

N° D'ORDRE

5

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR M. A. IMBERT

LICENCIÉ ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES,

CHEF DES TRAVAUX PHYSIQUES A LA FACULTÉ DE MÉDECINE DE LYON

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES THÉORIQUES ET EXPÉRIMENTALES SUR
L'ÉLASTICITÉ DU CAOUTCHOUC

Faites au Laboratoire de physique de la Faculté de médecine
de Lyon.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le _____ devant la Commission d'Examen

MM. REBOUL, *Président.*

HUGUENY,

DIEULAFAIT,

} *Examineurs.*



LYON

IMPRIMERIE GÉNÉRALE DU RHONE

P. GOYARD, rue de la Belle-Cordière, 14.

*Orig. d'envoi
(Hémar) n° 173*

ACADÉMIE D'AIX

FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE

DOYEN.....	REBOUL, * Professeur, Chimie.
	L'ABBÉ AOUST, * Mathématiques.
	DIEULAFAIT..... Géologie.
	HUGUENY, * Physique.
PROFESSEURS.....	MARION, * Zoologie.
	HECKEL..... Botanique.
	REBOUL, * Chimie.
	STÉPHAN, * Astronomie.
	CHARVE,* Mécanique.
SECRÉTAIRE.....	NOUGUIER.

A MON PÈRE

J. IMBERT

PRINCIPAL DU COLLÈGE DE CLAMECY (NIÈVRE)

OFFICIER DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

MON PREMIER MAÎTRE

A MA MÈRE

A. IMBERT:

A M. LE D^r MONOYER

Professeur à la Faculté de Médecine de Lyon.

A M. LE D^r LORTET

Doyen de la Faculté de Médecine de Lyon.

A MM. LES PROFESSEURS

REBOUL, HUGUENY, DIEULAFAIT

A MES ANCIENS MAITRES

De la Faculté des Sciences de Marseille.

A. IMBERT.

INTRODUCTION

Parmi les corps à notre usage, un des plus curieux par les singulières propriétés physiques qu'il possède, c'est certainement le caoutchouc.

Son utilité pratique est en outre considérable ; les arts et les sciences, en effet, l'emploient également ; les physiciens et les chimistes ont sans cesse recours à cet auxiliaire commode dans leurs expériences de laboratoire ; les médecins ont construit avec lui bien des appareils qui sont d'un usage journalier aujourd'hui et depuis ces dernières années, on utilise cette substance pour la réduction des gravures dans telle proportion que l'on veut.

J'ai dit que le caoutchouc jouissait de singulières propriétés physiques ; les unes sont connues et expliquées ; c'est l'explication des autres que je me suis proposé dans ce travail. Je vais les énumérer toutes rapidement :

1° — Le physicien anglais Grough observa le premier que le caoutchouc s'échauffe lorsqu'on l'étire, au lieu de se

refroidir comme le font les autres corps, et que, lorsqu'on élève la température d'une lame de caoutchouc tendue, la lame se contracte; tandis que, dans les mêmes conditions, les autres corps se dilatent.

Depuis, M. Joule (*) a repris, varié et perfectionné les expériences de Grough; le résultat de ces recherches a été le suivant :

Tendu par de faibles charges, le caoutchouc se refroidit pendant la traction, et chauffé alors il s'allonge, suivant en cela la loi ordinaire ;

Tendu par des charges plus fortes, le caoutchouc s'échauffe pendant la traction, et chauffé alors il se contracte, à l'inverse des phénomènes présentés par les autres corps.

2° — Les particularités précédentes conduisaient à penser que le coefficient d'élasticité du caoutchouc devait présenter des variations anormales, quand la température variait.

M. Exner (**), en employant une méthode plus ingénieuse que sensible, due à M. Stéphan et que je décrirai plus loin, a trouvé que le coefficient d'élasticité diminue toujours quand la température s'accroît, quelle que soit la charge sous laquelle on opère. Je montrerai que ce résultat est erroné et que :

Le coefficient d'élasticité augmente avec la température lorsque le caoutchouc est tendu par de faibles charges, tan-

(*) — Philosophical Magazine, 1857.

(**) Wien, Akad, 1874.

dis qu'il diminue quand la température augmente lorsque le caoutchouc est tendu par des charges plus considérables. La théorie et l'expérience conduisent en effet toutes deux à ce résultat.

3° — Lorsqu'on met en communication avec un manomètre, à eau par exemple, l'un de ces ballons en caoutchouc gonflés de gaz hydrogène qui servent de jouet aux enfants et que l'on injecte de l'air dans l'intérieur, on observe que la tension de cet air, mesurée par le manomètre, augmente d'abord, puis reste sensiblement constante pendant une variation assez considérable du volume du ballon, et finit par diminuer à mesure que le ballon se dilate davantage.

Ce fait de la constance de la tension de l'air contenu dans le ballon en caoutchouc a été observé pour la première fois par M. le docteur Pouillet de Lyon, à propos de recherches dont je m'occuperai plus loin ; il n'est pas moins surprenant au premier abord que ceux dont je viens de parler et que celui que j'ai encore à énoncer.

4° — L'élasticité du caoutchouc considéré en lames assez minces varie avec la direction suivant laquelle on la mesure ; il en résulte que ce corps possède la biréfringence accidentelle.

Cette double réfraction a été constatée pour la première fois par M. le professeur Ranvier sur des fils de caoutchouc naturel ; elle existe aussi pour le caoutchouc vulcanisé ; on

verra plus loin comment je l'ai mise en évidence et quelle est l'explication qu'il convient d'en donner.

Telles sont les principales singularités qu'offre le caoutchouc.

On peut dire, d'une manière générale, que l'étude des phénomènes qui paraissent au premier abord anormaux, que la considération des cas particuliers auxquels les théories générales ne paraissent pas applicables, est d'une importance fort grande. Dans les sciences mathématiques, ces cas particuliers, traités à part, servent généralement à résoudre les questions plus complexes. Dans les sciences physiques leur étude peut amener à des résultats plus importants encore; ils peuvent être cause de l'abandon d'une théorie incapable de les expliquer et de la découverte de la théorie vraie : tel est le phénomène des interférences qui a définitivement condamné les idées de Newton sur l'agent lumineux. C'est peut-être un phénomène de ce genre qui conduira à la connaissance de la nature de l'électricité et de la pesanteur et permettra, par cela même, de donner à tous les phénomènes physiques une seule et même cause : le mouvement.

Mais parfois l'importance de ces phénomènes est moins grande : c'est lorsque, au lieu d'être dus à la nature même de l'agent qui les produit, d'être indépendants de la substance des corps qui en sont le siège et de présenter par cela même une grande généralité, ils ne constituent qu'une manière d'être d'un seul ou d'un petit nombre de substances

à l'égard de l'agent producteur de toute une classe de phénomènes physiques et résultent ainsi immédiatement de la nature du corps, non de celle de l'agent. Toutes les fois qu'un corps en mouvement est amené au repos, sa température s'élève; c'est là un phénomène général uniquement dû à la nature de l'agent calorifique. L'eau, prise à une température assez basse et chauffée progressivement, se contracte d'abord pour se dilater ensuite, c'est là un phénomène particulier à l'eau, moins important à considérer que le précédent.

De tels faits, particuliers à certains corps, ne nous paraissent souvent anormaux que parce que nous voyons tous les jours se produire en grand nombre sous nos yeux des phénomènes exactement inverses, et que nous ne recherchons pas toutes les circonstances dans lesquelles ils se manifestent. En les étudiant de plus près, si les principes admis sont exacts, on s'aperçoit que la même théorie, les mêmes formules renferment les uns et les autres et que par la variation relative des coefficients que ces formules contiennent, tous sont naturellement expliqués. Dans ce cas, l'étude de ces faits singuliers aura encore une importance; elle aura contribué, quoique pour une faible part quelquefois, à atteindre ce but de tous les efforts dans les sciences physiques: poser un certain nombre de principes et en déduire, par des formules, tous les phénomènes, sans exception, que peut nous offrir la nature.

Dans le présent travail j'ai mis à profit, du mieux qu'il m'a été possible, les excellentes leçons de mes anciens maîtres à la Faculté des Sciences de Marseille et les savants conseils de mon chef à la Faculté de Médecine et de Pharmacie de Lyon, M. le professeur Monoyer.

Je suis heureux de leur offrir publiquement l'hommage de ma reconnaissance.

ACTION DE LA CHALEUR

SUR LE CAOUTCHOUC

I.

PHÉNOMÈNES THERMIQUES QUI ACCOMPAGNENT LA TRACTION.

Si on appelle Q la quantité de chaleur qui correspond à une modification quelconque de l'état d'un corps et E l'équivalent mécanique de la chaleur, le produit QE représentera la variation d'énergie qui constitue le phénomène. Elle se compose : de la variation A d'énergie actuelle, due au changement de vitesse de vibration des molécules du corps ; de la variation P d'énergie potentielle, produite par le déplacement relatif des molécules du corps, de la variation S d'énergie sensible des forces extérieures. Si nous représentons par I la somme $A + P$, que l'on désigne collectivement sous le nom d'énergie interne, nous aurons l'égalité :

$$QE = I + S.$$

Les quantités I et S ont des signes contraires dans le cas de la traction, il est facile de s'en convaincre. Il résulte par exemple des expériences d'Edlung (*) que la quantité de chaleur absorbée par un fil qui s'allonge, lorsqu'on suspend un poids à son extrémité, est égale à celle qu'il dégage

(*) *Annales de Poggendorff* t. CVIV, p. 1.

pour revenir à sa longueur primitive, en soulevant le poids qui a produit l'allongement, et que cette même quantité de chaleur est inférieure à celle que dégage le fil lorsque, après avoir été tendu, il revient à sa longueur primitive sans soulever aucun poids. Dans cette dernière expérience, la variation S d'énergie sensible a diminué, parce que le fil n'avait aucune charge à soulever; et puisque la chaleur dégagée dans ce cas a été plus considérable, c'est que les deux quantités I et S ont bien des signes contraires.

En mettant les signes en évidence, nous aurons donc :

$$Q E = I - S$$

Considérons le cas de l'allongement sous l'effet d'un poids tenseur. Rien ne dit, *à priori*, que la quantité $I - S$ doive être positive, nulle, ou négative; rien ne dit même que son signe restera le même lorsqu'on fera l'expérience entre des limites de charge assez éloignées; et si quelques corps peuvent présenter ces variations de signe de la quantité $I - S$, ce seront surtout ceux qui sont susceptibles de prendre un allongement considérable, le caoutchouc par exemple.

On doit donc, *à priori*, admettre qu'il peut se présenter 3 cas, savoir :

$$(1) \begin{cases} I - S > 0 \\ I - S = 0 \\ I - S < 0 \end{cases}$$

Dans le premier cas, il y aura abaissement de température pendant la traction; dans le second la température restera invariable pendant l'expérience; dans le troisième, l'allongement sera accompagné d'un dégagement de chaleur.

Le raisonnement précédent ne s'appuie, en définitive, que sur des principes connus de mécanique, mais énoncés sous une forme un peu différente de la forme ordinaire et sous

laquelle on les emploie dans la théorie mécanique de la chaleur ; aussi peut-on le ramener à des termes plus simples.

Lorsqu'on soumet une barre d'un corps quelconque à l'effort d'un poids tenseur, elle s'allonge : il y a donc eu travail accompli puisque le point d'application de la charge s'est déplacé. Mais ce travail doit-il correspondre à un dégagement de chaleur ou à un abaissement de température dans le corps soumis à l'expérience ? La réponse à cette question offre la même difficulté que celle qui s'est présentée dans l'interprétation des expériences de M. Bécлар ; il s'agissait d'expliquer les phénomènes thermiques qui accompagnent la contraction des muscles du bras, la main soulevant un poids dans un cas, et le soutenant pendant sa chute dans l'autre. Les considérations présentées à ce sujet s'appliquent de tout point à la question que je traite.

Le poids tenseur arrive au bas de sa course sans vitesse, parce que la main ou le corps soumis à la traction s'est à chaque instant opposé à la chute de cette charge. Si la charge était tombée en chute libre, elle aurait acquis, pour un même déplacement, une force vive qu'elle ne possède pas dans les expériences qui nous occupent ; cette force vive disparue, nous devons la retrouver sous forme de chaleur dégagée, tendant à produire, dans le corps soumis à la traction, une élévation de température.

Mais la lame considérée s'allonge, ses molécules se déplacent les uns par rapport aux autres et de là résulte un travail intérieur auquel, sans aucun doute, doit correspondre un abaissement de température.

L'étude de la traction nous montre donc deux causes tendant à faire varier dans deux sens opposés la température des corps soumis à l'expérience. Pouvons-nous dire d'avance quel sera l'effet résultant ? Evidemment non, car,

si nous pouvons évaluer exactement le travail extérieur, nous n'avons aucune notion précise sur la constitution moléculaire des corps et nous ne savons pas comment varient, avec la distance, les forces qui produisent la cohésion. Nous sommes donc obligés de demander à l'expérience l'indication de la grandeur relative des travaux intérieurs et extérieurs ; *à priori*, rien ne peut nous faire croire que l'un d'eux soit toujours plus grand que l'autre, et nous devons penser que le phénomène que nous venons d'analyser, la traction, peut donner naissance, suivant les corps sur lesquels on l'observe, à un dégagement de chaleur, ou à un abaissement de température, ou même n'être accompagné d'aucun phénomène thermique. Nous retrouvons ainsi les résultats contenus dans les 3 équations précédentes.

Le caoutchouc présente à lui seul ces trois cas, comme l'ont montré les expériences de M. Joule. Il y a même lieu de penser, c'est du moins l'opinion de M. Tyndall, que d'autres corps présentent les mêmes particularités, et cette opinion paraît d'autant plus probable que, jusqu'à présent, les phénomènes de l'élasticité de traction n'ont été étudiés que sur une classe assez restreinte de corps, le verre et les métaux, dans lesquels I est très-grand et par conséquent toujours supérieur à S . Mais ce que l'on peut du moins avancer, *à priori*, c'est que, puisque l'on ne sait pas calculer la quantité I , on ne doit pas regarder comme plus singuliers les uns que les autres, les divers phénomènes qui correspondent à l'une quelconque des 3 relations (4).

Lorsque cette manière d'être du caoutchouc pendant la traction fut connue, M. Thomson pensa que des phénomènes corrélatifs devaient se produire si, pendant la traction, on venait à échauffer cette substance.

Pour de faibles charges, le caoutchouc se comporte comme les autres corps, il se refroidit au moment de la

traction ; si on vient à le chauffer alors, comme les autres corps, il doit se dilater. Pour des charges plus fortes, le caoutchouc s'échauffe pendant la traction ; il était à supposer qu'une élévation de température, à ce moment, devait produire un phénomène inverse de celui de tantôt, devait amener une contraction au lieu d'une dilatation. On peut enfin faire supporter au caoutchouc une charge comprise entre les charges extrêmes précédentes et pour laquelle la traction n'est accompagnée d'aucun changement de température ; si alors on vient à chauffer ou à refroidir le corps soumis à l'expérience, on doit penser que l'élévation ou l'abaissement de température n'amènera aucun changement dans la longueur du caoutchouc.

Toutes ces déductions de M. Thomson ont été pleinement confirmées par les expériences de M. Joule et on peut d'ailleurs démontrer rigoureusement que les différents modes d'action de la chaleur sur le caoutchouc diversement tendu sont les phénomènes corrélatifs des variations thermiques que produisent sur ce corps des charges plus ou moins fortes.

Lorsqu'en effet on applique les principes de la théorie mécanique de la chaleur à la question qui nous occupe, on est conduit à l'équation :

$$\frac{dt}{dp} = - \frac{A \alpha \times T}{C}$$

dans laquelle dt est la variation de température correspondant à la variation de charge dp . A l'inverse de l'équivalent mécanique de la chaleur, α le coefficient de dilatation linéaire sous pression constante, \times la longueur de la barre soumise à l'expérience, T sa température et C sa chaleur spécifique sous pression constante (*).

(*) Briot. — *Théorie mécanique de la chaleur*, p. 163.

Cette formule montre que α et dt ont des signes contraires. Donc si un corps se refroidit pendant la traction, dt est négatif, α est positif et un accroissement de température doit faire allonger le corps. Si le corps s'échauffe pendant la traction, dt est positif, α doit donc être négatif, et le corps tendu doit se contracter sous l'influence d'un accroissement de température. Enfin, si dt est nul, si la traction n'est accompagnée d'aucun changement de température, α doit être aussi nul, et la chaleur ne doit alors produire sur le corps aucun changement de longueur.

De ce qui précède, on peut conclure ce qui suit :

1° — Pendant qu'on exerce une traction sur un corps, ce corps peut s'échauffer, ou n'éprouver aucun changement de température, ou se refroidir. Rien n'indique, *à priori*, que l'un de ces cas doive se présenter plutôt que l'autre ; ils peuvent même se succéder dans un même corps, pour des charges différentes.

Le caoutchouc est précisément un de ces corps.

2° — Les divers phénomènes calorifiques qui accompagnent la traction déterminent des modes d'action différents de la chaleur sur le corps qui subit l'allongement. Ces modes d'action sont indiqués par la théorie dont les résultats sont confirmés par l'expérience.

II

VARIATION DU COEFFICIENT D'ÉLASTICITÉ DU CAOUTCHOUC AVEC LA TEMPÉRATURE.

En appelant p la pression supportée par l'unité de surface d'un corps, v son volume et t sa température, on a la relation :

$$f(p, v, t) = 0$$

L'étude de cette fonction montre que le coefficient d'élasticité d'un corps est intimement lié à son coefficient de dilata-

tion sous pression constant e . Il en résulte que toute variation de ce dernier devra entraîner une variation correspondante du premier. Or, les expériences de M. Joule, dont je viens de rappeler les résultats, montrent que, pour le caoutchouc, le coefficient de dilatation est positif, nul, ou négatif, suivant la charge par laquelle on le tend ; il doit en résulter pour le coefficient d'élasticité des variations corrélatives, lorsqu'on le mesure à des températures et sous des charges différentes.

Les auteurs qui, jusqu'à ce jour, se sont occupés de cette question, n'ont pas cherché à déterminer théoriquement le sens suivant lequel devait varier le coefficient d'élasticité, dans les diverses circonstances que je viens d'indiquer.

Schmulewitsch (*) a récemment repris les expériences de M. Joule, à l'occasion de ses recherches sur les fibres musculaires, qui se contractent comme le caoutchouc sous l'influence de la chaleur. Pour expliquer cette contraction, dont j'ai montré théoriquement la possibilité dans les pages précédentes, M. Schmulewitsch suppose qu'une élévation de température produit sur ces corps deux effets distincts : un allongement, comme sur toutes les autres substances étudiées déjà, et une augmentation du coefficient d'élasticité, assez grande pour que l'effet résultant soit une contraction. Ces deux hypothèses sont entièrement gratuites et si l'auteur s'est proposé, en les émettant, de faire disparaître une exception à une loi regardée jusqu'alors comme absolument générale, il n'a fait, en définitive, que la remplacer par une autre, le coefficient d'élasticité des divers corps diminuant, en effet, quand la température s'élève. On ne doit pas d'ailleurs faire deux hypothèses, indépendantes l'une de l'autre, sur deux quantités, coefficient de dilatation et coefficient d'élasticité, liées entre elles de telle sorte, que toute va-

(*) Pogg, Ann. CXLIV.

riation de la première entraîne une variation correspondante de la seconde. Dans tous les cas l'explication proposée par M. Schmulewitsch devait, pour être acceptée, recevoir une confirmation expérimentale.

C'est le but que s'est proposé M. Exner (*); les résultats qu'il a obtenus indiquent une diminution continue du coefficient d'élasticité quand la température augmente, quelle que soit d'ailleurs la charge qu'il supporte pendant qu'il est soumis à l'expérience. L'hypothèse de M. Schmulewitsch ne saurait donc être acceptée; toutefois la méthode employée par M. Exner n'est pas d'une sensibilité suffisante, comme je le montrerai plus loin. De nouvelles recherches étaient donc nécessaires. Je vais exposer celles que j'ai entreprises.

Je montrerai d'abord comment on peut déterminer, *à priori*, le sens des variations du coefficient d'élasticité avec la température; pour cela, je m'appuierai sur des considérations dues à M. Potier (**), j'indiquerai ensuite comment j'ai vérifié par l'expérience, les résultats fournis par la théorie.

Soit l la longueur d'une barre de substance quelconque, t sa température, p le poids qui la tend; ces trois quantités, l , t , p , dépendent les uns des autres et l'on peut écrire

$$(1) \quad l = f(t, p)$$

Si l'on suppose le poids p constant et qu'on fasse croître la température de dt , il en résultera pour l un accroissement donné par la formule.

$$\delta l = \alpha dt$$

où α représente le coefficient de dilatation linéaire sous pression constante.

(*) Wien, Akad. 1874.

(**) Potier, *Journal de physique*, t. II, p. 328.

Si, au contraire, on suppose la température t constante et que l'on donne à p un accroissement dp , la longueur l prendra un allongement donné par la formule :

$$\delta_1 l = \beta dp$$

où β représente l'inverse du coefficient d'élasticité à température constante.

Enfin si, en même temps que la température augmente de dt , on fait augmenter la charge de dp , l'accroissement de longueur dl qui en résultera sera, aux infiniment petits du deuxième ordre près, égal à la somme des deux allongements précédents et on pourra écrire :

$$(2) \quad dl = \alpha dt + \beta dp$$

Mais dl est une différentielle exacte ; on a donc la relation :

$$(3) \quad \frac{d\alpha}{dp} = \frac{d\beta}{dt}$$

$$\text{d'où} \quad (4) \quad d\alpha = \frac{d\beta}{dt} dp$$

Soit C le coefficient d'élasticité de la substance soumise à l'expérience ; on aura :

$$\beta = \frac{1}{C}$$

et $d\beta = -\frac{1}{C^2} dC$

Remplaçant $d\beta$ par sa valeur dans la formule (4) on obtient la relation :

$$(5) \quad d\alpha = -\frac{1}{C^2} \frac{dC}{dt} dp$$

Les expériences de M. Joule ont montré que si on fait successivement croître la charge qui tend une bande de ca-

outchouc, une augmentation de température produit une dilatation lorsque le poids tenseur est faible, ne produit aucun changement de longueur lorsque la charge atteint une valeur déterminée et enfin produit une contraction lorsque la charge est assez forte. Il en résulte que, pour des charges croissantes, le coefficient de la dilatation linéaire du caoutchouc est positif d'abord, puis nul, et finalement négatif; il va donc en diminuant à mesure que la charge augmente, c'est-à-dire que la quantité $d\alpha$ qui entre dans les équations précédentes est toujours négative, tandis que α est positif, nul, puis négatif.

Si α est positif, c'est-à-dire si nous supposons le caoutchouc tendu par des charges faibles, il suffira pour avoir la formule relative à ce cas de changer $d\alpha$ en $-d\alpha$ dans l'équation (5), ce qui donnera, en changeant tous les signes :

$$d\alpha = \frac{1}{C^2} \frac{dC}{dt} dp$$

Il résulte de là que dC est positif, c'est-à-dire que le coefficient d'élasticité C augmente quand la température s'élève.

Si α est négatif, c'est-à-dire si nous supposons le caoutchouc tendu par des charges assez fortes, pour avoir la formule relative à ce deuxième cas, il faudra reprendre le calcul précédent en remplaçant α par $-\alpha$ et $d\alpha$ par $-d\alpha$; on arrive ainsi à l'équation :

$$d\alpha = - \frac{1}{C^2} \frac{dC}{dt} dp$$

qui montre que dC doit être négatif; donc pour des charges assez fortes le coefficient d'élasticité C diminue quand la température s'élève.

Enfin, si α est nul, $d\alpha$ sera nul, dC sera nul également, c'est-à-dire que, si l'on suppose le caoutchouc tendu par la

charge qui correspond à $\alpha = 0$, le coefficient d'élasticité conserve la même valeur quelle que soit la température.

On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant :

CHARGES.	α	$d\alpha$	dC	C
F faibles.	+	—	+	Augmente.
Moyennes.	0	0	0	Reste constant
F fortes.	—	—	—	Diminue.

Voyons si l'expérience confirme ces résultats de la théorie.

M. Exner, qui s'est le premier occupé de cette vérification, à employé la méthode suivante. Une bande de caoutchouc c est tendue et fixée par un fil à deux ressorts, a et b , qui sont alors en contact avec deux pièces métalliques f et e . Lorsqu'on produit la rupture du fil tenseur en a , les deux ressorts s'éloignent des deux pièces métalliques et l'un d'eux vient s'appuyer alors sur une 3^e pièce d . L'expérience exige en outre un chronoscope très-sensible C et deux piles A et B. Les pôles de ces piles sont mis en communication avec le chronoscope par des fils conducteurs tracés sur la figure. Au commencement de l'opération, lorsque le caoutchouc est tendu, le courant A $g h a f A$ passe dans le chronoscope et l'arrête ; la pile B donne en même temps le courant B $b e B$ qui ne passe pas dans le compteur. Lorsque le fil tenseur est rompu en a , le ressort a abandonne la pièce f pour venir s'appuyer contre d , le courant partant de A est par cela même interrompu et le chronoscope se met en mouvement, car la pile B ne peut envoyer dans cet instrument, pour l'arrêter, que le courant dérivé B $b m d a h g B$, lequel à cause de la résistance du circuit qu'il traverse est trop faible pour produire aucun effet. Le chronoscope marche donc à partir du moment où le caoutchouc cesse d'être tendu. L'onde de

contraction qui prend naissance dans ce corps se propage vers *b*, et, lorsqu'elle y arrive, le ressort *b* abandonne la pièce métallique ; l'interruption des communications métalliques en *e* fait que la pile B ne donne plus naissance qu'à un seul courant B *b m d a h g* B, lequel possède alors une intensité suffisante pour arrêter le chronoscope. Ce dernier instrument n'a donc marché que pendant le temps qu'il a fallu à l'onde de contraction, provoquée par la rupture du fil tenseur, pour se propager le long de la bande de caoutchouc, et on a ainsi immédiatement la vitesse de propagation de cette onde.

Dans une deuxième série de mesures, M. Exner opère d'une manière un peu différente ; il mesure la vitesse de propagation, dans la bande de caoutchouc, d'un ébranlement causé par un choc produit à une extrémité de la bande ; une petite boule métallique suspendue par un fil vient s'appuyer contre l'autre extrémité, et est projetée en avant lorsque l'ébranlement moléculaire s'est propagé jusqu'à elle. Une disposition, analogue à celle que je viens de décrire, ne permettait au chronoscope de marcher que pendant le temps nécessaire à l'ébranlement pour se propager d'une extrémité à l'autre de la bande soumise à l'expérience.

En opérant ainsi, M. Exner a toujours trouvé que la vitesse de propagation diminuait quand la température augmentait, et comme cette vitesse est proportionnelle à la racine carrée de l'élasticité, il en a conclu que le coefficient d'élasticité diminue dans les mêmes circonstances, quelle que soit la charge qui le tend. Mais les variations qu'il s'agit de mettre ici en évidence sont très-petites et l'on comprend que l'inertie seule des ressorts employés ait suffi à masquer les petites augmentations de vitesse que l'on devait constater en opérant sous de faibles tensions. En effet dans ces circonstances, les ressorts, moins tendus, devaient revenir plus lentement à leur

position de repos et si, d'un côté, l'augmentation de vitesse devait faire trouver un temps plus court, la paresse de ces ressorts à se détendre agissait pour donner un résultat contraire. Le même inconvénient n'existait pas pour des charges plus fortes qui donnent une diminution dans la vitesse de propagation lorsqu'on opère à des températures croissantes.

La méthode que j'ai employée est plus simple et plus exacte. En effet j'ai mesuré directement le coefficient d'élasticité même, tandis que la vitesse de propagation mesurée par M. Exner n'est proportionnelle qu'à la racine carrée de ce coefficient.

Soit L la longueur d'une barre de substance quelconque et p le poids qui la tend ; on aura :

$$L = f(p)$$

Supposons connue cette relation et construisons la courbe qu'elle représente. Cette courbe se réduit sensiblement à une ligne droite pour certains corps, les métaux, par exemple, qui ne sont pas susceptibles de prendre un allongement considérable. Mais il n'en est pas de même pour le caoutchouc : dans ce cas en effet, ainsi que nous le verrons bientôt, la courbe de l'équation

$$L = f(p)$$

ne se confond nullement avec une ligne droite et présente un point d'inflexion.

Si nous prenons pour abscisses les poids tenseurs et pour ordonnées les longueurs, la dérivée :

$$\frac{dL}{dp} = f'(p)$$

représentera le coefficient angulaire de la tangente en un point de la courbe. Supposons que la longueur primitive

de la barre soit l'unité; la dérivée précédente représente alors ce que M. Monoyer appelle le *coefficient d'allongement élastique*, c'est à-dire l'allongement que prend la barre pour un excès de charge égal à l'unité. La considération de ce coefficient, au lieu et place du coefficient d'élasticité offre cet avantage, que son introduction dans les formules d'élasticité les rend complètement analogues, quant à la forme, aux formules de dilatation (*). D'ailleurs ce coefficient d'allongement n'est autre chose que l'inverse du coefficient d'élasticité, lequel sera donc :

$$\frac{dp}{dL}$$

Cette expression représente bien en effet l'augmentation de poids qui produirait un allongement égal à l'unité, c'est-à-dire qui doublerait la longueur de la barre, puisque nous avons supposé opérer sur une barre de longueur primitive égale à 1. (**).

Il résulte de ce qui précède que le coefficient d'élasticité étant l'inverse du coefficient d'allongement, ce dernier devra diminuer pour de faibles charges lorsque la température s'élève, et augmenter ensuite, dans les mêmes circonstances,

(*) Monoyer. *Physique médicale*, p 73.

(**) Je ferai remarquer ici, une fois pour toutes, que le coefficient d'élasticité dont je parle n'est pas rapporté à l'unité de section.

J'entends par coefficient d'élasticité les valeurs successives du rapport

$$\frac{dp}{dL}$$

à mesure que la bande de caoutchouc s'allonge et non les valeurs de ce rapport corrigées et ramenées à une section égale à 1.

Les bandes employées dans mes expériences avaient une épaisseur comprise entre 0^{mm},04 et 1^{mm},36; la variation de la section ne devait souvent être que de quelques centièmes de millimètres et il ne m'a pas paru possible de déterminer cette variation avec une exactitude qui permit de baser des corrections sur les résultats que j'aurais obtenus.

pour des charges plus fortes. Or il est facile de mesurer très-exactement, sinon le coefficient d'allongement en chaque point de la courbe, du moins le coefficient moyen d'allongement entre deux points voisins, c'est-à-dire entre deux charges peu différentes. Il suffira pour cela de mesurer au cathétomètre les longueurs L et L' de la barre qui correspondent aux charges p et p' ; le rapport

$$\frac{L' - L}{p' - p}$$

sera le coefficient moyen d'allongement entre les charges p et p' .

Voici comment j'ai procédé à ces mesures. Les bandes de caoutchouc soumises à l'expérience avaient une largeur de 7 millimètres; l'épaisseur moyenne était pour les unes de 0^{mm},220, pour les autres de 0^{mm},650. Le moyen que j'ai toujours employé pour obtenir des bandes d'une largeur uniforme, moyen très simple qui donne de très-bons résultats, consiste à tracer, sur le bord d'une feuille de papier un peu fort, deux traits au crayon ayant entre eux une distance égale à la largeur que l'on veut donner à la bande de caoutchouc. On replie cette feuille par le milieu et on place entre les deux feuillets la lame de caoutchouc dans laquelle on veut tailler un bande. On tient le tout entre les doigts et on coupe, avec des ciseaux, en suivant exactement les traits tracés au crayon.

La bande une fois découpée, on introduit ses deux extrémités entre deux pinces métalliques munies chacune d'un crochet. On fait alors, à une certaine distance de chaque pince, une marque déliée à la craie ou à l'encre, et c'est la distance comprise entre ces deux points dont on mesurera les allongements successifs. On est obligé d'opérer ainsi à cause de la variation de largeur que présentent les lames

dans le voisinage des pinces. Au crochet de la pince inférieure on suspend un plateau dont le poids doit être tel que, ajouté à celui de la pince, il soit suffisant pour tendre le caoutchouc; puis on suspend le tout, par le crochet supérieur, dans une cuve de Regnault destinée à la mesure des tensions maxima de la vapeur d'eau pour des températures inférieures à 50°; la cuve était préalablement remplie d'eau.

Les choses ainsi disposées, il ne reste plus qu'à ajouter successivement dans le plateau, sans produire de secousses, des poids égaux et à viser avec un cathétomètre, à travers la glace de l'appareil, après chaque addition de charge, les points marqués en haut et en bas de la bande de caoutchouc.

Mais pour faire ces visées, il y a une précaution à prendre. Lorsqu'on ajoute un nouveau poids tenseur, l'allongement du caoutchouc se produit, d'une manière sensible, pendant un temps qui varie avec la charge totale du plateau. Si donc la lecture au cathétomètre est faite trop rapidement, on aura noté une longueur trop faible; mais si, d'un autre côté, on laisse s'écouler un temps trop long, l'allongement qui a continué à se produire n'est plus en quelque sorte un allongement normal (*); il ne s'est produit que par suite d'un déchirement de la substance du caoutchouc et la lame ne revient plus à sa longueur primitive lorsque on enlève l'augmentation de charge précédemment ajoutée. Dans ces conditions on obtient une longueur trop grande, et la courbe que j'ai représentée par l'équation

$$L = f(p)$$

offre alors des irrégularités assez marquées.

J'ai obtenu des courbes très-régulières en opérant de la manière suivante. Lorsqu'un nouveau poids a été ajouté sur

(*) C'est l'allongement consécutif des Allemands. (Elastische Nachwirkung.)

le plateau, je vise au cathétomètre le plus bas des deux points marqués sur la lame de caoutchouc, celui dont le déplacement est le plus considérable par suite de l'allongement, et je regarde l'allongement normal comme entierement et seul produit, lorsque pendant les 10 ou 15 secondes nécessaires pour faire la lecture sur l'échelle du cathétomètre et pour inscrire les divisions lues, le point visé ne s'est pas sensiblement déplacé dans le champ de la lunette de l'instrument.

Malgré ces précautions, lorsqu'on soumet deux fois de suite, même à des intervalles de plusieurs heures, la même bande à la même série de mesures, on constate toujours que lors de la deuxième observation les allongements sont plus considérables que lors de la première, et cela, bien entendu, pour les mêmes accroissements de charge. J'aurai besoin de cette remarque pour interpréter les résultats de l'expérience.

Dans les tableaux suivants qui contiennent ces résultats, je n'ai pas inscrit les longueurs réelles de la distance qui sépare les deux points marqués sur la bande de caoutchouc; j'ai inscrit les longueurs successives qu'on aurait observées, si la distance primitive des deux points visés eût été de 10 centimètres. Ces nombres ont été calculés au moyen de ceux que donne directement l'expérience, en supposant que l'allongement, pour une même charge, soit proportionnel à la longueur. Cette loi est évidente *à priori* si la substance à laquelle on l'applique est homogène; des mesures faites au cathétomètre, et que j'indiquerai plus loin, montrent qu'elle est sensiblement vérifiée pour le caoutchouc.

Les deux premiers tableaux sont relatifs à une lame dont l'épaisseur était en millimètres de 0,220; la 1^{re} colonne contient les poids tenseurs; dans la 2^e et la 4^e colonnes se trouvent les longueurs successives d'une longueur primitive de 10 centi-

mètres, pour des températures assez différentes entre elles, indiquées d'ailleurs en tête de ces colonnes ; les nombres inscrits dans la troisième et la cinquième colonnes représentent les allongements produits par les accroissements de charge.

On peut prendre ces nombres comme mesure du coefficient moyen d'allongement entre les poids successivement ajoutés, puisque ce coefficient est donné par la formule

$$\frac{L' - L}{p' - p}$$

et que la différence $p' - p$ étant constante, il est proportionnel à la différence $L' - L$.

Tableau I.

POIDS TENSEUR en grammes	1 ^{re} OBSERV. LONGUEURS en millimètres $t = 22^{\circ}$	Allongements	2 ^e OBSERV. LONGUEURS en millimètres $t = 70^{\circ}$	Allongements
0	10	1.05	10 »	0.29
20	11.05	1.38	10.29	1.33
40	12.43	1.72	11.62	1.61
60	14.15	2.20	13.23	1.97
80	16.35	2.42	15.20	2.21
100	18.77	2.37	17.41	2.21
120	21.14	2.25	19.62	2.28
140	23.39		21.90	

Tableau II.

POIDS TENSEURS en grammes	1 ^{re} OBSERV.	Allongements	2 ^{re} OBSERV.	Allongements
	LONGUEURS en millimètres $t = 22^\circ$		LONGUEURS en millimètres $t = 70^\circ$	
0	10 »		10 »	
20	10.79	0.79	10.68	0.68
40	11.96	1.17	11.84	1.16
60	13.37	1.41	13.17	1.33
80	14.98	1.61	15.09	1.92
100	17.03	2.05	17.16	2.07
120	19.34	2.31	19.70	2.54
140	21.38	2.04	21.80	2.10

Ces deux tableaux montrent clairement que le coefficient d'allongement commence par diminuer, pour de faibles charges, lorsque la température augmente, puisque les nombres inscrits dans les cinquièmes colonnes et correspondants aux températures 70° et 64° , sont plus petits que ceux inscrits dans les troisièmes et correspondants aux températures 22° et 23° . Quelquefois, il est vrai, la différence est assez faible et pourrait, au premier abord, ne pas être facilement acceptée comme une confirmation de la théorie; mais, j'ai déjà dit que, lorsqu'on fait deux séries de mesures dans les mêmes conditions de température, sur la même bande, les longueurs observées la seconde fois, sont toujours plus grandes que celles que donne la première expérience. Il en résulte que, lors même que les nombres inscrits dans les cinquièmes colonnes seraient égaux à ceux inscrits dans les troisièmes, ce fait devrait être regardé comme une confirmation expérimentale des résultats théoriques.

A plus forte raison en sera-t-il ainsi, si les nombres des cinquièmes colonnes sont inférieurs à ceux des troisièmes.

Il est à remarquer aussi que les nombres de la première colonne de chaque tableau représentent les poids placés sur le plateau en négligeant la poussée de l'eau, laquelle est plus forte à 22 et 23 degrés qu'à 70 et 64 degrés. La différence des poussées dans les deux cas est très-faible, mais si on voulait en tenir compte, elle ne ferait qu'accentuer les différences existant entre les nombres qui mesurent proportionnellement les coefficients d'allongement.

Le sens de la variation du coefficient d'élasticité avec la température, pour de faibles charges, est donc mis hors de doute. Il reste à voir ce que donne l'expérience pour des charges plus fortes.

Les nombres inscrits dans les tableaux précédents montrent qu'à partir d'une charge voisine de 80 grammes, le coefficient d'allongement correspondant à la température la plus élevée est plus fort que celui qui correspond à la température la plus basse.

Toutefois ce résultat ne serait pas ainsi assez sûrement établi, puisqu'on pourrait le regarder comme dû, non pas à l'action de la température, mais à ce fait que l'expérience relative à la température de 70° a été faite après l'expérience relative à la température de 22°.

Pour supprimer cette objection, qui n'existait pas dans la recherche du résultat précédent, j'ai fait 3 séries de mesures : une première à la température ordinaire, une deuxième à une température élevée et une troisième à la température ordinaire, en laissant toujours s'écouler entre chaque expérience, le même intervalle de temps, plusieurs heures. J'ai comparé alors les nombres de la deuxième observation à la moyenne arithmétique de ceux de la première et de la troisième.

Les résultats obtenus ainsi pour deux bandes d'une épaisseur de 0^{mm},22 sont inscrits dans les deux tableaux suivants.

Tableau III.

POIDS tenseurs en grammes	1 ^{re} OBS. longueurs en m/m $t = 19^{\circ}$	3 ^e OBS. longueurs en m/m $t = 19^{\circ}$	Moyennes	Allonge- ments	2 ^e OBS. longueurs en m/m $t = 68$	Allonge- ments
50	10 »	10 »	10 »		10 »	
70	11.35	12.41	11.73	1.73	11.28	1.28
90	13.00	13.36	13.18	1.45	12.92	1.64
110	14.73	15.21	14.97	1.79	14.73	1.81
130	15.96	17.13	16.54	1.57	17.36	2.64
280	28.32	29.75	29.03	12.49	29.96	12.60

Tableau IV.

POIDS tenseurs en grammes	1 ^{re} OBS. longueurs $t = 20^{\circ}$ en m/m	3 ^e OBS. longueurs en m/m $t = 20^{\circ}$	Moyennes	Allonge- ments	2 ^e OBS. longueurs en m/m $t = 66^{\circ}$	Allonge- ments
90	10 »	10 »	10 »		10 »	
110	11.08	11.34	11.21	1.21	11.49	1.49
130	12.73	12.89	12.81	1.60	13.20	1.72
150	14.15	14.42	14.28	1.47	15.03	1.93
170	15.61	15.97	15.79	1.51	16.90	1.87
190	17.02	17.68	17.35	1.56	18.59	1.69
210	18.56	19.51	19.03	1.68	20.20	1.61
230	20.02	21.13	20.57	1.49	21.72	1.52
280	22.23	23.14	22.68	2.16	24.98	3.26

Les résultats relatifs aux faibles charges ayant été vérifiés par les expériences précédentes, je n'ai effectué alors les mesures qu'à partir de la charge pour laquelle, d'après les résultats des deux premiers tableaux, le coefficient d'allongement paraissait devoir croître avec la température. Le tableau III constate d'abord une diminution de ce coefficient ; cela tient à ce que l'expérience relative à ce tableau a commencé par une charge de 50 grammes, et ce n'est guère qu'à partir de 80 grammes que le coefficient d'allongement commence à augmenter. La comparaison des deux colonnes 5 et 7 de chacun des deux tableaux précédents, confirme pleinement les résultats théoriques relatifs à des charges assez fortes.

Les tableaux V et VI, qui suivent, contiennent les résultats relatifs à deux lames d'une épaisseur de 0^{mm},650. Comme les variations des quantités à mesurer sont ici plus considérables à cause de l'épaisseur plus grande du caoutchouc employé, pour constater l'augmentation du coefficient d'allongement avec la température, sous des charges assez fortes, je n'ai pas eu besoin de faire trois observations, comme précédemment ; il m'a suffi d'effectuer, les premières, les mesures relatives à la température la plus élevée et de montrer que les allongements obtenus ainsi sont plus grands que ceux qu'éprouve la même bande, pour les mêmes charges, à une température plus basse, dans une deuxième observation.

Tableau V.

POIDS tenseurs en grammes	1 ^{re} OBSERV. longueurs en m/m $t = 16^{\circ}$	Allongements	2 ^e OBSERV. longueurs $t = 70^{\circ}$	Allongements
100	10 »		10 »	
120	10.83	0.83	10.66	0.66
140	11.83	1.00	11.52	0.86
160	13.05	1.22	12.55	1.03
180	14.45	1.40	13.67	1.12
200	15.88	1.43	15.00	1.33
220	17.40	1.52	16.30	1.30
240	19.05	1.65	17.82	1.52
260	20.68	1.63	19.38	1.56
280	22.32	1.44	20.88	1.50

Tableau VI.

POIDS tenseurs en grammes	1 ^{re} OBSERV. longueurs en mm. $t = 70^{\circ}$	Allongements	2 ^e OBSERV. longueurs en mm. $t = 49^{\circ}$	Allongements
200	10 »		10 »	
220	10.99	0.99	10.98	0.98
240	12.03	1.04	12.00	1.02
260	12.95	0.92	12.96	0.96
280	14.08	1.13	13.98	0.92
300	15.20	1.12	14.82	0.84
320	16.32	1.12	15.88	1.06
340	17.20	0.88	16.53	0.65

De cet accord complet entre les résultats auxquels conduit la théorie et ceux que fournit l'expérience, on est en droit de tirer les conclusions suivantes :

1°. — Le coefficient d'élasticité du caoutchouc augmente quand la température s'élève, tant que la traction que l'on exerce sur lui est assez faible pour déterminer dans ce corps un dégagement de chaleur.

2°. — Le coefficient d'élasticité du caoutchouc diminue quand la température augmente, lorsque la charge plus forte qui le tend, est de celles qui, par leur effet, déterminent dans ce corps un abaissement de température.

3°. — Il existe par suite une charge telle que, sous l'effet de cette traction, le coefficient d'élasticité du caoutchouc est indépendant des variations de température.

COMPOSANTE NORMALE

D'UNE ENVELOPPE ÉLASTIQUE TENDUE

I

EXPRESSION THÉORIQUE DE LA COMPOSANTE NORMALE

Les phénomènes présentés par le caoutchouc et dont je vais m'occuper dans ce chapitre s'expliquent facilement et rigoureusement au moyen de la formule de la tension superficielle des liquides.

On sait que la théorie capillaire établie par Laplace, Gauss, Plateau, etc., est abandonnée depuis un certain nombre d'années par presque tous les physiciens et remplacée par une théorie qui a, au moins, le mérite indiscutable d'être incomparablement plus simple.

Dans cette théorie nouvelle, on regarde la surface libre d'un liquide comme enveloppée d'une couche contractile de faible épaisseur toujours tendue et jouissant de la propriété de se reformer lorsqu'elle a été brisée. M. Duclaux, pour donner une idée nette de cette couche contractile, l'a comparée à une mince membrane de caoutchouc qui recouvrirait la surface libre du liquide.

En admettant qu'il en soit ainsi, supposons que l'on mène un plan sécant normal à la surface du liquide. De part et d'autre de ce plan existeront deux forces égales entre elles,

normales au plan sécant, et qui tendront à maintenir réunies les deux parties de la couche contractile que nous venons de séparer. Si l'on évalue ces forces en milligrammes et pour une longueur de 1 millimètre de la section, on aura ce qu'on appelle la *tension superficielle* du liquide considéré.

Bien des expériences ont été imaginées pour mettre hors de doute l'existence de cette tension et pour arriver à sa mesure. Mais ce qui était au moins aussi important, c'était de faire comprendre comment pouvait naître, d'où provenait cette tension que l'on suppose exister dans la couche superficielle des liquides.

Plusieurs explications ont été données. Lamarle a voulu déduire l'existence de la tension superficielle de la théorie de Laplace; mais, comme le fait remarquer M. Duclaux, il a le tort d'invoquer en quelque sorte les causes finales, et ses considérations sont trop vagues pour pouvoir être acceptées. M. Plateau a proposé une autre explication, plus inadmissible encore, puisque M. Dupré a montré qu'elle conduirait au mouvement perpétuel. Enfin ce dernier savant a publié une théorie très-simple et à laquelle aucune objection capitale ne paraît pouvoir être faite (*).

Si on considère un cube infiniment petit dans l'intérieur d'un liquide, et qu'on le prenne pour centre d'une sphère d'un rayon égal au rayon r de la sphère d'attraction, tant que le cube sera situé à une distance de la surface plus grande que r , toutes ses faces seront tirées par des forces égales. Au contraire, à partir du moment où la distance du centre du cube à la surface est plus petite que r , la traction sur la face supérieure va en diminuant; les tractions sur les faces latérales diminuent aussi, mais moins rapidement, puisqu'elles deviennent moitié moindres seule-

(*) Dupré. *Théorie mécanique de la chaleur*, p. 210, et Duclaux, *Annales de physique et de chimie*, 4^{me} série, t. XXI, p. 407.

ment lorsque la face supérieure affleure et que la traction correspondante est nulle ; enfin la traction sur la face inférieure reste invariable. Il y a donc, dans toute l'épaisseur de la couche liquide située entre la surface et une distance égale à r , excès de traction latérale sur la traction de bas en haut, et c'est cet excès qui, d'après M. Dupré, produit la tension superficielle.

Lorsque la surface du liquide est plane, cette tension superficielle ne produit aucune composante normale, mais il n'en est plus de même dans le cas où la surface prend une courbure quelconque. M. Dupré a calculé la valeur de cette force normale qui existe alors à la surface libre du liquide ; M. Duclaux a donné une forme plus rigoureuse à cette démonstration (*), et comme elle s'applique sans le moindre changement, on le comprend d'avance, à une membrane de caoutchouc tendue par l'effet de la pression d'une masse fluide intérieure, je crois utile de la reproduire ici.

Considérons donc une surface liquide courbe : « Autour d'un point o de cette surface supposons tracée une courbe fermée quelconque. Sur chaque unité de longueur de ce contour s'exerce, comme nous l'avons vu, une force F tangente à la surface et normale à l'élément de courbe. Toutes ces forces F ont dès lors des composantes parallèles à la normale en o , dont l'ensemble donne une pression normale exercée sur l'élément de surface limité par le contour. Si autour du point o nous traçons alors une série décroissante de courbes semblables à la première, le rapport de la pression normale, dans chaque cas, à la surface correspondante tendra vers une limite qui sera la pression en o .

Cherchons à calculer cette limite. Pour cela, supposons fixé en o un très-petit fil de longueur s que nous promenons sur la surface. Son extrémité libre décrira une courbe dont

(*) Duclaux. — *Annales de Phys. et de Chim.* 1870

l'aire λ sera, ainsi que l'a montré M. Bertrand, et en appelant R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux au point o

$$\lambda = \pi s^2 - \frac{\pi s^4}{12 R_1 R_2}$$

Soit $d\sigma$ un élément de cette courbe et R le rayon de courbure d'une section normale perpendiculaire à cet élément, section normale qui, ayant un contact de second ordre avec la ligne géodésique correspondante, a même rayon de courbure R . Si ω est l'angle de cette section normale avec la section principale, on sait que l'on a

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \sin^2 \omega + \frac{1}{R_2} \cos^2 \omega$$

Sur cet élément $d\sigma$ est appliquée une force $F d\sigma$ dont la composante normale est

$$F \sin \omega d\sigma = F s \left(\frac{1}{R_1} \sin^2 \omega + \frac{1}{R_2} \cos^2 \omega \right) d\omega$$

La résultante définitive sera donc

$$P = F s^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{R_1} \sin^2 \omega + \frac{1}{R_2} \cos^2 \omega \right) d\omega = \pi F s^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

et comme la surface est, à un infiniment petit du quatrième ordre près, égale à πs^2 , on voit qu'on a pour pression normale en o l'expression

$$N = F \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Dans le cas d'une sphère de rayon R , la pression normale est la même en tous les points et égale à $\frac{2F}{R}$.

Nul doute, comme je l'ai dit plus haut, que cette démon-

tration ne s'applique absolument à une membrane solide et élastique, telle que celles qui forment les ballons en caoutchouc. On peut même voir là une raison de plus, après tant d'autres, pour admettre l'existence de la couche contractile à la surface libre des liquides et, par suite, pour regarder comme exacte la théorie capillaire fondée sur la tension superficielle.

Dans le cas des liquides, il suffira de supposer que la force F de la formule précédente est constante, tandis que, dans le cas des solides, F variera suivant une loi à déterminer. Il existe d'ailleurs des corps intermédiaires entre les solides et les liquides proprement dits, des liquides visqueux, que M. Gernez (*) a employés à reproduire certaines expériences de M. Van der Mensbrugge, de M. Dupré, de Plateau. Ces substances sont douées d'une élasticité qu'il est impossible de révoquer en doute et les expériences qu'elles permettent de réaliser s'expliquent toutes par la tension superficielle.

Rien ne paraît donc manquer pour la justification de la nouvelle théorie. On a vu comment une couche contractile prend naissance à la surface des liquides ; la considération de cette couche permet de rendre compte des différences considérables que présentent les résultats numériques obtenus par les divers physiciens qui se sont occupés de la vérification des lois de la capillarité ; en effet, ainsi que le fait remarquer M. Duclaux, la couche active, celle sur laquelle devaient surtout porter les précautions à prendre, voyait son rôle généralement méconnu ; la même formule explique les divers phénomènes présentés par les solides et par les liquides ; il suffit pour cela d'introduire dans cette formule les conditions de cohésion dans lesquelles se trouvent les molécules de ces corps ; il existe, entre ceux qui sont placés

(*) Gernez. *Journal de Physique*, t. I, p. 324.

aux deux extrémités de la série, des corps intermédiaires, liquides visqueux, auxquels on ne peut refuser une couche contractile et si la tension superficielle n'existait pas dans toute l'étendue de l'échelle, il serait difficile de préciser le point à partir duquel on n'est plus en droit de la faire intervenir dans l'explication des phénomènes.

Nous devons donc considérer la tension superficielle autrement que comme une simple interprétation de la théorie de Gauss, ainsi que le voudrait M. Moutier (*), il faut y voir une vérité simple dans sa conception, générale et féconde dans ses applications.

II

VÉRIFICATION DE LA FORMULE POUR LES MEMBRANES SOLIDES ET ÉLASTIQUES

A. — *Phénomènes présentés par les ballons de caoutchouc*

Aucune objection ne paraît pouvoir être faite à la démonstration de la formule

$$(1) \quad N = F \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

relativement aux membranes élastiques. On peut dire que s'il y a des doutes à concevoir, c'est seulement sur son application aux liquides qu'ils peuvent être opposés. L'expérience, pour ces derniers corps, ne sera d'abord qu'un appui donné à la théorie; pour les membranes solides au contraire,

(*) Moutier, *Journal de Physique*, t. I, p. 98.

l'expérience pourrait être regardée immédiatement comme fournissant une application d'un principe déjà suffisamment justifié.

Quoi qu'il en soit, je vais montrer que la formule (4) rend exactement compte des phénomènes présentés par les ballons de caoutchouc.

Il est facile d'observer expérimentalement la variation de la pression normale dans un tel ballon. Il suffit pour cela de le mettre en communication par l'intermédiaire d'un tube de verre avec un flacon à trois tubulures contenant de l'eau jusqu'à une certaine hauteur. L'ouverture du milieu est fermée à l'aide d'un bouchon traversé par un tube droit suffisamment long et servant de manomètre. La troisième ouverture communique avec une poire en caoutchouc munie de soupapes et destinée à injecter de l'air ; j'ai utilisé dans ce but un appareil à anesthésie locale de Richardson.

En introduisant successivement, à l'aide de cet appareil, de nouvelles quantités d'air dans le ballon et en mesurant la hauteur du liquide dans le tube manométrique, on constate que l'excès de la pression intérieure sur la pression atmosphérique, excès égal à la composante normale développée par l'élasticité du caoutchouc, va d'abord en augmentant jusqu'à une valeur moyenne de 50 centimètres d'eau pour les ballons que l'on trouve dans le commerce. Après avoir atteint cette valeur maximum, la pression reste sensiblement constante pendant que le volume du ballon continue à croître de plus en plus ; mais quand ce volume a pris un développement considérable, la pression se met à décroître d'une manière continue jusqu'au moment où le ballon trop tendu finit par éclater.

Le fait de la constance de la pression intérieure pendant que le volume du ballon devient double et même triple semble au premier abord en contradiction absolue avec les

résultats auxquels on devait s'attendre. On aurait tort de croire qu'une méthode de mesure, plus sensible que celle que fournit le manomètre à eau, donnerait, pour les valeurs de la pression des nombres qui, tout en différant très-peu les uns des autres, croîtraient néanmoins avec le volume du ballon. On verra bientôt que l'étude de l'élasticité d'une bande de caoutchouc conduit à des lois qui, introduites dans la formule

$$N = \frac{2 F}{R}$$

rendent parfaitement compte des diverses valeurs accusées par l'expérience, et montrent que la tension normale peut être rigoureusement constante, le fait n'étant d'ailleurs pas plus extraordinaire que celui de l'augmentation ou de la diminution de la dite quantité.

En effet la valeur de N a pour mesure le rapport $\frac{F}{R}$;

F est la réaction élastique du caoutchouc, c'est-à-dire le poids tenseur qui donnerait à une bande de longueur égale à la circonférence L d'un grand cercle du ballon la tension qu'elle possède dans l'expérience; R est le rayon du ballon que nous supposons sphérique; ce rayon étant égal au quotient de la longueur L par 2π , on peut écrire

$$N = 4\pi \frac{F}{L}$$

Si donc le rapport $\frac{F}{L}$ va en augmentant, la tension intérieure N croîtra aussi; s'il va en diminuant, la tension N diminuera et enfin si le rapport est constant, la pression accusée par le manomètre restera invariable, bien que le volume du ballon augmente. Par conséquent ce curieux phénomène sera parfaitement expliqué si, pour un certain état de tension du caoutchouc, la longueur de la bande sou-

mise à l'expérience est proportionnelle au poids tenseur, contrairement à ce qui a lieu pour les autres corps.

De là il résulte que les variations relatives de L et de F devront être en rapport avec celles de N que nous connaissons déjà; que le rapport $\frac{F}{L}$ doit augmenter d'abord, puis rester sensiblement constant et enfin diminuer. On est donc conduit à chercher la relation

$$L = f(F)$$

et c'est à l'expérience qu'il faut s'adresser pour cela.

B. — Instruments de mesure. — Vérification de la formule.

Dans la recherche de ces lois j'ai employé des bandes de quatre épaisseurs différentes; ces épaisseurs étaient, en moyenne, en millimètres :

0.04, 0.22, 0.65, 1.36,

Elles ont été mesurées avec un sphéromètre de Perreaux donnant le $\frac{1}{2000}$ de millimètre, lequel présente un perfectionnement qui le rend éminemment propre à ces mesures. Les sphéromètres ordinaires, en effet, ne permettent d'apprécier le contact de la pointe de la vis avec l'objet à mesurer, que par l'instabilité de l'appareil qui, à ce moment, repose sur quatre pieds; il en résulte que le poids de l'instrument presse sur la substance soumise à l'expérience et que si celle-ci est compressible, comme le caoutchouc, l'épaisseur mesurée est trop faible. Pour obvier à cet inconvénient et aussi, d'après le constructeur du moins, pour augmenter encore la sensibilité de l'appareil, M. Perreaux emploie une vis creuse dans la cavité de laquelle passe, à frottement doux, une tige métallique dont la pointe inférieure sert à établir le contact. L'extrémité supérieure de cette tige bute contre

le petit bras d'un levier coudé dont le grand bras est représenté par une aiguille mobile devant un cadran. On est averti que le contact est établi par le mouvement de l'aiguille, et, dans les deux lectures à faire pour la mesure de l'épaisseur d'un corps, on a soin d'amener chaque fois l'extrémité de l'aiguille en face de la même division du cadran. La sensibilité de l'appareil ne serait augmentée que si le nombre de divisions dont il faut faire tourner la tête de la vis du sphéromètre était inférieur à celui que parcourt l'aiguille dans le même temps ; mais dans l'instrument que j'ai eu entre les mains, ces nombres sont sensiblement égaux ; il est à remarquer, toute fois, que les divisions du cadran sont plus grandes que celles de la vis. Malgré cela l'avantage de la modification que je viens de décrire se réduit sensiblement à celui que j'ai indiqué plus haut, c'est-à-dire à déterminer exactement le moment du contact, la pression de l'instrument étant seulement égale au poids de la tige qui traverse la vis.

Toutes les bandes dont je me suis servi ont été découpées par le procédé déjà décrit et je leur ai donné une largeur uniforme de 7 millimètres, en sorte que les sections étaient proportionnelles aux épaisseurs 4, 22, 65, 136. Mais pour qu'il en fût ainsi et parce que les divers résultats obtenus devaient être comparés entre eux, il était nécessaire de s'assurer que la largeur était bien la même pour les diverses bandes employées. Cette dimension ne pouvait guère être mesurée avec une exactitude suffisante qu'au moyen de l'ophthalmomètre de Helmholtz. Comme cet appareil ne se trouve décrit, en France, que dans un petit nombre d'ouvrages de physique médicale, j'ai cru devoir en indiquer ici le principe.

Une lame de verre à faces parallèles donne, des objets que l'on regarde à travers, une image rejetée latéralement, lorsque les rayons lumineux tombent obliquement sur la lame ; cette image est d'ailleurs de même grandeur que l'objet.

Qu'on se figure deux lames pareilles, de même indice, de même épaisseur, disposées de champ, l'une au-dessus de l'autre de manière à ce que leur faces homologues soient exactement situées dans le même plan. Si nous regardons un objet au travers d'un pareil système, en nous plaçant de telle sorte que les rayons pénétrant dans l'œil aient traversé les uns la lame supérieure, les autres la lame inférieure, nous ne verrons qu'une image de l'objet. Mais si nous faisons tourner les deux lames en sens inverse l'une de l'autre et de la même quantité, chacune d'elles rejetant dans un sens différent les rayons qui la traversent, l'œil qui occupe la même position que tantôt verra deux images de l'objet considéré. Si nous supposons cet objet sphérique et si nous donnons à l'angle des lames une valeur telle que les deux images soient tangentes entre elles, la somme des déplacements latéraux produits par les deux lames sera égale au diamètre de l'objet. Pour calculer l'intervalle des images doubles et par suite le diamètre cherché, il suffira de connaître l'épaisseur des lames, leur indice de réfraction et leur inclinaison au moment où la tangente a été produite. On peut éviter ce calcul au moyen d'opérations préliminaires faites avec des objets de diamètres connus, en notant chaque fois la déviation qu'il faut donner aux lames pour produire la tangence des deux images qu'elles donnent. On obtient ainsi expérimentalement et une fois pour toutes un tableau des valeurs du déplacement en fonction des indications de l'ophthalmomètre dont on se sert.

Il est à remarquer que ce procédé de mesure d'une dimension linéaire est entièrement indépendant de la distance de l'objet aux lames de verre, et ce n'est pas là le moindre avantage de l'appareil.

Tel est le principe de l'ophthalmomètre qui se compose donc, comme partie essentielle, de deux lames de verre à faces parallèles que l'on peut faire tourner à volonté d'un

même angle, mais en sens opposé autour d'un axe commun. On mesure l'inclinaison des lames au moyen de cercles gradués munis de verniers. Derrière le système des deux lames se trouve une lunette placée de telle sorte que les rayons qui y pénètrent ont traversés les uns la lame supérieure, les autres la lame inférieure. Je passe sous silence les autres parties de l'appareil qui ne servent que dans la détermination du rayon de courbure de la cornée.

On voit d'après cette description que pour mesurer exactement la largeur des bandes de caoutchouc employées, il faudrait les disposer de manière à ce qu'elles fussent exactement dans un plan perpendiculaire à l'axe optique de l'instrument. Il serait assez difficile de disposer l'expérience de manière à réaliser rigoureusement cette condition du premier coup. On n'arriverait à déterminer la largeur des bandes qu'après un assez grand nombre d'observations en prenant la valeur maximum d'une série de mesures. Un pareil degré de précision n'étant pas en rapport avec l'imperfection des moyens que l'on peut employer pour tailler les bandes, je me suis contenté de la vérification suivante. Après avoir soigneusement découpé les bandes entre les feuilles de papier, en suivant le plus exactement possible les traits tracés au crayon, je les ai fixées entre les deux pinces au moyen desquelles je les ai légèrement tendues. Je les ai alors doublées dans l'ophthalmomètre, et en cherchant à rendre tangentes les deux images, j'apercevais facilement les petites irrégularités que pouvaient présenter les bords. J'ai rejeté celles de ces bandes dont la régularité pouvait laisser à désirer.

Les bandes ainsi choisies, il ne restait plus qu'à leur faire supporter des charges graduellement croissantes et à mesurer au cathétomètre les distances successives de deux points marqués à une distance convenable des pinces. Comme pour les mesures relatives aux variations du coefficient d'élasticité avec la température, j'ai réduit les valeurs obte-

nues directement par l'expérience à ce qu'elles auraient été si j'avais toujours opéré sur une longueur primitive égale à 40 centimètres, en supposant l'allongement proportionnel à la longueur, pour une même charge. Je m'appuierai de nouveau sur cette proportionnalité pour arriver à l'équation de la courbe que l'on obtient en prenant comme abscisses les poids tenseurs et comme ordonnées les longueurs correspondantes ; aussi ai-je cru devoir vérifier par l'expérience le bien fondé de cette supposition.

Le tableau suivant contient les résultats d'une expérience faite en marquant sur une même bande trois points A, B, C, dont on mesure les distances, après chaque addition de charge. Les 2^e, 3^e, 4^e colonnes contiennent les distances AB, BC, AC, correspondant aux poids indiqués dans la première ; la 5^e colonne contient les valeurs successives du rapport $\frac{AC}{BC}$

POIDS tenseurs en grammes	AB en millimètres	BC en millimètres	AC en millimètres	$\frac{AC}{BC}$
0	5.82	8.56	14.38	1.67
5	6.04	8.70	14.74	1.69
10	6.24	8.96	15.20	1.69
15	6.40	9.34	15.70	1.68
20	6.52	9.68	16.20	1.67
25	6.92	10.00	16.92	1.69
30	7.14	10.38	17.52	1.68
35	7.44	10.72	18.16	1.69
40	7.70	11.30	19.00	1.68
45	8.00	11.82	19.82	1.67

POIDS- tenseurs en grammes	AB en millimètres	BC en millimètres	AC en millimètres	$\frac{AC}{BC}$
50	8.34	12.34	20.68	1.67
55	8.76	12.86	21.62	1.68
60	1.90	13.46	22.56	1.67
65	9.60	14.06	23.66	1.68
70	10.02	14.68	24.70	1.68
75	10.34	15.50	25.84	1.66
80	10.78	16.22	27.00	1.66
85	11.30	16.94	28.24	1.66
90	11.80	17.58	29.38	1.67
95	12.30	18.28	30.58	1.67
100	12.98	18.98	31.96	1.68
105	13.26	20.18	33.44	1.66
110	13.78	20.66	34.40	1.66
120	14.76	21.14	36.90	1.66
130	15.74	23.68	39.42	1.66
140	17.04	25.48	42.52	1.66
150	18.12	27.12	45.24	1.66
160	19.68	29.30	48.98	1.67
170	20.42	30.60	51.02	1.67

Si l'homogénéité de la lame de caoutchouc eût été parfaite, et si le phénomène de l'allongement consécutif n'intervenait pas comme nouvelle cause d'erreur, il est certain que les nombres inscrits dans la dernière colonne du tableau précédent eussent été rigoureusement constants. Il n'en est pas absolument ainsi. Toutefois ces différences sont toujours assez faibles pour qu'on puisse regarder comme vraie la loi de proportionnalité entre les allongements et la longueur. On peut donc, comme je l'ai fait, réduire les longueurs observées dans les diverses expériences à celle d'une longueur primitive égale à 40 centimètres et regarder comme l'expression de la vérité les résultats auxquels conduiront les nombres ainsi obtenus.

Pour avoir une idée de la marche générale du phénomène observé, plus nette que ne peut la donner la vue d'un tableau, j'ai construit, pour chaque observation, la courbe

$$L = f(p)$$

qui lie la longueur à la charge.

Le caoutchouc vulcanisé, que l'on trouve dans le commerce en lames minces, présente toujours une sorte de striation comme pourrait le produire une juxtaposition de fibres parallèles entre elles ; ces fibres ne sont autre chose que des lignes de plus forte épaisseur et proviennent du mode de fabrication. On devait se demander si l'élasticité de la substance était la même dans les deux sens parallèlement et perpendiculairement à ces fibres ; aussi ai-je toujours opéré successivement, pour chaque épaisseur de lame, sur des bandes taillées dans ces deux sens.

Dans les pages suivantes se trouvent des tableaux donnant les longueurs observées, et les longueurs réduites proportionnellement à une longueur primitive de 40 centimètres ; les courbes d'élasticité correspondantes sont repro-

duites dans les planches I, II, III, IV, J'ai indiqué, en tête de chaque tableau, l'épaisseur de la lame qui a donné les résultats inscrits et le sens dans lequel cette lame a été taillée.

N° I.
Epaisseur = 0,04
Bande parallèle aux fibres

N° II.
Epaisseur = 0,04
bande perpendiculaires aux fibres

POIDS en grammes	LONGUEURS observées en millimètres	LONGUEURS réduites en millimètres	POIDS en grammes	LONGUEURS observées en millimètres	LONGUEURS réduites en millimètres
0	16.25	10 »	0	16.80	10 »
2	17.06	10.52	2	17.46	10.39
4	18.06	11.13	4	18.42	10.96
6	18.90	11.65	6	19.40	11.54
8	20.38	12.56	8	20.74	12.34
10	21.94	13.52	10	21.98	13.08
12	23.36	14.40	12	23.06	13.72
14	24.70	15.22	14	24.38	14.51
16	25.94	15.99	16	25.40	15.11
18	27 »	16.64	18	26.38	15.70
20	28.16	17.36	20	27.22	16.20
22	28.86	17.75	22	27.76	16.52
24	29.52	18.20	24	28.34	16.87
26	29.92	18.44	26	29.12	17.33
28	30.56	18.84	28	29.36	17.48
30	30.94	19.07	30	29.86	17.77
35	32.20	19.85	35	30.62	18.23
40	33.80	20.83	40	31.30	18.63

N° III.

Epaisseur = 0^{mm}220

Bande parallèle aux fibres

N° IV.

Epaisseur = 0^{mm}20

Bande perpendiculaire aux fibres

POIDS en grammes	LONGUEURS observées en millimètres	LONGUEURS réduites en millimètres	POIDS en grammes	LONGUEURS observées en millimètres	LONGUEURS réduites en millimètres
0	14.38	10 »	0	12.42	10 »
10	15.20	10.57	10	13.12	10.57
20	16.20	11.77	20	13.82	11.13
30	17.52	12.63	30	14.70	11.84
40	19.00	13.78	40	15.72	12.66
50	20.68	15.03	50	16.88	13.60
60	22.56	15.69	60	18.02	14.51
70	24.70	17.18	70	19.42	15.64
80	27.00	18.78	80	21.02	16.93
90	29.38	20.43	90	22.66	18.25
100	31.96	22.23	100	24.50	19.75
110	34.40	23.92	110	26.24	21.13
120	36.90	25.66	120	28.08	22.62
130	39.42	27.41	130	30.14	24.26
140	42.52	29.57	140	32.10	25.85
150	45.24	31.46	150	34.00	27.38
160	48.98	34.06	160	36.78	29.62
170	51.02	35.48	170	38.60	31.08
			180	40.33	32.48
			190	41.25	23.22
			200	42.43	34.17

N° V.
Epaisseur = 0^{mm}650
Bande parallèle aux fibres

N° VI.
Epaisseur = 0^{mm}650
Bande perpendiculaire aux fibres

POIDS en grammes	LONGUEURS observées en millimètres	LONGUEURS réduites en millimètres	POIDS en grammes	LONGUEURS observées en millimètres	LONGUEURS réduites en millimètres
0	12.12	10 »	0	10.94	10 »
20	12.98	10.70	20	11.62	10.62
40	13.88	11.45	40	12.34	11.28
60	15.02	12.39	60	13.20	12.06
80	16.52	13.63	80	14.40	13.16
100	18.06	14.90	100	15.46	14.13
120	20.06	16.55	120	17.14	15.66
140	22.24	18.34	140	18.94	17.31
160	23.64	20.33	160	21.06	19.25
180	27.42	22.62	180	23.72	21.68
200	29.72	24.52	200	25.32	23.14
220	32.58	26.88	220	27.52	25.15
240	35.26	29.15	240	30.04	27.45
260	37.84	31.22	260	32.36	29.57
280	40.36	33.30	280	34.74	31.75
300	42.82	35.33	300	36.72	32.56
320	45.38	37.44	320	38.72	35.39
340	47.82	39.45	340	40.60	37.11
360	50.34	41.54	360	42.50	38.85
380	52.66	43.45	380	44.12	40.32
400	54.66	45.10			
420	56.38	46.52			
440	57.52	47.46			

N° VII.

Epaisseur = 1^{mm}360
Bande parallèle aux fibres

N° VIII.

Epaisseur = 1^{mm}360
Bande parallèle aux fibres.

POIDS en grammes	LONGUEURS observées en millimètres	LONGUEURS réduites en millimètres	POIDS en grammes	LONGUEURS observées en millimètres	LONGUEURS réduites en millimètres
0	18.26	10 »	0	13.28	10 »
50	20.10	11 »	50	14.08	11.05
100	22.80	12.49	100	16.74	12.60
150	26.08	14.29	150	19.70	14.84
200	30.78	16.86	200	23.52	17.71
250	36.70	20.09	250	28.16	21.20
300	43.42	23.77	300	33.32	25.09
350	50.30	27.54	350	38.54	29.02
400	57.32	31.39	400	43.24	32.56
450	65.18	35.69	450	48.78	36.67
500	70.38	38.54	500	53.14	40.01
550	75.70	41.46	550	55.48	41.77
600	78.80	43.15	600	58.40	43.97
650	82.62	45.25	650	60.20	45.33
700	84.36	46.20	700	61.74	46.49
750	86.94	47.61	750	63.52	47.83
800	88.42	48.42	800	64.88	48.86
850	89.90	49.23	850	66.82	50.31

On voit que les courbes correspondantes à des lames d'épaisseur différente présentent toutes le même aspect général ; leur concavité est tournée d'abord vers les y positifs, puis change de sens et est tournée vers les y négatifs.

Remarquons en outre que, surtout pour les courbes relatives à une épaisseur de $0^{\text{mm}}22$, la position du point d'inflexion est difficile à déterminer, car, à partir de ce point, la courbe se confond sur une assez grande étendue avec sa tangente, laquelle passe très-sensiblement par l'origine des coordonnées. Tant qu'il en est ainsi, il y a un rapport constant entre la longueur de la bande et le poids tenseur. Or j'ai montré plus haut que cette proportionnalité expliquait le fait de la constance de la tension normale dans une enveloppe sphérique de caoutchouc. Les tableaux précédents montrent d'ailleurs aussi que le rapport entre le poids tenseur et la longueur, rapport qui dans la formule

$$N = 2\pi \frac{F}{L}$$

est représenté par $\frac{F}{L}$ va en augmentant depuis le début de l'expérience jusqu'au moment où l'on atteint le point d'inflexion et diminue ensuite. Donc la tension normale doit augmenter d'abord, puis rester sensiblement constante, et diminuer à la fin de l'opération ; toutes ces conclusions, nous l'avons montré déjà, sont pleinement confirmées par l'expérience.

Pour les lames d'épaisseur plus petite ou plus grande que $0^{\text{mm}}22$, la tangente au point d'inflexion rencontre l'axe des x au-delà ou en deçà de l'origine ; il n'y a donc jamais pour ces épaisseurs proportionnalité entre la longueur et le poids tenseur ; donc la tension normale N ne doit jamais rester constante pendant un changement notable du volume de la sphère élastique. Je n'ai pas pu vérifier ces conclu-

sions pour des enveloppes sphériques, mais j'ai pu soumettre à l'expérience des enveloppes cylindriques d'une épaisseur de 0^{mm},04. Dans ce cas, l'un des rayons de courbure est infini et la formule se réduit à

$$N = \frac{F}{R}$$

Elle est la même que pour la sphère au facteur 2 près ; il en résulte que N ne peut encore être constant que si le rapport $\frac{F}{R}$ ou $\frac{F}{L}$ est lui-même constant ; or pour l'épaisseur 0^{mm},04 cette proportionnalité n'existe jamais et l'expérience montre que la composante normale N n'est jamais constante.

On voit d'après cela, que la formule

$$N = F \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

rend parfaitement compte des phénomènes d'élasticité que présentent des enveloppes de caoutchouc sphériques et cylindriques, et les résultats observés constituent à leur tour une vérification expérimentale de la formule.

Toutefois je montrerai encore comment elle peut expliquer un phénomène que M. Leroux a observé et qu'il a estimé assez singulier pour être signalé. (*).

Dans la détermination expérimentale de la vitesse de propagation d'un ébranlement sonore dans un tuyau cylindrique, M. Leroux faisait produire des chocs très-vifs et multipliés au centre d'une membrane de caoutchouc tendue et fermant le tube dans lequel se propagait l'ébranlement. Quand la membrane était hors d'usage, il la démontait et la laissait revenir librement sur elle-même. Il observa ainsi que la partie centrale, celle où les chocs étaient pro-

(*) Leroux. — *Annales de Phys. et de Chim.* 4^e série, t. XII p. 414.

duits, était plus épaisse que les parties périphériques et qu'un plissement rayonnant se formait autour de cette partie centrale. Ce n'est pas là, ajoute M. Leroux, le phénomène le moins curieux présenté par cette singulière substance. Il voit l'explication de ce fait dans une augmentation du coefficient d'élasticité, augmentation qui se produirait au point même où les chocs avaient lieu sur la membrane.

On va voir combien la formule de la tension superficielle donne une explication plus satisfaisante.

Au point où les chocs se produisent et au moment où ils ont lieu, il est évident que la courbure de la membrane est plus forte que sur les bords ; donc les rayons de courbure y ont des valeurs plus petites ; mais en chaque point de la membrane, la tension normale N doit être la même et si les rayons de courbure sont plus petits en certains endroits qu'en d'autres, la somme

$$-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

y sera plus grande, il faudra par suite qu'en ces points la réaction élastique F ait une valeur moindre. Il résulte de là que la partie centrale de la membrane considérée aura été moins tendue que les parties périphériques. Or une tension exercée sur une lame de caoutchouc a toujours pour effet de diminuer le coefficient d'élasticité d'une quantité d'autant plus grande que la tension a été plus considérable. Les portions périphériques de la membrane auront donc, lorsqu'on la démonte, un coefficient d'élasticité plus faible qu'avant, tandis qu'au centre le coefficient aura sensiblement conservé sa valeur primitive.

C'est donc bien par une force de contraction de la partie centrale supérieure à celle des parties adjacentes que se produisent les plis rayonnants, comme le dit M. Leroux ; mais

cette différence dans la force de contraction résulte d'une diminution du coefficient d'élasticité dans les parties périphériques et non d'une augmentation de ce coefficient dans la partie centrale de la membrane.

De tout ce qui précède, nous concluerons que la formule

$$N = F \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

est applicable aux enveloppes solides élastiques et nous tiendrons pour exactes les conséquences que l'on en déduira. J'en indiquerai quelques-unes plus loin, mais auparavant j'ai cru devoir étudier de plus près la loi d'élasticité du caoutchouc considéré en lames d'assez faible épaisseur. (*)

III

LOIS DE L'ÉLASTICITÉ DE TRACTION

Il était intéressant d'établir l'équation empirique des courbes que j'ai données précédemment ; je me suis laissé guider dans cette recherche par un calcul que j'avais fait d'abord dans un autre but et que je vais indiquer.

Considérons une bande de caoutchouc tendue rectilignement fixée invariablement à une de ses extrémités, tangente à une roue très-mobile placée à une certaine distance de cette extrémité et tirée à l'autre bout par des poids tenseurs.

Soit l la longueur de la bande comprise entre l'extrémité et son point de contact avec la roue mobile ; pour un accroissement de charge infiniment petit dp , la longueur l s'allongera d'une quantité dl qu'on pourra supposer égale à l'arc

(*) C'est sur le conseil de M. Hugonny que j'ai étudié les lois de l'élasticité de traction.

dont la roue aura tourné. Pour un nouvel accroissement de charge dp , la même longueur l , déjà tendue par le poids $p + dp$, s'allongera d'une nouvelle quantité qui sera encore égale au nouvel arc dont la roue aura tourné ; si bien que, pour un accroissement quelconque de poids tenseur, l'arc total dont la roue mobile aura tourné sera égal à la somme des allongements successifs que prend la longueur constante l pour des poids tenseurs graduellement croissants. Si nous mesurons à chaque instant les arcs de rotation de la roue mobile, nous pourrions donc construire la courbe qui aurait pour abscisses les poids tenseurs et pour ordonnées les arcs de rotation correspondants. Soit :

$$(1) \quad y = \varphi(p)$$

l'équation de cette courbe.

Soit maintenant :

$$L = f(p)$$

la relation inconnue qui lie la longueur d'une barre au poids tenseur.

Pour un accroissement de poids dp , L prendra un allongement dL et l'on aura :

$$L + dL = f(p + dp) = f(p) + \frac{df}{dp} dp + \dots$$

En négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier, il restera :

$$(2) \quad dL = \frac{df}{dp} dp$$

Mais l'équation (1) nous montre que la longueur l , lorsque le poids tenseur augmente de dp , prend un allongement donné par la formule :

$$dy = \frac{d\varphi}{dp} dp$$

Si l'on admet la proportionnalité entre la longueur et l'allongement, on aura

$$dL = \frac{L}{l} dy$$

et en remplaçant dy par sa valeur

$$dL = \frac{L}{l} \frac{d\varphi}{dp} dp$$

Remplaçant dans l'équation (2), dL par cette valeur et L par $f(p)$, il viendra

$$\frac{1}{l} f(p) \frac{d\varphi}{dp} dp = \frac{df}{dp} dp$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{dp} dp = l \frac{\frac{df}{dp}}{f(p)} dp$$

En intégrant, on obtient

$$(3) \quad \varphi(p) = l \log f(p) + C$$

On déterminera la constante en remarquant que pour $p = 0$ on a $L = l$ et $\varphi(p) = 0$. Ces conditions introduites dans l'équation (3) donnent

$$(4) \quad 0 = l \log l + C$$

En retranchant membre à membre les équations (3) et (4) il vient

$$\varphi(p) = l [\log f(p) - \log l]$$

ou

$$l \log \frac{L}{l} = \varphi(p)$$

En passant des logarithmes aux nombres, on obtient enfin

$$(5) \quad L = l e^{\frac{\varphi(p)}{1}}$$

Je ne prétends pas donner à ce calcul plus d'importance qu'il n'en a en réalité. Car il n'indique pas que la relation que l'on cherche

$$L = f(p)$$

soit forcément une expression exponentielle ; si l'équation

$$y = \varphi(p)$$

était une expression logarithmique, l'équation (5) aurait, en effet, une forme algébrique.

J'ai cherché cependant qu'elle était la forme de la courbe représentée par l'équation (4), espérant que cette forme serait simple, facile à mettre en équation et conduirait par suite aisément à la connaissance de l'équation (5).

Il est facile, au moyen des résultats inscrits dans les tableaux des pages 40 et suivantes, de calculer les ordonnées de la courbe (4), en s'appuyant toujours sur la loi de proportionnalité entre la longueur et l'allongement. Les tableaux suivants contiennent ces ordonnées, ainsi calculées, et les courbes correspondantes reproduites planches V et VI ont été construites en décuplant les ordonnées.

POIDS en grammes	N° I valeurs de <i>g</i> en millimètres	N° II. valeurs de <i>g</i> en millimètres	POIDS en grammes	N° III valeurs de <i>g</i> en millimètres	N° IV valeurs de <i>g</i> en millimètres
2	0.52	0.57	10	0.57	0.56
4	1.10	1.12	20	1.22	1.09
6	1.57	1.65	30	2.03	1.73
8	2.35	2.34	40	2.87	2.47
10	3.11	2.94	50	3.75	3.21
12	3.76	3.43	60	4.65	3.89
14	4.33	4.01	70	5.59	4.67
16	4.84	4.42	80	6.52	5.49
18	5.25	4.88	90	7.40	6.27
20	5.68	5.19	100	8.27	7.08
22	6.05	5.38	110	9.03	7.79
24	6.30		120	9.75	8.49
			130	10.43	8.22
			140	11.21	9.87
			150	11.84	10.46
			160	12.66	11.28
			170	13.07	11.77
			180		12.22
			190		12.45

POIDS en grammes	N° V valeurs de y en millimètres	N° VI valeurs de y en millimètres	POIDS en grammes	N° VII valeurs de y en millimètres	N° VIII valeurs de y en millimètres
20	0.70	0.62	50	1 »	1.05
40	1.40	1.24	100	2.35	2.45
60	2.22	1.93	150	3.79	4.22
80	3.22	2.84	200	5.59	6.16
100	4.15	3.58	250	7.50	8.13
120	5.26	5.12	300	9.33	9.96
140	6.34	6.17	350	10.92	11.53
160	7.42	7.29	400	12.31	12.75
180	8.55	8.55			
200	9.39	9.23			
220	10.35	10.09			
240	11.19	11.01			
260		11.74			

Les courbes des planches V et VI qui sont celles que j'ai représentées plus haut par l'équation

$$y = \varphi(p)$$

présentent toutes ce caractère général qu'elles se confondent sensiblement avec une ligne droite jusqu'à une certaine abscisse qui est précisément celle pour laquelle les courbes d'élasticité des planches offrent un point d'inflexion. Il en résulte d'après l'équation

$$L = l e^{\frac{\varphi(p)}{1}}$$

que ces courbes pourront être représentées par une équation de la forme

$$L = l e^{ap+b}$$

entre l'origine et le point d'inflexion.

J'ai cherché, mais inutilement, une équation qui représenterait assez exactement ces courbes dans toute leur étendue. Celles qui donnaient les meilleurs résultats étaient assez compliquées, surtout à cause du nombre de constantes qu'elles renfermaient ; leur dérivée ne donnait pas une expression simple pour le coefficient d'élasticité, et il eût été difficile de découvrir ainsi les lois si faciles à mettre en évidence par la formule partielle

$$L = l e^{ap+b}$$

D'ailleurs ces courbes devaient surtout être étudiées entre l'origine et le point d'inflexion ; l'expérience prouve en effet que tant que la charge employée est inférieure à celle pour laquelle se produit le point d'inflexion, la bande de caoutchouc revient sensiblement à sa hauteur primitive après un temps relativement court, si le poids tenseur est enlevé ; il n'en est plus de même si la charge a été plus forte en sorte que les ordonnées des courbes d'élasticité, au-delà du point d'inflexion, se composent non-seulement de l'allongement normal du caoutchouc, mais d'un allongement consécutif, qu'il est évidemment difficile de faire entrer dans une formule.

Les résultats que j'ai obtenus et que je vais indiquer ne représenteront donc que les variations qui se produisent jusqu'au point d'inflexion des courbes d'élasticité.

Les constantes de l'équation adoptée

$$L = l e^{ap+b}$$

se déterminent facilement par ces conditions : que les courbes qu'elles représentent ont mêmes ordonnées à l'origine et au point d'inflexion et aussi même coefficient angulaire de la tangente en ce point que les courbes d'élasticité.

L'ordonnée à l'origine pour $p=0$ est 10 ; soit λ l'ordonnée du point d'inflexion dont l'abscisse est p , et d la sous-tangente qui correspond à ce point, longueur que nous pourrions mesurer directement en construisant les courbes à une échelle assez grande pour obtenir une exactitude suffisante.

Les équations de condition seront

$$\begin{aligned} 10 &= l e^b \\ \lambda &= l e^{ap+b} \\ \frac{\lambda}{d} &= \frac{dL}{dp} = a l e^{ap+b} \end{aligned}$$

On voit facilement que b est indéterminée, on pourra regarder cette constante comme nulle et les valeurs de l et de a tirées des équations précédentes sont alors

$$\begin{aligned} l &= 10 \\ a &= \frac{1}{d} \end{aligned}$$

L'équation à employer se réduit donc à

$$(4) \quad L = 10 e^{\frac{p}{d}}$$

On voit que cette équation est fort simple puisqu'elle ne renferme qu'une seule constante d variable avec la section de la lame de caoutchouc considérée.

L'indétermination de la constante d équivaut à la suppression de l'une des équations de condition ; par suite, on ne peut plus astreindre la courbe représentée par l'équation adoptée qu'à avoir même ordonnée à l'origine et au point

d'inflexion que la courbe d'élasticité. Il était à craindre qu'alors les résultats ne fussent plus concordants. On va voir cependant que le rapport entre les ordonnées obtenues expérimentalement et celles qui sont fournies par l'équation

$$L = 10 e^{\frac{p}{d}}$$

se maintient toujours entre des limites assez rapprochées.

Pour les courbes qui correspondent à une épaisseur de 0^{mm}22, la tangente au point d'inflexion passe par l'origine; comme ce point est difficile à déterminer exactement sur la figure, j'ai opéré de la manière suivante: pour ces courbes et pour ce point la sous-tangente d est égale à l'abscisse correspondante et l'ordonnée est alors fournie par la formule

$$L = 10 e = 27.48$$

J'ai par suite pris pour ordonnée exacte du point d'inflexion la longueur 27.48. J'ai calculé quelle était la charge qui donnait exactement à la lame considérée la longueur 27.48; cette charge représentait l'abscisse du point d'inflexion. Pour les autres courbes, l'abscisse du point d'inflexion et son ordonnée ont été déterminées directement sur la figure.

Le tableau suivant donne les valeurs de la constante d pour les diverses bandes soumises à l'expérience.

ÉPAISSEURS en millimètres	NUMÉROS des bandes	BANDES parallèles aux fibres	NUMÉROS des bandes	BANDES perpendiculaires aux fibres
0.04	I	16.40	II	18.96
0.22	III	64.34	IV	74.35
0.65	V	112.15	VI	119.86
1.36	VII	174.82	VIII	169.40

Il ne reste plus qu'à comparer les résultats donnés par la formule (1), où d est successivement remplacé par les valeurs précédentes, avec les nombres fournis par l'expérience.

Les tableaux suivants contiennent les résultats de cette comparaison.

N° I.

N° II.

POIDS en grammes	LONGUEURS expérimen- tales	LONGUEURS théoriques	Rapports	LONGUEURS expérimen- tales	LONGUEURS théoriques	Rapports
0	10 »	10 »	1.00	10 »	10 »	1.00
2	10.52	10.62	1.00	10.39	10.54	1.01
4	11.13	11.29	1.01	10.96	11.11	1.01
6	11.65	12.00	1.03	11.54	11.71	1.01
8	12.56	12.75	1.01	12.34	12.35	1.00
10	13.52	13.55	1.00	13.08	13.01	0.99
12	14.40	14.40	1.00	13.72	13.72	1.00

N° III.

N° IV.

POIDS en grammes	LONGUEURS expérimen- tales	LONGUEURS théoriques	Rapports	LONGUEURS expérimen- tales	LONGUEURS théoriques	Rapports
0	10 »	10 »	1.00	10 »	10 »	1.00
10	10.57	10.80	1.02	10.57	10.69	1.01
20	11.77	11.68	0.99	11.13	11.43	1.02
30	12.63	12.62	0.99	11.84	12.23	1.03
40	13.78	13.64	0.99	12.66	13.08	1.03
50	15.03	14.74	0.98	13.60	13.99	1.02

N° III.

N° IV.

POIDS en grammes	LONGUEURS expérimen- tales	LONGUEURS théoriques	Rapports	LONGUEURS expérimen- tales	LONGUEURS théoriques	Rapports
60	15.69	15.93	1.01	14.51	14.96	1.03
70	17.18	17.21	1.00	15.64	16.01	1.02
80	18.78	18.61	0.99	16.93	17.12	1.01
90	20.43	20.11	0.98	18.25	18.31	1.00
100	22.23	21.73	0.97	19.75	19.59	0.99
110	23.92	23.48	0.98	21.13	20.95	0.90
120	25.66	25.38	0.99	22.62	22.41	0.99
128.68	27.18	27.18	1.00			
130				24.26	23.97	0.98
140				25.85	25.63	0.99
146.70				27.18	27.18	1.00

N° V.

N° VI.

POIDS en grammes	LONGUEURS expérimen- tales	LONGUEURS théoriques	Rapports	LONGUEURS expérimen- tales	LONGUEURS théoriques	Rapports
0	10 »	10 »	1 »	10 »	10 »	1 »
20	10.70	10.93	1.02	10.62	10.87	1.02
40	11.45	11.87	1.03	11.28	11.81	1.04
60	12.39	13.06	1.05	12.06	12.84	1.06
80	13.63	14.28	1.04	13.16	13.96	1.06

N° V.

N° VI.

POIDS en grammes	LONGUEURS expérimen- tales	LONGUEURS théoriques	Rapports	LONGUEURS expérimen- tales	LONGUEURS théoriques	Rapports
100	14.90	15.61	1.04	14.13	15.17	1.07
120	16.55	17.07	1.03	15.66	16.49	1.05
140	18.34	18.66	1.01	17.31	17.93	1.03
160	20.33	20.40	1.00	19.25	19.49	1.01
180	22.62	22.31	0.99	21.03	21.18	0.97
200	24.52	24.39	0.99	23.14	23.03	0.99
220	26.88	26.66	0.99	25.15	25.03	0.99
240	29.15	29.15	1.00	27.45	27.21	0.99
260				29.57	29.57	1.00

N° VII.

N° VIII.

POIDS en grammes	LONGUEURS expérimen- tales	LONGUEURS théoriques	Rapports	LONGUEURS expérimen- tales	LONGUEURS théoriques	Rapports
0	10 »	10 »	1 »	10 »	10 »	1.00
50	11 »	11.53	1.04	11.05	11.59	1.04
100	12.49	13.31	1.06	12.60	13.43	1.06
150	14.29	15.35	1.07	14.84	15.56	1.04
200	16.86	17.70	1.04	17.71	18.04	1.01
250	20.09	20.43	1.01	21.20	20.91	0.98
300	23.77	23.61	0.99	25.09	24.23	0.97
350	27.54	27.83	1.01	29.02	28.09	0.97
400	31.39	31.39	1.00	32.56	32.56	1.00

Les nombres des tableaux précédents inscrits dans la colonne des rapports sont tous compris entre 0,97 et 1,07 ; il en résulte que l'équation.

$$(1) \quad L = 40 \, e^{\frac{p}{d}}$$

représente assez fidèlement la loi d'élasticité du caoutchouc tant que son coefficient d'élasticité va en diminuant.

Il est à remarquer d'ailleurs que les lames pour lesquelles les rapports entre les longueurs observées et les longueurs calculées s'éloignent le plus de l'unité, sont celles pour lesquelles la courbe de l'équation $y = \varphi(p)$ diffère le plus d'une ligne droite dans le voisinage de l'origine, et celles qui ont aussi l'épaisseur la plus forte. Il est en effet à supposer que la charge pour laquelle l'élasticité entre complètement en jeu devient de plus en plus considérable quand l'épaisseur augmente. C'est à cette cause qu'il y a lieu d'attribuer les différences plus grandes constatées entre les nombres inscrits dans la colonne des rapports. C'est donc surtout à partir du moment où le caoutchouc est suffisamment tendu jusqu'à celui où des allongements permanents commencent à se produire que la formule (1) représente assez exactement la loi d'élasticité du caoutchouc.

On déduit de là une loi bien simple relative au coefficient d'élasticité. En effet, en différentiant l'équation (1), on obtient

$$(2) \quad \frac{dL}{dp} = \frac{4}{d} 40 \, e^{\frac{p}{d}}$$

et en divisant membre à membre les équations (1) et (2), il vient après simplification

$$y \frac{dp}{dL} = d$$

y est la longueur de la bande, $\frac{dp}{dL}$ est le coefficient d'élasticité. D'où cette loi :

Le produit du coefficient d'élasticité par la longueur due à la charge est constant.

Ou ce qui revient au même :

Le coefficient d'élasticité est en raison inverse de la longueur acquise par la bande.

Ce produit constant d de la longueur par le coefficient d'élasticité varie non-seulement d'une épaisseur à l'autre, mais pour une même épaisseur, avec le sens suivant lequel la bande a été taillée dans la lame de caoutchouc. Je considérerai d'abord cette seconde variation.

Les résultats que j'ai donnés plus haut sont toujours relatifs pour une même épaisseur, à deux bandes taillées parallèlement et perpendiculairement aux lignes de plus forte saillie. *A priori*, il semblerait que, pour des charges égales, les allongements dans le sens perpendiculaire devraient être plus grands que dans le sens parallèle ; dans celui-là, en effet, les parties moins épaisses s'allongent librement sans être gênées en rien par les parties voisines d'une épaisseur plus grande, si bien que les allongements observés sont la somme des allongements des lignes successives d'épaisseur différente. Dans le sens parallèle, au contraire, les allongements que prend la lame ne sont qu'une moyenne entre ceux qui correspondraient à la plus grande et à la plus petite épaisseur de la lame.

Or l'expérience conduit à des résultats absolument contraires. Il suffit pour s'en convaincre de comparer entre eux les nombres inscrits dans les tableaux des pages 40 et suivantes, ou simplement de constater que les valeurs de la constante d sont plus petites pour les bandes parallèles aux fibres que pour les bandes perpendiculaires. Je crois qu'il

faut voir l'explication de ce fait dans l'action mécanique du couteau qui a séparé les lames d'avec le bloc de caoutchouc. Les fibres sont, en effet, parallèles au tranchant du couteau qui les produit ; ce dernier presse donc, en coupant dans un sens perpendiculaire à la direction des stries et son action mécanique est la même que celle que produirait une compression. Il doit résulter de là un rapprochement des molécules et, par suite, une résistance plus grande à l'allongement que l'on voudra produire ensuite. L'expérience confirme d'ailleurs cette explication. Si, en effet, une compression produit une augmentation du coefficient d'élasticité, l'acte inverse, la traction, doit amener, au contraire, une diminution dans la valeur de ce coefficient, et l'expérience montre que si on fait deux observations sur une même bande, pour les mêmes poids tenseurs, les allongements sont toujours plus grands lors de la deuxième série de mesures que lors de la première.

De plus, si c'est bien l'action mécanique du couteau qui produit cette différence du coefficient d'élasticité dans les deux sens considérés, il est évident que cette action se fera d'autant moins sentir que la lame aura une épaisseur plus considérable. Pour s'assurer qu'il en est ainsi, il suffit de chercher les rapports des valeurs de la constante d pour les diverses épaisseurs ; on arrive ainsi aux nombres suivants :

Epaisseurs en millimètres	Rapports des deux valeurs de d .
0.04	4.456
0.22	4.155
0.65	4.06
4.36	0.97

Les nombres de la deuxième colonne vont en diminuant, lentement d'abord tant que les épaisseurs sont très-faibles,

puis rapidement quand les épaisseurs augmentent ; le rapport finit même par être plus petit que l'unité. A ce moment-là les allongements, pour des charges égales, sont plus grands avec une bande taillée perpendiculairement aux fibres que pour celle qui est taillée parallèlement, l'influence de la plus grande épaisseur des stries se faisant seule sentir.

Ces considérations montrent que c'est bien à l'action mécanique du couteau qu'il faut attribuer la variation du coefficient d'élasticité relative au sens dans lequel on a taillé la bande soumise à l'expérience.

Les résultats que je viens d'énoncer sur l'inégale élasticité du caoutchouc dans diverses directions conduisent à penser que ce corps doit être biréfringent. C'est, en effet, ce que l'expérience m'a montré. Voici comment j'ai opéré :

Je place un nicol devant une source lumineuse, une lampe à gaz par exemple, et je fais tomber les rayons qui viennent de traverser ce polariseur sur une lame de caoutchouc assez mince et assez tendue pour qu'une forte proportion de lumière puisse la traverser ; j'observe ensuite la lame de caoutchouc avec un spath analyseur. Les choses ainsi disposées, si l'on fait tourner le spath jusqu'à éteindre l'une des images et que l'on vienne alors à enlever la lame de caoutchouc, l'image éteinte réapparaît.

Il est possible de donner aux phénomènes un aspect plus saisissant. Il suffit pour cela de tendre les lames de caoutchouc dans une seule direction, de manière à ce que la traction s'exerce parallèlement aux fibres ; on conserve ainsi les différences d'épaisseur que présentent les parties successives des lames. En disposant l'expérience comme tantôt, des phénomènes de polarisation chromatique prennent naissance et les parties d'épaisseur variable apparaissent avec des colorations différentes. L'expérience est

surtout nette avec les lames dont l'épaisseur moyenne est d'environ $0^{\text{mm}},04$, à condition de choisir celles dont les fibres sont bien accusées. On observe alors une succession de lignes parallèles alternativement bleues et rouges et et parfaitement limitées.

J'ajouterai qu'en opérant avec la lumière Drummond on peut projeter le phénomène et réaliser ainsi une curieuse expérience de cours.

Il est donc hors de doute que le caoutchouc est biréfringent.

D'ailleurs cette biréfringence est évidemment accidentelle; en outre elle ne peut être due qu'à des actions mécaniques, puisque la trempe ou une cristallisation irrégulière, seules circonstances qui peuvent produire les mêmes effets, n'interviennent pas dans la fabrication du caoutchouc. Les résultats trouvés relativement aux deux valeurs de la constante d , pour une même épaisseur, mettent en évidence cette différence de constitution moléculaire suivant diverses directions et les considérations qui précèdent montrent à quelle cause est dû ce phénomène. La biréfringence du caoutchouc est donc parfaitement expliquée et nous voyons en outre qu'une action mécanique peut produire sur ce corps une double réfraction permanente.

Il reste à considérer les variations de la constante d relatives aux changements d'épaisseur.

Les lames de caoutchouc auxquelles se rapportent mes expériences ont des épaisseurs très-différentes, mais toutes présentent les mêmes variations générales du coefficient d'élasticité. La forme des courbes des planches I, II, III, IV montre en effet que ce coefficient va d'abord en diminuant, puis reste sensiblement constant, pour une variation plus ou moins grande de la charge, et augmente enfin. Il en résulte que si l'on veut comparer les coefficients d'élasticité aux

sections, il faudra les considérer lorsqu'ils sont dans la même période de variation et lorsque les charges correspondantes sont assez différentes de celles qui donnent les points d'inflexion des courbes d'élasticité. Il est évident en effet que la comparaison du coefficient moyen d'élasticité de la bande n° I entre 10 et 20 grammes, à celui de l'une quelconque des lames III, V, VII, entre les mêmes charges, n'aurait aucun rapport avec la section des lames, puisque pour la première le point d'inflexion est compris entre les charges considérées, tandis que pour les secondes il est loin d'en être ainsi. On comprend dès lors combien est limité l'intervalle dans lequel on peut se proposer de vérifier la loi ordinaire des sections.

Les résultats de cette comparaison, faite dans les limites que je viens d'indiquer, sont contenus dans le tableau suivant. Les coefficients dont j'ai pris le rapport sont des coefficients moyens pris entre les charges indiquées dans la tableau.

NUMÉROS des bandes comparées	CHARGES entre lesquelles se fait la comparaison	RAPPORT des coefficients	RAPPORT des sections primitives
I et III	0 — 10	6.1	5.5
III et V	0 — 50	2.6	2.9
	50 — 100	2.4	
V et VII	0 — 50	1.92	2.1
	50 — 100	2.0	
	100 — 150	2.4	
	150 — 200	2.1	

Il résulte des résultats inscrits dans le tableau précédent que l'on peut regarder comme vraie, avec les restrictions que j'ai indiquées, la loi suivante :

Les coefficients d'élasticité de deux bandes de caoutchouc d'inégale épaisseur, restent, tant qu'ils diminuent, proportionnels aux sections primitives des lames.

IV

CONCLUSIONS

En résumé, nous pouvons poser les lois suivantes :

I. — Lorsqu'une enveloppe solide et élastique est tendue, la tension fait naître une composante normale à la surface ; la valeur de cette composante est fournie par la formule qui donne la tension superficielle des liquides :

$$N = F \left(-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

où F est la réaction élastique de la membrane, R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux au point où l'on considère la tension normale N .

II. — Lorsqu'on soumet à des charges progressivement croissantes, des bandes de caoutchouc d'une épaisseur comprise entre 0^{mm},04 et 1^{mm},36, le coefficient d'élasticité va d'abord en diminuant, puis reste sensiblement constant, pendant que la charge varie entre certaines limites plus ou moins étendues suivant l'épaisseur et il augmente ensuite.

Tant que le coefficient d'élasticité diminue, la longueur L de la bande est liée au poids tenseur p par la formule.

$$L = ae^{\frac{p}{d}}$$

c'est-à-dire que lorsque les poids tenseurs croissent en progression arithmétique, les longueurs croissent en progression géométrique.

III. — Tant que le coefficient d'élasticité du caoutchouc diminue, il varie en raison inverse de la longueur produite par la traction. Les coefficients d'élasticité de deux bandes de caoutchouc d'inégale épaisseur restent, tant qu'ils diminuent, proportionnels aux sections primitives des lames.

IV. — L'action mécanique du couteau qui sert à découper les bandes de caoutchouc détermine dans cette substance une constitution moléculaire qui n'est pas la même dans tous les sens ; d'où il résulte que le caoutchouc possède une biréfringence accidentelle et une élasticité variable avec la direction de la traction par rapport aux lignes de plus forte épaisseur.

APPLICATIONS

I

DÉTERMINATION DU COEFFICIENT D'ÉLASTICITÉ D'UNE ENVELOPPE SOLIDE

A. — Formules relatives au cas d'une enveloppe sphérique

L'extension de la formule de la tension superficielle des liquides au cas d'une masse fluide renfermée dans une enveloppe solide et élastique offre un grand intérêt par les applications dont elle est susceptible. Je vais indiquer, en effet, comment cette formule peut conduire à la détermination du coefficient d'élasticité d'une enveloppe solide et élastique par la seule observation des valeurs correspondantes du volume et de la composante normale, lorsque ce volume est exprimable en fonction des rayons de courbure principaux.

Je supposerai l'enveloppe sphérique ; la formule se réduit alors à

$$N = \frac{2 F}{R}$$

En multipliant et divisant par 2π , on peut introduire la longueur L de la circonférence d'un grand cercle ; on obtient ainsi :

$$N = 4 \pi \frac{F}{L}$$

d'où
$$F = \frac{1}{4 \pi} N L$$

Si on différencie cette équation par rapport à L , on obtiendra l'expression du coefficient d'élasticité

$$(1) \frac{dF}{dL} = \frac{4}{\pi} \left(N + L \frac{dN}{dL} \right)$$

Pour plus de commodité, il convient d'exprimer ce coefficient en fonction de la tension normale N et du volume V , puisque ces deux quantités sont fournies directement par l'observation. La chose est facile, il suffit d'évaluer la longueur L en fonction du volume V .

On a pour cela les deux équations

$$(2) L = 2 \pi R$$

$$(3) V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\text{De là on tire} \quad (4) L^3 = 6 \pi^2 V$$

Mais on a identiquement

$$(5) \frac{dN}{dL} = \frac{dN}{dV} \frac{dV}{dL}$$

En différenciant l'équation (4), on obtient

$$\frac{dV}{dL} = \frac{L^2}{2 \pi^2}$$

Et cette même équation (4) donne aussi

$$\frac{L^2}{2 \pi^2} = \sqrt[3]{\frac{9V^2}{2 \pi^2}}$$

On a ainsi la valeur $\frac{dV}{dL}$ en fonction du volume V ; si

on porte cette expression dans l'équation (5), il vient

$$(6) \quad \frac{dN}{dL} = \sqrt{\frac{9V^2}{2\pi^2}} \frac{dN}{dV}$$

Des équations (4) et (6) on déduit facilement la valeur du produit $L \frac{dN}{dL}$; on trouve, après simplification,

$$L \frac{dN}{dL} = 3V \frac{dN}{dV}$$

Si on porte cette dernière valeur dans l'équation (4), on a enfin l'expression du coefficient d'élasticité en fonction de N et de V :

$$(7) \quad \frac{dF}{dL} = \frac{1}{4\pi} \left(N + 3V \frac{dN}{dV} \right)$$

Il suffira donc de déterminer par l'expérience une série de valeurs correspondantes de N et de V, de construire la courbe qui lie ces deux quantités et de mesurer le coefficient angulaire de la tangente à cette courbe au point où l'on veut avoir la valeur du coefficient d'élasticité ; on aura ainsi la valeur de la dérivée $\frac{dN}{dV}$ et comme N et V sont donnés

directement par l'observation, il sera facile d'avoir $\frac{dF}{dL}$

Il sera préférable de calculer le coefficient moyen d'élasticité entre deux valeurs voisines de N et de V ; on n'aura alors qu'à faire la différence des deux valeurs de N entre lesquelles on veut mesurer ce coefficient, et aussi celle des deux valeurs correspondantes de V ; le rapport des deux

nombres ainsi obtenus sera mis dans la formule (7) à la place de la dérivée $\frac{dN}{dV}$

Avant de vérifier cette formule par l'expérience, je montrerai qu'elle est justifiée en quelques sorte théoriquement.

Il est évident, à *priori*, que le coefficient d'élasticité ne peut être constant que si la courbe qui représente les valeurs correspondantes de L et de F, ou de R et de F, puisque R est proportionnel à L, est une ligne droite, c'est-à-dire que si les allongements sont proportionnels aux poids tenseurs. Si donc la formule (7), précédemment établie, est exacte,

en y introduisant la condition que $\frac{dF}{dL}$ est constant, elle doit

conduire à la loi de proportionnalité que je viens d'indiquer.

Considérons la première valeur du coefficient d'élasticité donnée par la formule (1); $\frac{dF}{dL}$ sera constant si on a

$$N + L \frac{dN}{dL} = K$$

K étant une constante. On peut écrire

$$NdL + LdN = KdL$$

d'où en intégrant (8) $NL = KL + C$

C étant une constante.

Soit L_0 la valeur initiale de L lorsque l'enveloppe élastique n'éprouve aucune tension. Pour $L = L_0$ on a $N = 0$, et en introduisant ces conditions dans la formule (8), il vient

$$(9) \quad 0 = K L_0 + C$$

Retranchant membre à membre les équations (8) et (9), on obtient

$$NL = K (L - L_0)$$

Mais on a
$$N = \frac{2F}{R} = 4\pi \frac{F}{L}$$

Si on remplace N par cette valeur, il vient enfin, après simplification,

$$F = \frac{K}{4\pi} (L - L_0)$$

Cette relation exprime que les allongements $L - L_0$ sont proportionnels à la réaction élastique F de la substance, ou, ce qui revient au même, aux poids tenseurs. La formule (4) conduit donc bien au résultat que l'on pouvait prévoir *a priori*.

Lorsque la substance sur laquelle on opère ne sera pas très-extensible et qu'on ne fera pas varier le volume de quantités considérables la loi de proportionnalité précédente sera sensiblement vérifiée. Il serait donc utile de savoir *a priori* comment doivent varier le volume V et la composante normale N pour qu'il en soit ainsi, afin que cette loi de proportionnalité, si elle existe, soit immédiatement mise en évidence par les valeurs de N et de V données par l'observation.

Considérons pour cela la valeur du coefficient d'élasticité donnée par la formule (7). Si la loi précédente est vérifiée, $\frac{dF}{dL}$ sera constant et on aura

$$N + 3V \frac{dN}{dV} = K,$$

K étant une constante; d'où

$$(N - K) dV + 3V dN = 0$$

Posons
$$N - K = z$$

d'où
$$dN = dz$$

Si on remplace dans l'équation précédente et qu'on multiplie en même temps par z^2 , il viendra

$$z^3 dV + 3z^2 V dz = 0$$

d'où en intégrant $z^3 V = C$

C étant une constante.

Remplaçant z par sa valeur, nous obtenons.

$$(10) \quad (N - K)^3 V = C$$

On détermine la constante C par la condition que pour $V = V_0$, V_0 étant le volume initial, on a $N = 0$, ce qui donne

$$(11) \quad - K^3 V_0 = C$$

En retranchant membre à membre les équations (10) et (11), on obtient

$$(N - K)^3 V = - K^3 V_0$$

$$\text{d'où } K = \frac{N}{1 - \sqrt[3]{\frac{V_0}{V}}}$$

Lors donc que les diverses valeurs correspondantes trouvées pour N et pour V, portées dans cette dernière expression, donneront au second membre toujours la même valeur, les allongements seront proportionnels aux poids tenseurs, le coefficient d'élasticité sera constant et la valeur constante de ce coefficient s'obtiendra, d'après la formule (7), en multipliant par le facteur $\frac{1}{4\pi}$ la valeur de K précédemment obtenue.

B. — Application au caoutchouc.

Dans les expériences que j'ai faites sur le caoutchouc, je me suis proposé de vérifier en même temps l'exactitude de la formule (7) et celle de la loi indiquée plus haut qui assigne au produit de la longueur par le coefficient d'élasticité une valeur constante.

J'ai choisi un ballon dont l'enveloppe fût sensiblement sphérique et dont la dilatation fût aussi régulière que possible. Il est malheureusement assez difficile d'en trouver qui satisfassent à ces deux conditions. D'ailleurs, l'inégalité de résistance à l'extension que présente le caoutchouc suivant divers directions, montre que le volume de l'enveloppe ne doit pas rester semblable à lui-même et que, fût-il sphérique au début de l'expérience, il ne le serait plus à la fin. De là une cause d'erreur que je n'ai pas pu éliminer et dont l'effet se fera d'autant plus sentir que le ballon sera dans un état de tension plus considérable. On ne pourra donc demander à l'expérience qu'une vérification un peu grossière des formules théoriques que j'ai établies précédemment.

Après avoir fixé le ballon de caoutchouc à l'extrémité d'un tube de verre assez long, je l'ai introduit dans un ballon en verre préalablement rempli d'eau et j'ai versé des volumes d'eau déterminés au moyen d'une éprouvette graduée. La capacité de cette enveloppe élastique était ainsi connue à chaque instant, si on avait soin de retrancher du volume total du liquide versé le volume occupé par l'eau dans le tube de verre.

La composante normale due à l'élasticité était, à chaque observation, donnée par la différence des niveaux du liqui-

de dans le ballon en verre et dans le tube aboutissant au ballon de caoutchouc. On a mesuré cette différence de niveau en appliquant contre le tube en verre une règle divisée; il eût été superflu de la déterminer plus exactement, avec le cathétomètre, puisque la formule (7), dans laquelle on l'introduira, ne peut être qu'approchée en raison du défaut de sphéricité du ballon élastique et de son inégale distension dans tous les sens.

J'ai obtenu ainsi une série de valeurs correspondantes de N et de V et, par différence, les valeurs successives de dN et de dV . Soient N_1, N_2, N_3 , et V_1, V_2, V_3 une série de trois valeurs consécutives de la composante normale et du volume; pour avoir les valeurs de dN et de dV qui correspondent à N_2 et à V_2 , j'ai pris les moyennes des différences

$$N_2 - N_1 \text{ et } N_3 - N_2$$

ainsi que les moyennes des différences

$$V_2 - V_1 \text{ et } V_3 - V_2$$

Le tableau suivant contient, dans les premières colonnes les nombres obtenus pour V, dV en centimètres cubes, N, dN en centimètres; dans la dernière colonne sont inscrites les valeurs du produit

$$\sqrt[3]{V} \left(N + 3V \frac{dN}{dV} \right)$$

de la racine cubique du volume par le coefficient d'élasticité,

en négligeant le facteur $\frac{4}{4\pi}$. La longueur L d'une circon-

férence de grand cercle étant proportionnelle à la racine cubique du volume, le produit précédent doit être constant.

V	dV	N	dN	$\sqrt[3]{N + 3V \frac{dN}{dV}}$
209.34	4.36	13 »	2 »	
213.70	4.24	15 »	1.80	1779
217.94	4.06	16.80	1.80	1647
222.90	4.20	18.60	1.75	1679
227.10	4.50	20.35	1.75	1795
231.60	4.15	22.10	1.70	1824
235.75	4.42	23.80	1.70	1875
240.17	4.53	25.50	1.50	1763
244.70	4.47	27 »	1.50	1698
249.17	4.55	28.50	1.50	1746
253.70	4.55	30 »	1.15	1645
258.25	4.65	31.25	1.20	1533
262.90	4.60	32.45	1.25	1553
267.50	4.60	33.55	1.05	1504
272.10		34.60		

Les nombres contenus dans la dernière colonne devraient être égaux ; on voit qu'ils oscillent autour d'une valeur moyenne et si on tient compte des causes d'erreur que j'ai indiquées plus haut, on peut regarder ces valeurs comme constituant une vérification suffisante de la formule (7) et de la loi que j'ai rappelée.

On pourra donc appliquer cette nouvelle méthode de détermination du coefficient d'élasticité dans tous les cas, et

ils sont nombreux et intéressants, où il eût été impossible d'opérer d'après la méthode ordinaire. C'est ainsi que l'on pourra étudier l'élasticité de la substance pulmonaire, de la membrane de la vessie, des artères, etc...

II

VESSIE NATATOIRE DES POISSONS.

Les naturalistes ne sont pas d'accord sur l'usage auquel est destinée la vessie natatoire des poissons. La principale difficulté que l'on rencontre, quand on veut assigner à cet organe une fonction physiologique bien déterminée, résulte des modifications nombreuses et bizarres qu'il présente. Parmi les espèces les plus voisines, en effet, les unes possèdent une vessie plus ou moins grande, les autres n'en offrent que des vestiges, ou en manquent totalement. La vessie peut être simple, ou formée de deux poches communiquant entre elles ou divisée en plusieurs lobes ; elle communique quelquefois avec le tube digestif ; d'autres fois elle est complètement close.

Quelques auteurs ont regardé cet organe comme un poumon imparfait qui établirait une liaison entre la classe des poissons et celle des batraciens ; ils citent comme exemple la vessie de *Lépidosiren* dont les parois présentent une structure aréolaire et reçoivent des ramifications du vaisseau qui porte le sang veineux aux branchies. Mais cette analogie ne peut plus être invoquée lorsqu'on considère le même organe dans d'autres espèces où il prend un développement considérable sans offrir en rien une structure qui rappellerait celle du poumon.

En abandonnant l'idée que la vessie natatoire est l'analogue dégénéré d'un organe à fonction bien déterminée offert par les animaux des classes voisines de celles des poissons, on devait se demander si la présence de cet organe, que les poissons seuls possèdent, n'était pas intimement liée aux conditions d'existence de ces animaux, à la nature même du milieu dans lequel ils vivent.

Tout porte à croire en effet qu'il constitue avant tout un appareil hydrostatique ; aussi a-t-on supposé qu'il était destiné : 1° à maintenir le poisson en équilibre dans l'eau ; 2° à le rendre plus lourd ou plus léger et par suite à lui permettre de monter et de descendre à la manière d'un Ludion.

Ces deux hypothèses sont erronées ainsi que l'a démontré le premier M. Monoyer dans ses *Recherches expérimentales sur l'équilibre et la locomotion chez les poissons*^(*)

Dans ce travail on trouve en effet la démonstration des propositions suivantes :

« 1° L'équilibre des poissons est instable c'est-à-dire que le centre de gravité est au-dessus du centre de poussée lorsqu'ils sont dans le decubitus abdominal ;

« 2° Le jeu des nageoires et particulièrement de la caudale est nécessaire au maintien du decubitus abdominal ;

« 3° Non-seulement la vessie aérienne ne contribue pas à rendre stable l'équilibre des poissons en allégeant leur région dorsale, mais encore elle est un obstacle à la stabilité de leur équilibre, car elle allège la région abdominale. »

Il résulte clairement de là que la première hypothèse est inadmissible. Relativement à la seconde, M. Monoyer a démontré expérimentalement la proposition suivante :

(*) Monoyer. — *Annales des sciences naturelles*, 1866. 5^e série, Zoologie VI, p. 5.

« Les poissons ne montent ni ne descendent à la manière des Ludions, c'est-à-dire par des variations seules de leurs poids spicifique. Ces mouvements s'opèrent par le changement de position relative du centre de gravité, soit en avant soit en arrière du centre de poussée, changement qui est dû au déplacement en sens contraire de la masse gazeuse contenue dans la vessie aérienne et qui a pour effet de faire basculer la tête des poissons en haut ou en bas et la queue dans la direction opposée. Les nageoires se chargent alors de faire avancer le poisson dans la direction nouvelle qu'a prise l'axe de son corps. »

Cette proposition, ainsi que le fait remarquer l'auteur, n'est pas démontrée d'une manière générale et il n'entend l'appliquer qu'aux poissons sur lesquels ont porté ses expériences. Je vais ajouter un exemple à ceux que M. Monoyer a donnés et montrer combien les résultats auxquels je suis parvenu, dans l'étude de l'élasticité du caoutchouc, rendraient facilement compte du mécanisme qui produirait le changement de direction de l'axe longitudinal, chez un poisson particulier, la carpe, en utilisant précisément la forme de sa vessie et les particularités qu'elle présente.

Les parois de la vessie natatoire des poissons sont formées de deux tuniques principales : l'une mince, interne, de la nature des tissus muqueux ; l'autre externe, fibreuse, épaisse et résistante, constituée principalement par une substance gélatineuse connue sous le nom d'ichthyocolle ou colle de poisson.

Chez la carpe, la vessie est formée de deux réservoirs, l'un cylindrique, l'autre affectant la forme d'un cône dont le rayon de base est sensiblement égal ou un peu inférieur à celui de la partie cylindrique. Ces deux réservoirs communiquent entre eux par un tube court et étroit. La chambre cylindrique de la vessie possède les deux tuniques dont il vient

d'être parlé, la chambre conique est dépourvue de la seconde qui est épaisse et plus résistante. Cette particularité anatomique dont je vais montrer l'importance n'est signalé, à ma connaissance, dans aucun ouvrage.

Cherchons quel est l'état de tension des parois de ces deux sacs aériens. La tension du gaz qu'ils renferment est équilibrée en chaque point par la composante normale due à l'élasticité.

Soient R le rayon de la partie cylindrique, r le rayon de la section principale de la partie conique à une distance h du sommet ; je supposerai que le rayon de la base du cône est égal à R . La composante normale sera, pour la partie cylindrique

$$(1) \quad N = \frac{F}{R}$$

et pour la partie conique, en un point de la section principale de rayon r

$$(2) \quad N' = \frac{F'}{r}$$

H étant la hauteur du cône, on a

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{h}$$

d'où

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \frac{H}{h}$$

En remplaçant dans (2) il vient

$$N' = \frac{F'H}{Rh}$$

Les deux parties de la vessie communiquant entre elles, il en résulte que la composante normale élastique qui fait

équilibre à la tension du gaz intérieur doit être la même en chaque point et que l'on doit avoir

$$\frac{F}{R} = \frac{F'}{R} \frac{H}{h}$$

ou

$$F = F' \frac{H}{h}$$

Le rapport $\frac{H}{h}$ étant plus grand que l'unité, il en résulte que F' est plus petit que F , c'est-à-dire que la paroi de la partie conique de la vessie est dans un état de tension moins grande que celle de la partie cylindrique.

Ce résultat donne, indépendamment de toute hypothèse sur l'usage de la vessie, l'explication théorique de l'absence de la seconde tunique sur la partie conique de cet organe. La résistance moins grande de la paroi correspond à une force moindre que cette paroi doit équilibrer.

Si on admet que la vessie natatoire est destinée à permettre aux poissons de changer l'inclinaison de leur axe longitudinal, on voit immédiatement comment le résultat peut être obtenu chez la carpe. En agissant soit par les muscles de la paroi abdominale, soit par les fibres musculaires que renferme la deuxième tunique, sur une partie de la vessie, l'animal rendra plus légère l'une des parties de son corps qui par suite basculera ; les mouvements ordinaires de la queue et des nageoires le feront alors progresser obliquement par rapport à l'horizontale. On ne refusera pas d'assigner à la vessie un but analogue toutes les fois qu'elle prend des dimensions suffisantes, si on remarque surtout que chez certaines espèces elle est recouverte d'un tissu musculaire. Mais on objectera l'absence de l'organe qui nous occupe chez beaucoup de poissons, lesquels peuvent cependant se déplacer dans tous les sens aussi bien que ceux qui en sont pourvus.

Il faut donc admettre que l'orientation que l'animal peut donner à la queue ou aux nageoires suffit dans certains cas pour produire le changement de direction par rapport à l'horizontale. La vessie ne ferait alors que faciliter ces changements de direction, soit parce que les poissons qui possèdent ces réservoirs compressibles éprouvent dans l'eau une plus grande résistance au déplacement de l'axe longitudinal par suite de la forme de leur corps, soit parce qu'ils ne pourraient produire qu'avec difficulté ces mêmes déplacements en raison de la forme ou de la mobilité de leur queue ou de la position de leurs nageoires. De nouvelles recherches sont évidemment à faire à ce sujet.

Il résulte de là que le rôle assigné par M. Monoyer à la vessie natatoire des poissons est mis hors de doute dans plusieurs cas et que les résultats que j'ai obtenus en étudiant l'élasticité du caoutchouc peuvent fournir des indications utiles dans certaines questions de physiologie.

III

THÉORIE DU TOCOGRAPHE

Jusqu'à ce moment, je n'ai considéré que les phénomènes dus à la composante normale de la tension élastique des membranes. Il est intéressant de savoir comment se fait la transmission des pressions à travers ces corps, car les résultats seront applicables à plusieurs actes physiologiques.

Imaginons un ballon de caoutchouc enfermé dans un ballon en verre ; mettons chacun d'eux en communication avec un manomètre à eau et supposons qu'on puisse faire

varier à volonté la pression dans l'un ou l'autre de ces ballons, une disposition facile à imaginer permettra d'obtenir ce résultat.

Soit H la pression dans le ballon de caoutchouc, H_1 la pression dans le ballon en verre, N la tension normale due à l'élasticité. Dans l'état d'équilibre on aura

$$(1) \quad H = N + H_1$$

Lorsque nous ferons varier H_1 , N et H varieront de manière à ce qu'un nouvel état d'équilibre prenne naissance et la variation de la pression H dépendra de la variation de H_1 , et aussi de l'état de tension du caoutchouc.

Supposons, en effet, que le premier état d'équilibre, correspondant à l'équation (1), ait lieu lorsque la tension N n'a pas atteint encore sa valeur maximum et faisons augmenter la pression extérieure H_1 de h_1 ; il en résultera une variation de volume du ballon et par suite de la pression H ; mais d'après l'hypothèse faite sur la valeur de N , cette diminution de volume entraînera une diminution n de la tension normale et une augmentation h de la pression intérieure. Le nouvel état d'équilibre sera, par suite, donné par l'équation

$$H + h = N - n + H_1 + h_1$$

En tenant compte de l'équation (1), il viendra

$$(2) \quad h = h_1 - n$$

Ce qui prouve que l'augmentation de pression extérieure h_1 n'est pas transmise tout entière au gaz intérieur; le manomètre du ballon de caoutchouc n'accusera qu'un accroissement de pression moindre que celui qui aura été produit à l'extérieur.

Supposons maintenant que le ballon en caoutchouc soit dans un état de tension tel que la composante normale N reste constante pour des variations considérables du volume.

Si la pression extérieure H_1 vient à augmenter de h_1 , il s'en suivra une diminution du volume du ballon en caoutchouc, à laquelle ne correspondra aucune variation dans la valeur de N ; la pression intérieure augmentera de h et on aura pour nouvelle équation d'équilibre

$$\begin{aligned} H + h &= N + H_1 + h_1 \\ \text{d'où} \quad h &= h_1 \end{aligned}$$

L'augmentation de pression intérieure est alors égale à l'accroissement de pression extérieure.

Supposons enfin que l'état de tension du caoutchouc soit tel que la composante normale ait dépassé sa valeur maximum ; si on fait augmenter la pression extérieure de h_1 , la diminution de volume du ballon qui résultera de ce fait, sera accompagnée d'une augmentation n de la composante normale et en appelant h l'augmentation de la pression intérieure, le nouvel état d'équilibre sera défini par la relation

$$\begin{aligned} H + h &= N + n + H_1 + h_1 \\ \text{d'où} \quad h &= n + h_1 \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'augmentation de pression intérieure sera plus grande que l'augmentation de pression extérieure.

Tous ces résultats sont confirmés par l'expérience ; ils sont certainement curieux à considérer en eux-mêmes, mais peu susceptibles d'applications physiologiques, car on ne trouve pas dans l'organisme des membranes assez extensibles pour que les variations du volume et de la tension normale puissent présenter les trois cas que nous venons d'examiner dans le caoutchouc.

Les membranes organiques à travers lesquelles nous pouvons avoir à étudier des transmissions de pression ne présentent que de faibles variations de volume suivant leur état de tension. On réalisera assez exactement ces conditions si

on suppose que l'expérience est faite sur un ballon en peau de gant par exemple, ou, ce qui est plus facilement réalisable, si on opère sur un ballon en caoutchouc recouvert d'une peau de gant qui en empêchera l'extension.

Voyons comment une pression se transmet à travers une telle enveloppe. L'expérience a été faite par M. Pouillet; elle a montré que le manomètre communiquant avec l'intérieur du ballon restait stationnaire tant que la pression extérieure H_1 était plus petite que la pression intérieure H ; lorsque H_1 devient plus grand que H , le manomètre accuse seulement la différence $H_1 - H$.

On peut rendre compte de ces résultats de la manière suivante. Au début de l'expérience on a :

$$H = N + H_1$$

Si H_1 augmente de h_1 , cette augmentation ne peut se transmettre à l'intérieur du ballon qu'après avoir, en quelque sorte, vaincu la résistance que cette force rencontre sur son passage, résistance qui provient de la tension de la membrane du ballon, en sorte que l'augmentation h_1 est employée à diminuer la tension de la membrane de cette même quantité. Comme la membrane est peu extensible, cette diminution de tension élastique ne fait pas changer sensiblement son volume, si bien que la pression H de l'air intérieur ne change pas; dans le cas du ballon en caoutchouc, au contraire, la variation de tension élastique était forcément accompagnée d'une variation de volume qui entraînait une variation de la pression intérieure.

Pour la membrane peu extensible, il résulte de ce qui précède que la pression intérieure ne changera pas tant que l'augmentation h_1 de H_1 sera inférieure à la tension normale N ; lorsque cette augmentation h_1 égalera N , la membrane ne sera plus tendue et si h_1 continue à croître, il en résulte

tera un changement de volume de l'enveloppe et par suite du volume de l'air intérieur dont la pression H variera de manière à devenir égale, à la pression extérieure.

Donc, en définitive, tant que la pression extérieure à l'enveloppe élastique est plus petite que la pression intérieure, celle-ci restera invariable quand celle-là changera et le manomètre communiquant avec l'intérieur des ballons n'accusera jamais que l'excès de la pression extérieure sur la pression intérieure.

Ce sont ces résultats que M. Poulet a utilisés pour déterminer quelle était, dans l'effort expulsif de l'accouchement, la part qui revenait aux muscles de l'utérus et aux muscles de l'abdomen.

A cet effet, M. Poulet se sert de deux manomètres à mercure munis de flotteurs enregistrant les pressions sur un même cylindre mù par un mouvement d'horlogerie. Chacun des manomètres communique avec un ballon en caoutchouc placé, l'un dans la cavité utérine, l'autre dans le rectum au-dessus du niveau de la tête fœtale. D'après l'auteur, le manomètre réuni à ce dernier ballon donne l'action isolée des muscles abdominaux ; l'autre donne l'action combinée des mêmes muscles et de ceux de l'utérus (*). On comprend comment, de la comparaison des deux courbes obtenues et des résultats de l'expérience précédente que je viens d'expli-

(*) Il y a peut-être une réserve à faire sur cette assertion de M. Poulet.

Il n'est pas évident, en effet, que les ballons de l'utérus et du rectum transmettent exactement les pressions des deux couches de muscles pendant les efforts de l'accouchement, par suite de la présence de corps résistants dans le voisinage de ces ballons. Les conditions de l'expérience seraient donc probablement défectueuses s'il s'agissait de déterminer des valeurs absolues, mais elles paraissent suffisantes pour justifier les conclusions relatives de l'auteur, que je cite plus loin. Ce qui, dans tous les cas, me paraît incontestable, c'est la théorie que j'ai donnée du principe du Tocographe; la sensibilité seule de l'appareil est sujette à discussion.

quer, on a pu déduire l'action isolée des muscles de l'utérus.

Dans son premier travail, M. Pouillet est arrivé aux conclusions suivantes :

« L'étude des deux tracés montre qu'ils dépendent de muscles dont la contraction n'a pas le même type. Le point culminant du tracé utérin existe vers le milieu de la contraction ; au contraire le point culminant du tracé abdominal se rencontre au début de la contraction. Tandis que l'effort du muscle utérin augmente d'énergie jusqu'au milieu du temps de la douleur pour décroître ensuite progressivement, les muscles abdominaux donnent d'emblée toute leur puissance d'action ; puis ils suspendent leur effet et le recommencent, mais avec une moindre énergie ; puis nouvelle suspension, nouvel effort encore moindre que le précédent, et ainsi de suite ; chaque contraction offre une série d'efforts indiqués par des plateaux progressivement dégradés (*). »

L'explication que je viens de donner de la transmission des pressions à travers une paroi élastique peu extensible, rend compte d'un autre fait que tous les praticiens ont observé. Lorsqu'on introduit une sonde dans la vessie et que l'on veut favoriser l'émission de l'urine en exerçant avec la main une pression sur la paroi abdominale, on constate qu'il faut développer un effort considérable pour obtenir le résultat que l'on se propose. C'est qu'en effet la pression mécanique exercée sur l'abdomen n'est transmise, en partie, au liquide de la vessie, qu'autant qu'elle est supérieure à la pression que ce fluide supporte déjà et l'excès seulement de la première pression sur la seconde agit sur le liquide à expulser.

(*) — *Bulletin de la Société de chirurgie de Paris.* — Février 1879.

Vu et approuvé :

Marseille, le 22 février 1880.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

E. REBOUL.

Permis d'imprimer.

Aix, 23 février 1880.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE,

BOURGET.

SECONDE THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

I — Des densités des vapeurs et en particulier de celles qui sont dites *anomales*.

II — Du spectroscope et de ses applications aux recherches de biologie.

Vu et approuvé :

Le 22 février 1880.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

E. REBOUL.

Vu et permis d'imprimer :

Le 23 février 1880.

LE RECTEUR,

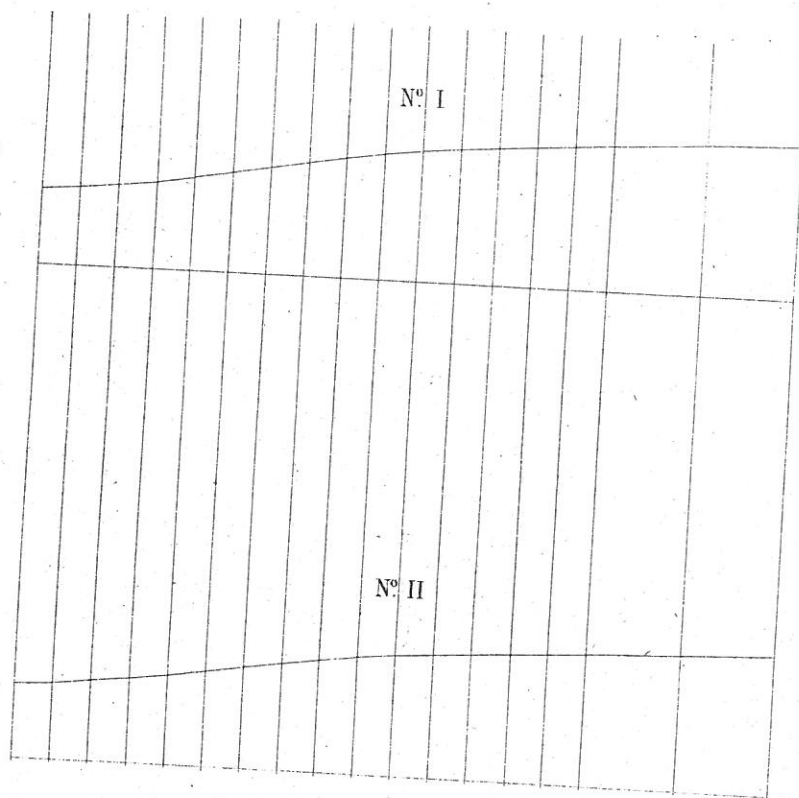
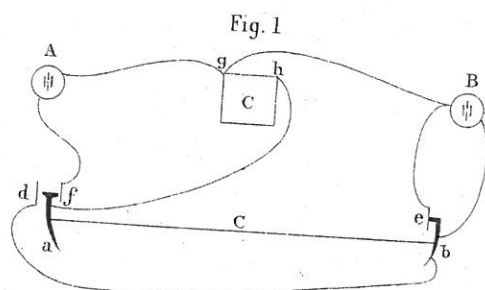
BOURGET.

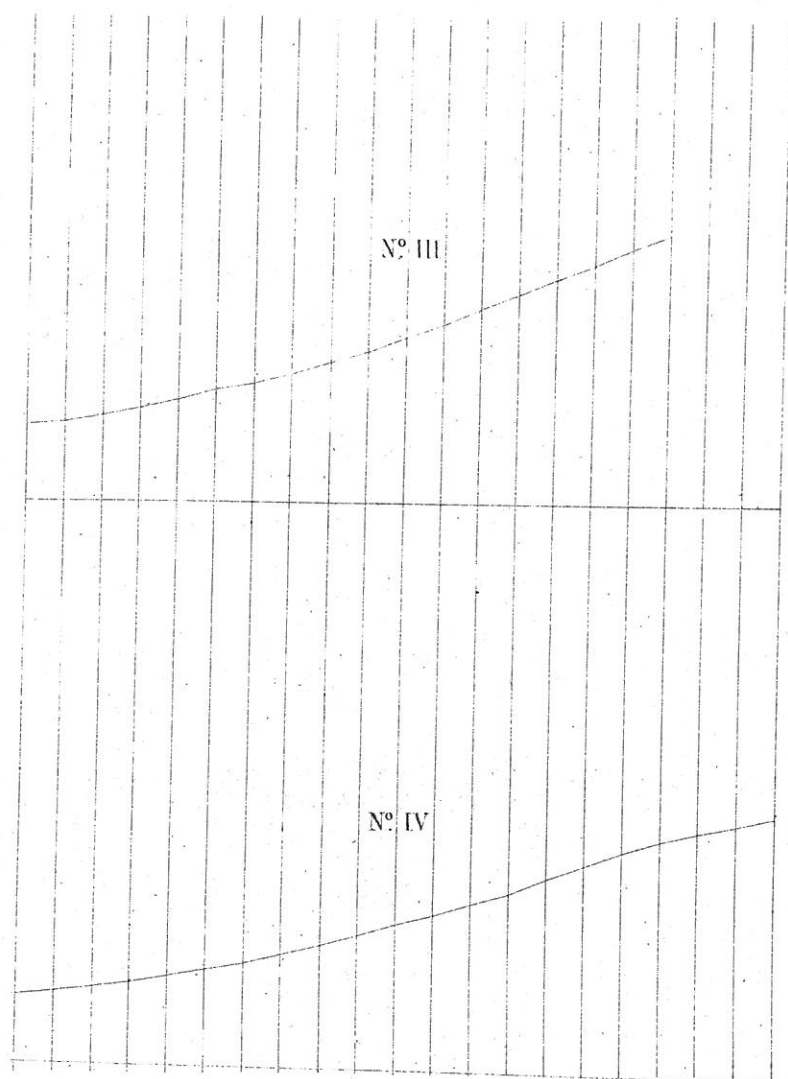
TABLE DES MATIÈRES

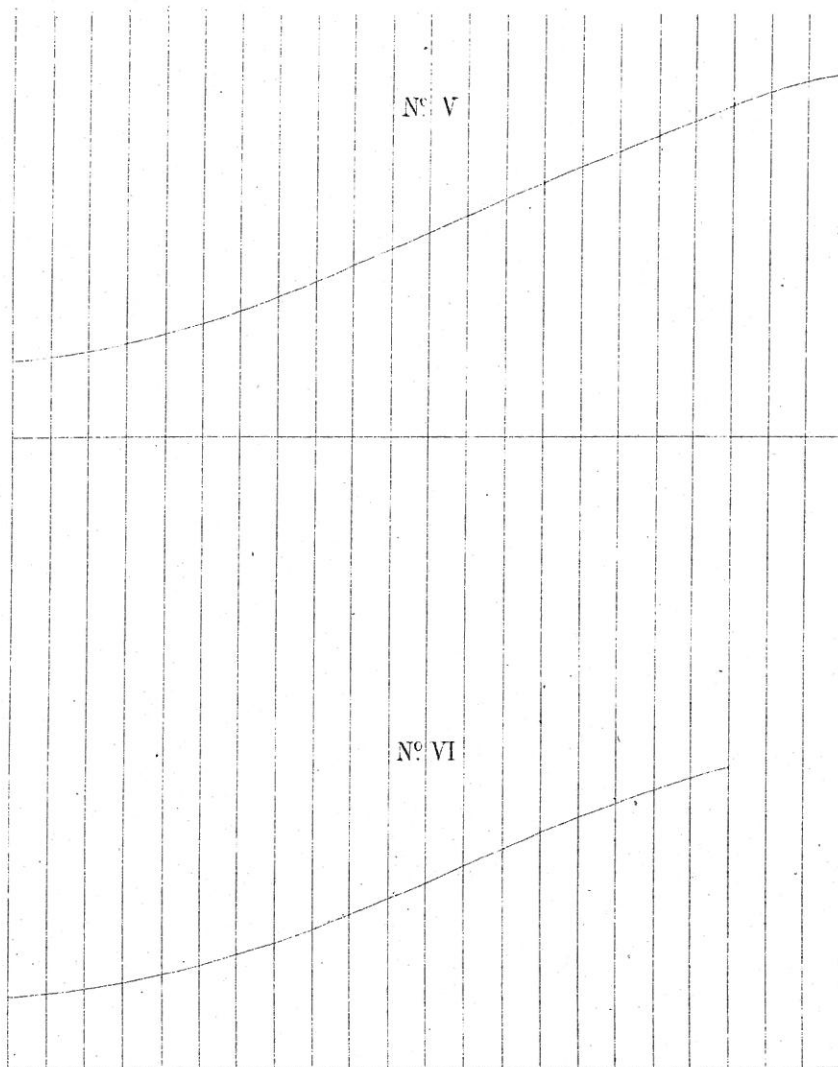
INTRODUCTION.....	I
ACTION DE LA CHALEUR SUR LE CAOUTCHOUC :	
I. — Phénomènes thermiques qui accompagnent la traction.	4
II. — Variation du coefficient d'élasticité avec la température.	6
COMPOSANTE NORMALE D'UNE ENVELOPPE ÉLASTIQUE TENDUE :	
I. — Expression théorique de la composante normale.....	25
II. — Vérification de la formule pour les membranes solides et élastiques :	
A. <i>Phénomènes présentés par le caoutchouc</i>	30
B. <i>Instruments de mesure. — Vérification de la formule</i>	33
III. — Lois de l'élasticité de traction.	47
IV. — Conclusions ...	65

APPLICATIONS :

I. — Détermination du coefficient d'élasticité d'une enveloppe solide :	
A. <i>Formules relatives au cas d'une enveloppe sphérique</i>	67
B. <i>Application au caoutchouc</i>	73
II. — Vessie natatoire des poissons.	76
III. — Théorie du Tocographe.....	81
Propositions données par la Faculté.....	88

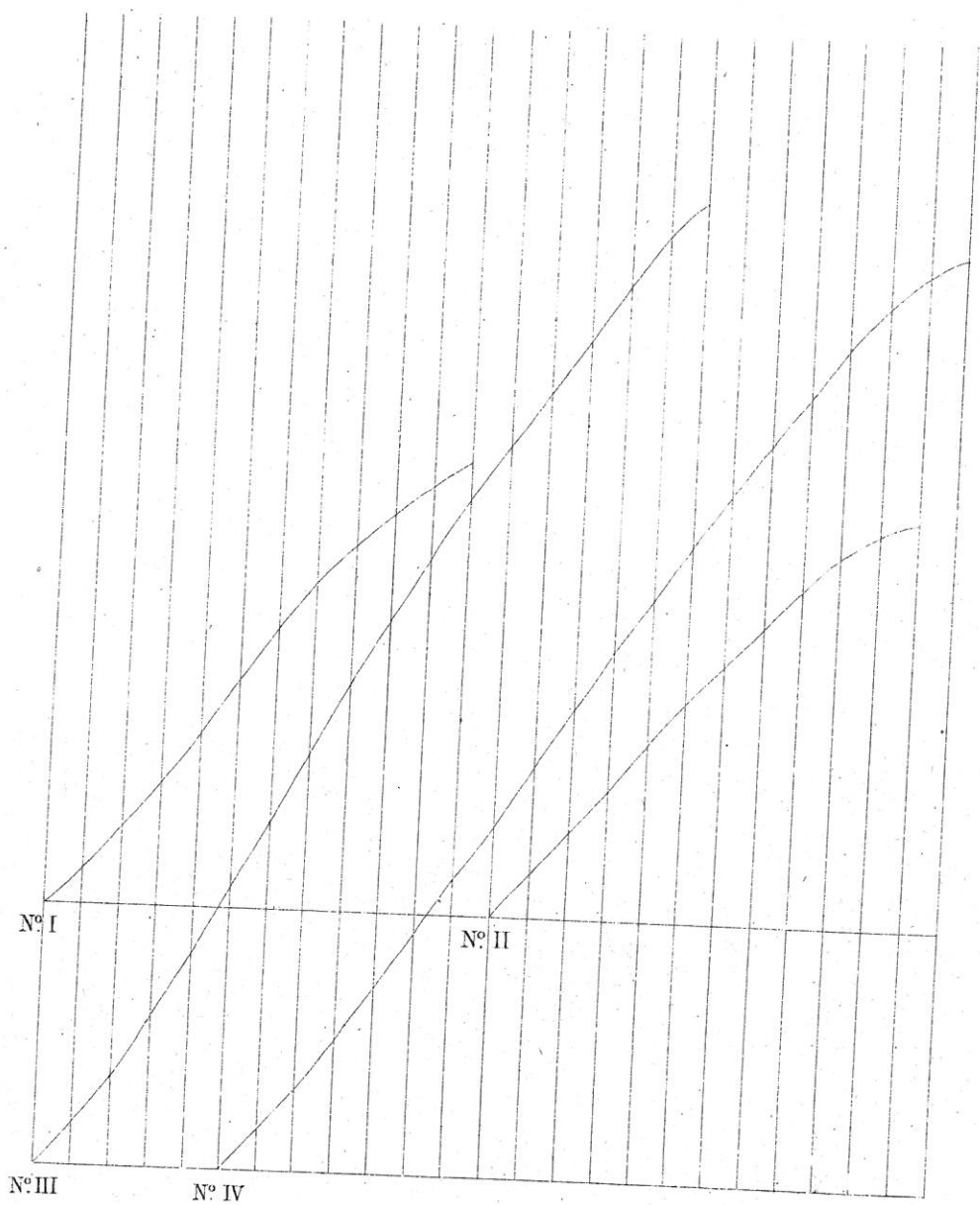






Nº VII

Nº VIII





Nº V

Nº VI

Nº VII

Nº VIII