sich als Spezialfall für einen unendlich großen Schubmodul und eine unendlich kleine Relaxationszeit ergeben, wobei das Produkt dieser beiden Größen jedoch endlich bleibt, daß sie aber bei inhomogenen Strömungszuständen wirklicher Flüssigkeiten versagen müssen, sobald große Geschwindigkeiten erreicht werden.

Einleitung

Noch vor einigen Jahrzehnten wurde besonders von physikalischer Seite die zähe Flüssigkeit als ein elastischer Körper aufgefaßt, bei dem der deviatorische Teil der Verzerrungsenergie einer raschen Absorption durch die Wärmebewegung der kleinsten Teile unterliegt.¹⁾

In einer Reihe von Arbeiten wurde diese Ableitung der hydrodynamischen Gleichungen ausgebaut, insbesondere ist R. Reiger wiederholt für die Maxwellsche Auffassung eingetreten. Wenn wir im folgenden an der Durchführung dieser Arbeiten, was den Elastizitätstheoretischen Teil anlangt, einige

1) L. Natanson, Ztschr. f. phys. Chem. 38. S. 690. 1901; 40. S. 581. 1901. — R. Reiger, Verh. d. Dtsch. phys. Ges. 21. S. 421. 1919. — Vgl. auch das Handb. d. phys. u. techn. Mechanik, 1. Lieferung. 5. S. 102, woselbst weitere Literaturangaben. Merkwürdigerweise wird im Handb. d. Phys. 7, Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper, die Maxwellsche Theorie nicht einmal erwähnt.

Kritik üben müssen, so ist unser Zweck nur der, die in den Arbeiten niedergelegten wertvollen Gedanken von hindernden Unklarheiten zu befreien. Daß derartige Unklarheiten wirklich vorhanden sind, beweist die Tatsache, daß die Relaxationstheorie gegenüber der Newtonschen Reibungsauffassung keinen wirklichen Einfluß auf die Entwicklung der Hydrodynamik gewinnen konnte.

Es kommt freilich auch noch dazu, daß man die Bedeutung der Relaxationsvorstellung anfänglich übertrieben hat. Es ist durch die Versuche festgestellt, daß jedenfalls die polykristallinen Stoffe *unter* ihrer Elastizitätsgrenze keiner Relaxation unterliegen, und es ist eine zwecklose Spielerei, ihnen eine unendlich große Relaxationszeit zuzuschreiben. Abgesehen davon will uns aber die Ignorierung einer ebenso fruchtbaren wie originellen Auffassung des Reibungsmechanismus der zähen Flüssigkeiten als voreilig erscheinen. Die Maxwellsche Vorstellung liefert ein intuitiv einleuchtendes Gedankenmodell und stellt einen mechanischen Übergang vom festen zum flüssigen Kontinuum her, dessen erkenntnistheoretische Berechtigung außer Zweifel steht und dessen Folgerungen erst durch das Experiment gründlich nachgeprüft werden müssen.

Wir stellen uns hier die Aufgabe, zu zeigen, daß schon eine rein theoretische Analyse des Maxwellschen Gedankenmodells der zähen Flüssigkeit imstande ist, die Notwendigkeit einer Revision der gegenwärtig herrschenden Reibungsauffassung für große Strömungsgeschwindigkeiten zu beweisen.

1. Das Elastizitätsgesetz eines ideal elastischen Stoffes

In einem der Aufsätze der A. Föppl-Festschrift ¹⁾ beschäftigt sich L. Prandtl mit einigen Konstruktionen, die er in elastisch bestimmte und elastisch unbestimmte einteilt. Unter elastischer Bestimmtheit versteht Prandtl die Unabhängigkeit der Veränderungen, die durch eine auf die Konstruktion neu aufgebrachte Last verursacht werden, von den in der Konstruktion bereits anwesenden Spannungen. Hängt aber die Deformation außer von der neuen Last auch von den Eigenspannungen des Systems im früheren Zustand ab, so spricht Prandtl von elastischer Unbestimmtheit.

1) Berlin. Verlag von J. Springer. S. 52—61. 1924.

Der Prandtlschen Unterscheidung liegt eigentlich der Gruppenbegriff zugrunde, denn beim Kontinuum, das elastisch bestimmt sein soll, muß die Gruppe der Zustandsänderungen der Form isomorph sein mit der Gruppe der Spannungsänderungen.

Das Elastizitätsgesetz verlangt einen möglichst einfachen Zusammenhang zwischen den Eigenwerten eines Spannungstensors und einer Transformationsmatrix. Nun bilden aber die hier allein in Frage kommenden reinen Deformationen, d. h. die Transformationen, die sich auf drei Dehnungen in drei zueinander senkrechten Richtungen reduzieren lassen, keine Transformationsgruppe; nur wenn die Deformationshauptachsen nicht drehen, besitzen die reinen Deformationen den Gruppencharakter. Die Zuwüchse der Spannungen, die in diesem speziellen Fall mit diesen Transformationen durch das Gleichheitszeichen verbunden werden, müssen eine isomorphe Gruppe bilden und sind darum von den früheren Zuwüchsen unabhängig, so daß wir ein im Prandtlschen Sinne elastisch bestimmtes Superpositionsgesetz vor uns haben. Drehen indessen die Deformationshauptachsen, so verlieren die zugehörigen reinen Deformationen den Gruppencharakter und es kann dann nur ein elastisch unbestimmtes Superpositionsgesetz geben.

Man wird nun beim Aufstellen eines Elastizitätsgesetzes für einen ideal elastischen Stoff aus erkenntnistheoretischen Gründen weitgehendste elastische Bestimmtheit fordern.¹⁾ Der ideal elastische Stoff ist aber ebenso wenig wie der starre Körper ein wirklicher Stoff, sondern ein Instrument des Messens und Vergleichens, und so muß es dem Versuch überlassen bleiben, in der Theorie zunächst vermeidbare elastische Unbestimmtheiten aufzudecken.

Ganz kann man die elastische Unbestimmtheit nämlich nicht vermeiden und dies aus zwei Gründen. Den ersten dieser Gründe, das Fehlen der Gruppeneigenschaft bei der reinen Deformation im allgemeinen Fall, haben wir bereits erörtert, der zweite Grund liegt darin, daß der Spannungstensor kein echter Tensor vom Gewicht 0 ist, sondern eine Tensordichte.²⁾

1) Vgl. auch die entsprechenden allgemeinen Ausführungen in dem Buche von H. Dingler, *Das Experiment*. München 1928.

2) Hierauf hat zuerst L. Brillouin hingewiesen. Vgl. *Ann. de phys. T. III. 10. Serie. 1925. Les lois de l'élasticité* . . .

In der elementaren Elastizitätslehre hat man sich um alle diese Dinge bisher sehr wenig gekümmert, weil man sich damit beruhigte, daß ja nur äußerst kleine Deformationen vorkämen; man hat aber dabei übersehen, daß gewisse sehr wichtige geometrische Beziehungen, die man durch Erfahrung nie hätte finden können, durch den Übergang zum unendlich kleinen verwischt und unkenntlich werden, obgleich sie eigentlich das Fundament der mathematischen Elastizitätstheorie bilden müßten.

Da Tensordichten die Transformationseigenschaften von Tensoren erst durch Multiplikation mit der Transformationsdeterminante erhalten, so müssen wir unterscheiden zwischen der wahren physikalischen Spannung S_i und der reduzierten Spannung $S'_i = \text{Raumausdehnung} \times S_i$, die im Elastizitätsgesetz mit einer Funktion der Hauptdehnungen in Beziehung gesetzt werden muß.

Wie wir in einigen früheren Arbeiten¹⁾ gezeigt haben, werden unsere bereits genannten Forderungen an die elastische Bestimmtheit, soweit sie überhaupt zu erfüllen sind, befriedigt, wenn wir die Dehnung durch den $\ln \left\{ \frac{\text{Endlänge}}{\text{Anfangslänge}} \right\}$ messen.

Bezeichnen wir die drei Hauptdehnungen mit ε_i , so können wir die elastische Energie bei endlicher Deformation auch bei beliebig wechselnder Richtung der Deformationshauptachsen stets in folgender Form ansetzen:

$$(1) \quad 2A = 2G \cdot \{(\varepsilon_1 - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon)^2\} + 9K \cdot \varepsilon^2.$$

Das zu diesem Ansatz gehörige Elastizitätsgesetz lautet mit

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

und

$$S'_i = e^{3\varepsilon} \cdot S_i$$

$$(2a) \quad S'_i - S' = 2G \cdot \{\varepsilon_i - \varepsilon\}$$

$$(2b) \quad S' = 3K \cdot \varepsilon.$$

Bei sehr elastischen Körpern z. B. Gummi ist dieses Gesetz in der Tat durch Versuche bestätigt worden.

1) Vgl. H. Hencky, Ztschr. f. techn. Phys. 9. S. 215—220 u. 457. 1928; Ztschr. f. Phys. 55. S. 148. 1929. — C. B. Biezeno u. H. Hencky, On the general theory of elastic stability. Proc. Kon. Akad. Amsterdam 32. S. 449—450. 1929.

Um eine Abgrenzung gegenüber den übrigen Teilen der Physik zu erhalten, nehmen wir im folgenden stets isotherme Zustandsänderungen an, etwa entstehende Wärme wird also automatisch abgeführt gedacht.

Das von uns angenommene Gesetz ist nur das einfachste von allen überhaupt möglichen, man denke daher nicht, daß die ziemlich weitgehenden Schlüsse, die wir später daraus ziehen, etwa aus der speziellen Form dieser Gleichungen ihre Tragkraft erhalten. Wir hätten in dieser Hinsicht auch das in der elementaren Elastizitätstheorie verwendete Gesetz, das wir übrigens bei Übergang zur sehr kleinen Deformation auch aus den Gleichungen (2) erhalten, zugrunde legen können.

2. Das Superpositionsgesetz des ideal elastischen Kontinuums

Der Übergang zu einem beliebigen nicht mit den Hauptachsen zusammenfallenden System von Koordinatenachsen ist mit einigen Schwierigkeiten verknüpft, die bei der unendlich kleinen Deformation gar nicht auftreten. Wir müssen daher unter Annahme eines beliebig orientierten Systems den Anschluß an die Gleichungen (2a) und (2b) suchen.

Um bei den hierbei nötigen Rechnungen der großen Vorteile der Tensorsymbolik teilhaftig zu werden, ist es keineswegs nötig, ein schiefwinkliges Koordinatensystem zu benutzen. Es genügt, wenn wir die Koordinatenrichtungen numerieren und, wo nicht ausdrücklich das Gegenteil festgesetzt wird, über doppelt vorkommende Indizes summieren, ohne daß wir ein besonderes Summenzeichen schreiben.

Wir unterscheiden drei Zustände:

Zustand 0 mit den Koordinaten $\bar{x}_i = x_i - u_i$;

Zustand I mit den Koordinaten x_i ;

Zustand II zunächst mit den Koordinaten

$$\bar{x}_i = x_i + \delta u_i = x_i + v_i \delta t,$$

wenn wir

$$v_i = \frac{\delta u_i}{\delta t}$$

setzen.

Das System wird also auf den Zustand I bezogen, die Zustände 0 und II werden daraus abgeleitet.

Wir müssen nun trachten, eine Größe zu finden, die den

bestehenden Verformungszustand vollständig beschreibt. Durch totale Differentiation erhalten wir:

$$(3a) \quad d\dot{x}_i = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_3} \cdot dx_3 = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_k} \cdot dx_k,$$

sowie die Identität:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \cdot dx_k.$$

Mit unserer Summationsregel können wir nun schreiben:

$$dx_i \cdot dx_i = dx_i^2 = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \cdot dx_k dx_l,$$

$$d\dot{x}_i \cdot d\dot{x}_i = d\dot{x}_i^2 = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_l} \cdot dx_k dx_l,$$

wobei also rechts immer neun Summanden stehen, und erhalten durch Abziehen dieser beiden Beträge ein Maß für die reine Deformation mit Ausschaltung der Drehbewegung des Volumenelements, auf die es uns nicht ankommt.

Zur Definition der für die reine Deformation charakteristischen Tensorgröße e_{kl} setzen wir nun

$$(3b) \quad dx_i^2 - d\dot{x}_i^2 = 2 \cdot e_{kl} \cdot dx_k dx_l,$$

so daß:

$$2 \cdot e_{kl} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x_l} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_l}$$

oder auch nach etwas Rechnung:

$$(4a) \quad 2 \cdot e_{kl} = \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial x_l}$$

Die Eigenwerte dieses Tensors findet man aus der Gleichung dritten Grades:

$$(4b) \quad \begin{Bmatrix} e_{11} - e_i & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} - e_i & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} - e_i \end{Bmatrix} = 0.$$

Sie stehen in einer einfachen Beziehung zu den von uns in den Gleichungen (2) verwendeten Größen ε_i . Das Umrechnen in die Werte e_i läßt sich mit Hilfe der Definitionsgleichung der e_{kl} leicht durchführen. Wir finden:

$$(4c) \quad \begin{cases} \varepsilon_i = \ln \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-2e_i}} \right\} \\ 2\varepsilon_i = -\ln(1-2e_i). \end{cases}$$

In dieser Form können wir aber noch nicht zu einem be-

liebigen Koordinatensystem übergehen, dazu müssen wir die Beziehung in Form einer absolut und für alle Werte von e_i konvergierenden Reihenentwicklung darstellen. Es wird:

$$(5a) \quad 2e_i = 1 - e^{-2\epsilon_i} = \frac{1}{1!} \cdot (2\epsilon_i) - \frac{1}{2!} \cdot (2\epsilon_i)^2 + \frac{1}{3!} \cdot (2\epsilon_i)^3 - \dots$$

Andererseits können wir mit Hilfe der Gleichungen (2) die Größen ϵ_i wieder in den S'_i ausdrücken. Es wird nämlich:

$$(5b) \quad 2\epsilon_i = \frac{1}{G} \cdot (S'_i - S') + \frac{2}{3K} \cdot S'.$$

Wenn wir die Abkürzungen einführen:

$$(5c) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma'_i = \frac{1}{G} \cdot (S'_i - S') \quad \text{und} \\ \sigma' = \frac{2}{3K} \cdot S', \end{array} \right.$$

so erhalten wir die wichtige Beziehung:

$$(6) \quad 2 \cdot e_i = \frac{1}{1!} \cdot (\sigma'_i + \sigma') - \frac{1}{2!} \cdot (\sigma'_i + \sigma')^2 + \frac{1}{3!} \cdot (\sigma'_i + \sigma')^3 - \dots$$

die die Grundlage aller weiteren Untersuchungen bildet. Hätten wir ein anderes Elastizitätsgesetz gewählt, so wäre diese Beziehung noch verwickelter geworden. Unsere Wahl ist gerade so getroffen, daß diese Beziehung die einfachste überhaupt mögliche Form annimmt.

Für den Übergang von auf die Hauptachsen bezogenen Potenzen wie e_i^1, e_i^2, e_i^3 zur willkürlichen Koordinatenorientierung stellt uns unsere Indizesbezeichnung ein einfaches Mittel zur Verfügung, das wir hier ohne Beweis anführen, da es in jedem Lehrbuch der Algebra angegeben ist, oder wenigstens angegeben sein sollte.

Hat man z. B. e_i^3 und ist e_{mn} die Tensorform von e_i , so wird die allgemeine Tensorform von e_i^3 dargestellt durch $e_{mi} e_{ik} e_{kn}$, wobei:

$$\begin{aligned} e_{mi} e_{ik} e_{kn} &= e_{m1} e_{1k} e_{kn} + e_{m2} e_{2k} e_{kn} + e_{m3} e_{3k} e_{kn} \\ &= e_{m1} e_{11} e_{1n} + e_{m1} e_{12} e_{2n} + e_{m1} e_{13} e_{3n} \\ &+ e_{m2} e_{21} e_{1n} + e_{m2} e_{22} e_{2n} + e_{m2} e_{23} e_{3n} \\ &+ e_{m3} e_{31} e_{1n} + e_{m3} e_{32} e_{2n} + e_{m3} e_{33} e_{3n}. \end{aligned}$$

Unter Benutzung dieses einfachen Schemas ist es uns stets

möglich von den Hauptachsen eines Tensors auf die allgemeine Komponentendarstellung überzugehen.

Wir gehen nun zum Zustand II über, unterwerfen also den Zustand I der affinen Raumtransformation, die durch die infinitesimale Verschiebung δu_i definiert ist. Die Transformationsmatrix können wir in einen symmetrischen Teil, die Formänderung

$$(7a) \quad f_{mn} \delta t = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{\partial \delta u_n}{\partial x_m} + \frac{\partial \delta u_m}{\partial x_n} \right\} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{\partial v_n}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_n} \right\} \delta t$$

und in einen antisymmetrischen Teil, die Drehung:

$$(7b) \quad \omega_{mn} \delta t = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{\partial \delta u_n}{\partial x_m} - \frac{\partial \delta u_m}{\partial x_n} \right\} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{\partial v_n}{\partial x_m} - \frac{\partial v_m}{\partial x_n} \right\} \delta t.$$

zerlegen. f_{mn} ist dann der Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten, ω_{mn} der Tensor der Drehungsgeschwindigkeiten.

Um nun die entsprechende Änderung des Tensors e_{mn} zu finden, bedenke man, daß die Drehung des Elementes für das Superpositionsgesetz, das wir finden wollen, ohne Einfluß bleiben muß.

Das Variationszeichen bezieht sich also auf die Formänderung des materiellen Elementes, das wir ins Auge gefaßt haben.

Wir dürfen aber auch nicht schreiben:

$$e_i + \delta e_i = e_i + f_i \delta t$$

oder:

$$e_{mn} + \delta e_{mn} = e_{mn} + f_{mn} \delta t,$$

denn durch die infinitesimale Raumtransformation wird ja auch der Tensor e_{mn} etwas verändert. Bei der Berechnung dieser Veränderung müssen wir bedenken, daß wir die Deformationshauptachsen immer vom Endzustand aus berechnen, daß wir also die Transformation des Tensors in umgekehrter Richtung vornehmen müssen.

Nach den Regeln der Tensorrechnung wird dabei jeder Index als Repräsentant eines idealen Vektors betrachtet und als solcher transformiert. Es wird dann, wenn wir noch den Einheitstensor g_{mn} mit der Matrix

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

einführen,

$e_{mn} + \delta e_{mn} = (e_{ik} + f_{ik} \delta t) (g_{mi} - f_{mi} \delta t) (g_{nk} - f_{nk} \delta t)$
und nach Ausrechnung:

$$(8a) \quad \delta e_{mn} = \delta t (f_{mn} - e_{ni} f_{im} - e_{mk} f_{kn}).$$

Aus den Gleichungen (6) und (8a) erhalten wir endlich das gesuchte Superpositionsgesetz für eine vorhergehende endliche Verformung des Stoffes, mit welchem man jedes Problem der Elastizitätstheorie beherrscht.

$$(8b) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2 \cdot \{f_{mn} - e_{ni} f_{im} - e_{mk} f_{kn}\} \\ & = \frac{1}{1!} \cdot \left\{ \frac{\delta \sigma_{mn}'}{\delta t} + g_{mn} \cdot \frac{\delta \sigma'}{\delta t} \right\} \\ & - \frac{1}{2!} \cdot \left\{ \frac{\delta}{\delta t} (\sigma_{mi}' \cdot \sigma_{in}') + \frac{\delta}{\delta t} (2 \cdot \sigma' \cdot \sigma_{mn}') + g_{mn} \frac{\delta}{\delta t} (\sigma')^2 \right\} \\ & + \frac{1}{3!} \cdot \{\dots\} - \dots \end{aligned} \right.$$

Die hier noch vorkommenden Deformationsgrößen e_{mn} werden durch die Reihen:

$$(8c) \quad \left\{ \begin{aligned} 2e_{mn} = & \frac{1}{1!} (\sigma_{mn}' + g_{mn} \cdot \sigma') - \frac{1}{2!} \cdot (\sigma_{mi}' \cdot \sigma_{in}' + 2 \cdot \sigma' \cdot \sigma_{mn}') \\ & + g_{mn} \cdot \sigma'^2 + \dots \end{aligned} \right.$$

eliminiert. Nach dieser Elimination ist die Änderung des Spannungstensors als Funktion der Änderungen des Tensors der Deformationsgeschwindigkeiten und des Geschwindigkeitsvektors gegeben, die Verschiebungen u_i dagegen sind vollkommen aus unseren Formeln verschwunden.

Die Gültigkeit dieser Formeln ist unbegrenzt hinsichtlich der Größe der σ_{mn}' .

Können die σ_{mn}' als gegen die Einheit sehr kleine Größen betrachtet werden, wie z. B. bei kleinen elastischen Schwingungen um eine Gleichgewichtslage, so kann man die höheren Potenzen von σ_{mn}' vernachlässigen und erhält dann das Superpositionsgesetz in der folgenden einfachen Form:

$$(9a) \quad \frac{\delta \sigma_{mn}'}{\delta t} = \frac{\partial v_m}{\partial x_n} + \frac{\partial v_n}{\partial x_m} + \frac{2}{3} \cdot g_{mn} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

$$(9b) \quad \frac{\delta \sigma'}{\delta t} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Diese Gleichungen werden nun aber, ganz als ob sich dies von selbst verstünde, auf endliche Bewegungen übertragen und

zur Ableitung der Gleichungen der Hydrodynamik nach der Relaxationstheorie zugrunde gelegt.¹⁾

Nur dann wenn die reinen Deformationen eine Transformationsgruppe bilden, ist es möglich, daß ein derartiges lineares Superpositionsgesetz für beliebig große Bewegungen besteht. Das ist aber *nur der Fall*, wenn die Deformationshauptachsen überhaupt nicht drehen.

Nun müssen wir aber noch angeben, was man unter der Variation des Spannungszustandes zu verstehen hat. Die Spannungen sind als Ortsfunktion zur Zeit t für den Zustand I gegeben.

Bei der Bildung des Differentials müssen wir unserem an das materielle Teilchen festgehefteten Achsendreikant folgen und dabei auch die Drehung des Dreikants berücksichtigen.

Wir erhalten sonach:

$$(10) \quad \frac{\delta \sigma_{mn}'}{\delta t} = \frac{\partial \sigma_{mn}'}{\partial t} + v_i \cdot \frac{\partial \sigma_{mn}'}{\partial x_i} + \sigma_{ni}' \cdot \omega_{im} + \sigma_{mk}' \cdot \omega_{km}.$$

3. Die Eulerschen Gleichungen der Hydrodynamik für zähe Flüssigkeiten

Wir gelangen zu einer erheblichen Vereinfachung unseres Formelapparates, wenn wir inkompressibles Material voraussetzen können, d. h. wenn:

$$(11a) \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0.$$

Wir können dann bei den Spannungsgrößen die Akzente weglassen und

$$(11b) \quad \sigma_{mn} = \frac{1}{G} (S_{mn} - g_{mn} \cdot S).$$

setzen.

Aus Gleichung (6) wird dann:

$$(11c) \quad 2 \cdot e_{mn} = \frac{1}{1!} \cdot \sigma_{mn} - \frac{1}{2!} \cdot \sigma_{mi} \sigma_{in} + \frac{1}{3!} \cdot \sigma_{mi} \sigma_{ik} \sigma_{kn} - \dots$$

Das Superpositionsgesetz wird:

$$(11d) \quad \left\{ \begin{aligned} 2 \{ f_{mn} - e_{ni} f_{im} - e_{mk} f_{kn} \} &= \frac{1}{1!} \cdot \frac{\delta}{\delta t} \sigma_{mn} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{\delta}{\delta t} (\sigma_{mi} \sigma_{in}) \\ &\quad - \frac{1}{3!} \cdot \frac{\delta}{\delta t} (\dots). \end{aligned} \right.$$

1) Vgl. z. B. E. Madelung, Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Berlin, J. Springer. 1922. S. 186—187.

und der Differentialquotient der Spannung:

$$(11e) \quad \frac{\delta \sigma_{mn}}{\delta t} = \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial t} + v_i \cdot \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial x_i} + \sigma_{ni} \omega_{im} + \sigma_{mk} \omega_{kn}.$$

Bisher handelte es sich immer noch um die Bewegung eines ideal elastischen Kontinuums. Es gibt bekanntlich zwei Möglichkeiten, die endlichen Bewegungen eines Kontinuums zu verfolgen. Bei der einen, gewöhnlich mit dem Namen von Lagrange verknüpften Methode folgt man durchaus der Bewegung eines bestimmten materiellen Teilchens, bei der anderen Methode läßt man die Materie durch ein gegebenes Maschenwerk von Bezugskoordinaten passieren; man gibt an, in welchem Zustand sich die gerade einen Raumpunkt passierende Materie befindet und interessiert sich nicht für die weiteren Schicksale des Massenteilchens.

Die zweite Methode hat sich für Untersuchungen des Bewegungszustandes strömenden Materiales als die weitaus praktischere erwiesen, sie wird gewöhnlich nach Euler genannt, obwohl Euler beide Methoden anzuwenden wußte. Diese zweite Methode haben wir, wie aus unseren bisherigen Ausführungen hervorgeht, bevorzugt.

Freilich machen die Randbedingungen hier große Schwierigkeiten, denn ein elastisches Kontinuum, wie beweglich es auch sei, wird immer freie Oberflächen haben, deren Verlauf vorläufig nicht bekannt ist. Wir stellen aber diese Betrachtung gar nicht an um spezielle Randwertprobleme zu behandeln, sondern um vom elastischen Kontinuum zur zähen Flüssigkeit überzugehen.

Zu diesem Zweck müssen wir noch die Bewegungsgleichungen haben. Die dynamische Grundgleichung lautet ohne Massenkräfte:

$$\varrho \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} + v_i \cdot \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial S_{mi}}{\partial x_i}.$$

Führen wir den Druck p ein und ersetzen $\frac{1}{3} S_{ii}$ durch $-p$, so erhalten wir schließlich:

$$(12a) \quad \varrho \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} + v_i \cdot \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_m} + G \cdot \frac{\partial \sigma_{mi}}{\partial x_i}.$$

Aus den Gleichungen (11d) können wir den materiellen Differentialquotienten der Spannung eliminieren und finden dann etwa:

$$\frac{\delta \sigma_{mn}}{\delta t} = \text{Funktion von} \left(v_i, \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \sigma_{mn}, \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial t}, \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial x_i} \right) = \varphi_{mn}.$$

Wenn wir nun annehmen, daß unser Kontinuum mit Relaxation behaftet ist, muß diese Gleichung entsprechend verändert werden. Wir wählen den Ansatz von Reiger-Natanson und setzen:

$$(12b) \quad \frac{\delta \sigma_{mn}}{\delta t} = \varphi_{mn} - \frac{\sigma_{mn}}{T}.$$

Da wir die Elimination nicht wirklich ausführen, kommt diese Relaxationshypothese darauf hinaus, daß wir an Stelle des Differentialquotienten der Spannung stets

$$\frac{\delta \sigma_{mn}}{\delta t} + \frac{\sigma_{mn}}{T}$$

setzen. Damit erhalten wir aus (11d):

$$(12c) \quad \left\{ \begin{aligned} 2 \cdot \{f_{mn} - e_{ni} f_{im} - e_{mk} f_{kn}\} &= \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{\delta \sigma_{mn}}{\delta t} + \frac{\sigma_{mn}}{T} \right) - \frac{1}{2!} \\ &\cdot \left[\sigma_{mi} \left(\frac{\delta \sigma_{in}}{\delta t} + \frac{\delta \sigma_{in}}{\delta t} \right) + \left(\frac{\delta \sigma_{mi}}{\delta t} + \frac{\sigma_{mi}}{T} \right) \sigma_{in} \right] + \dots \end{aligned} \right.$$

Durch die Gleichungen (11a, b, c, e, und 12c) ist der Bewegungszustand im Innern der Flüssigkeit bestimmt. Multipliziert man diese Gleichung mit $G \cdot T = k$, wobei k endlich bleibt und geht zur Grenze $T = 0, G = \infty$ über, so erhält man den verallgemeinerten Newtonschen Ansatz der Reibung:

$$S_{mn} - g_{mn} \cdot S = 2k \cdot f_{mn},$$

d. h. der Spannungsdeviator ist nun direkt proportional dem Geschwindigkeitsdeviator. Man sieht aber leicht ein, daß diese Beziehung eben nur für diese *physikalisch* unmöglichen Extremwerte richtig sein kann und daß infolge der remanenten Elastizität schließlich ein Zustand eintreten muß, für den diese Beziehung auch nicht annähernd die Verhältnisse wiedergibt.

Das materielle Teilchen führt auf seinem Wege einen bestimmten Betrag an elastischer Energie mit sich, der sich nach Maßgabe der Arbeit der auf das Teilchen wirkenden Randspannungen und nach Maßgabe der durch die Wärmebewegung der Moleküle absorbierten Energie ändert. Bei großen Geschwindigkeiten inhomogener Strömungsfelder fällt dabei das Hauptachsensystem des Tensors der Deformationsgeschwindigkeiten und des Spannungstensors keineswegs zusammen.

Die willkürliche Annahme, daß diese Achsensysteme unter allen Umständen zusammenfallen müßten, führt zu dem Ergebnis, daß eine turbulente Flüssigkeitsbewegung vom Stand-

punkt der theoretischen Hydrodynamik vollkommen unerklärlich bleibt.¹⁾

Die Versuche von Prandtl und seinen Schülern eine Instabilität der laminaren Strömung theoretisch abzuleiten, kommen alle darauf hinaus, daß man sich entweder den Konsequenzen der Navier-Stokesschen Gleichungen so vorsichtig wie möglich zu entziehen sucht oder aber die Ursache der turbulenten Bewegung in hypothetischen Einflüssen der Begrenzungen sucht.

Überhaupt bemerken wir, seitdem Prandtl die hydrodynamischen Probleme durch neue und vielversprechende Ansätze in Bewegung gebracht hat, daß immer da, wo sich diese Ansätze hauptsächlich der Theorie der idealen Flüssigkeit bedienen, der Erfolg den Erwartungen entsprochen hat, während dort, wo die traditionelle Reibungsauffassung eine wesentliche Rolle spielte, wie z. B. bei der Grenzschichttheorie, die neuen Ansätze durch die Erfahrung bald in ihrer Tragweite eingeschränkt wurden. Von dem Streben der turbulenten Flüssigkeitsbewegung, ferne vom Rand homogene Strömungszustände zu bevorzugen, geben unsere Gleichungen eine viel ungezwungener Erklärung als die bisher angenommene, daß in der Mitte des Profils die Reibung am größten sei.

Zusammenfassung

Sprechen so die Versuche eine deutliche Sprache zugunsten einer Revision der Grundlagen der Hydrodynamik, so müssen wir doch erklären, es sind in der Hauptsache nicht die Versuchsergebnisse, auf die wir unsere prinzipielle Verwerfung des üblichen Reibungsansatzes gründen, sondern es ist die a priori feststehende Unmöglichkeit, außer dem statischen Kraftmaß, dem Elastizitätsgesetz und dem dynamischen Kraftmaß, der dynamischen Grundgleichung noch weitere Gesetze in die *Mechanik* einzuführen, durch welche dann auf eine neue und von den legitimen zwei Methoden verschiedene Weise definiert würde, was Kraft ist.

Es liegt lediglich an dem gesunden mechanischen Instinkt bei Verwendung der Versuche, wenn bei einem solchen Verfahren

1) Am gründlichsten hat diesen Beweis L. Hopf geliefert. Vgl. *Ann. d. Phys.* 4. Folge. 44. S. 1—60. Dort findet man auch weitere Literaturangaben.

nicht direkt absurde Resultate zum Vorschein kommen. In der Tat hat ja auch Prandtl bei einem analogen Problem, dem durch Painlevé aufgedeckten Reibungsparadoxon, eine Erklärung gegeben, die ganz im Sinne unserer Ausführungen ist.

Unsere Kritik der traditionellen Hydrodynamik ist eigentlich nichts anderes als eine Anwendung der bei dem Reibungsparadoxon gewonnenen Einsichten.

Wir weisen noch einmal darauf hin, daß der fehlende Gruppencharakter der reinen Deformation es ist, der in der Hydrodynamik der zähen Flüssigkeiten die Schwierigkeiten schafft, nicht etwa ein von uns eingeführter spezieller Ansatz des Elastizitätsgesetzes; denn mit jedem Ansatz würden wir dasselbe Resultat bekommen, daß nämlich das gleichzeitige Bestehen eines linearen Elastizitätsgesetzes und eines linearen Superpositionsgesetzes auf Grund der geometrischen Zusammenhänge zwischen den Eigenwerten des Spannungstensors und den Eigenwerten der Matrix der reinen Deformationen unmöglich ist.

Delft, den 7. Juli 1929.

(Eingegangen 11. Juli 1929)
