

Masterarbeit

Anti-Plane Shear Verformungen in der nichtlinearen Elastizitätstheorie

Max Jendrik Voss

22. März 2017

Studiengang:	Mathematik Master
Erstgutachter:	Prof. Dr. Patrizio Neff
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Mircea Birsan

In die gebundenen Exemplare der Abschlussarbeit einzubinden und nach Fertigstellung der gebundenen Exemplare von der / dem Studierenden zu unterschreiben:

Versicherung an Eides Statt

Ich versichere an Eides statt durch meine untenstehende Unterschrift,

- dass ich die vorliegende Arbeit - mit Ausnahme der Anleitung durch die Betreuer - selbstständig ohne fremde Hilfe angefertigt habe und
- dass ich alle Stellen, die wörtlich oder annähernd wörtlich aus fremden Quellen entnommen sind, entsprechend als Zitate gekennzeichnet habe und
- dass ich ausschließlich die angegebenen Quellen (Literatur, Internetseiten, sonstige Hilfsmittel) verwendet habe und
- dass ich alle entsprechenden Angaben nach bestem Wissen und Gewissen vorgenommen habe, dass sie der Wahrheit entsprechen und dass ich nichts verschwiegen habe.

Mir ist bekannt, dass eine falsche Versicherung an Eides Statt nach § 156 und nach § 163 Abs. 1 des Strafgesetzbuches mit Freiheitsstrafe oder Geldstrafe bestraft wird.

Ort, Datum

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Mathematische Grundlagen	2
2.1	Elastizitätstheorie	2
2.2	Polarzerlegung	3
2.3	Matrixinvarianten	4
2.4	Matrixdifferenzierung	4
3	Anti-Plane Shear Funktionen	7
3.1	Geometrische Bedeutung	7
3.2	Berechnung der Invarianten	8
3.3	Berechnung der Eigenwerte	9
3.4	APS-Randwerte	10
3.4.1	Dirichlet-Randbedingungen	10
3.4.2	Neumann-Randbedingungen	10
3.5	Fragestellung	11
3.5.1	Veranschaulichung	12
3.5.2	Minimierungsmethoden	13
4	Rückwärts-Minimierung (erst einsetzen, dann minimieren)	15
4.1	Euler-Lagrange-Gleichungen	15
4.2	Konvexität	16
4.3	APS-Konvexität	17
4.3.1	Polykonvexität	19
4.3.2	Rang-1 Konvexität	19
4.4	Bedingung der APS-Konvexität	20
5	Vorwärts-Minimierung (erst minimieren, dann einsetzen)	26
5.1	Fragestellung	26
5.2	Lineare Elastizität	26
5.2.1	Kompressibler Fall	27
5.2.2	Inkompressibler Fall	29
5.3	Inkompressible Materialien	31
5.3.1	Euler-Lagrange-Gleichungen	31
5.3.2	Bedingung APS-Konvex	34
5.3.3	Erste Energiebedingung	37
5.4	Kompressible Materialien	40
5.4.1	Euler-Lagrange-Gleichungen	40
5.4.2	Simple-Plane-Shear	43
5.4.3	Zweite Energiebedingung	44
5.5	Zusammenfassung	48
6	Direkte Methoden	53
7	Beispiele	58
7.1	Mooney-Rivlin-Energie	58
7.2	Neo-Hooke-Energie	59

7.3	Blatz-Ko-Energie	60
7.4	Mihai-Neff-Energie	61
7.5	Knowles-Energie	61
7.6	Bazant-Energie	63
7.7	Ciarlet-Energie	65
7.8	Saint-Venant-Kirchhoff Energie	65
7.9	Fourth-order incompressible elasticity	67
7.10	Hencky-Energie	69
	7.10.1 APS-Konvexität	70
	7.10.2 Erste Energiebedingung	71
	7.10.3 Zweite Energiebedingung	72
7.11	Zug-Druck-Symmetrie	73
7.12	Modell-Energie	76
7.13	Übersicht	80
8	Diskussion	81

1 Einleitung

Anti-Plane Shear (kurz APS) Verformungen sind Teil der nichtlinearen Elastizitätstheorie, welche sich mit der elastischen Verformung von dreidimensionalen Körpern befasst. Die hohe mathematische Komplexheit der Lösung entstehender Gleichung führt dazu, dass es meist nicht analytisch möglich ist, diese zu lösen. APS-Verformungen hingegen sind mathematisch einfache Verformungen und eignen sich damit als Pilotverformungen für erste analytische Rechnungen. Zusätzlich finden sie Anwendung für das Beschreiben von Verformungen in der Nähe von Rissen in Arbeiten von Knowles [11]. Die Fragestellung dieser Arbeit ist:

Welche Bedingungen muss ein elastisches Energiefunktional erfüllen, damit sich APS-Verformungen von alleine einstellen?

Energiefunktionale, die diese Eigenschaft erfüllen, werden im Folgenden APS-zulässig heißen. Die resultierenden Bedingungen für die APS-Zulässigkeit wurden schon von Knowles sowohl für den inkompressiblen Fall [9] als auch im kompressiblen Fall [10] aufgestellt. Diese Gleichungen sollen hier ausführlich hergeleitet werden und insbesondere die Forderung nach Elliptizität neu strukturiert werden.

Es gibt eine Vielzahl an Publikationen weiterer Mathematiker wie beispielsweise von Horgan, Pucci und Saccomandi [7, 16], welche Knowles Arbeiten bestätigen und weiter ausbauen. Trotzdem gibt es scheinbar aktuelle widersprüchige Veröffentlichungen von Gao, Gao [4, 5] zu Knowles Aussagen und allen darauf aufbauenden Publikationen. Dabei ist die primäre Frage:

Wann ist der richtige Zeitpunkt zum Einsetzen von APS-Verformungen?

In dieser Arbeit soll ein besonderes Augenmerk auf die unterschiedlichen Ansätze zwischen oben genannter Publikationen gelegt werden, um damit beide Aussagen in einen gemeinsamen Kontext zu bringen. Dabei werden die beiden unterschiedlichen Zeitpunkte für das Einsetzen von APS-Verformungen Vorwärts- und Rückwärts-Minimierung genannt. Desweiteren werden die Grundlagen der variationellen Methoden der Elastizitätstheorie erläutert.

Zum Ende der Arbeit werden die wichtigsten Energiefunktionale auf die aufgestellten Bedingungen der APS-Konvexität und APS-Zulässigkeit geprüft, um herauszufinden wie restriktiv diese Bedingungen für physikalisch sinnvolle Energiefunktionale sind.

2 Mathematische Grundlagen

2.1 Elastizitätstheorie

Die Elastizitätstheorie beschäftigt sich mit der elastischen Verformung von Körpern. Dabei soll die Verformung des dreidimensionalen elastischen Körpers $\Omega \in \mathbb{R}^3$ durch die Abbildung $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega' \in \mathbb{R}^3$ beschrieben werden. Ziel ist es, aus einer vorgegebenen Verformung eines Teilstückes des Randes $\Gamma \in \partial\Omega$ und eventuell gegebener Volumenkräften, die resultierende Verformung φ des gesamten Körpers Ω vorherzusagen.

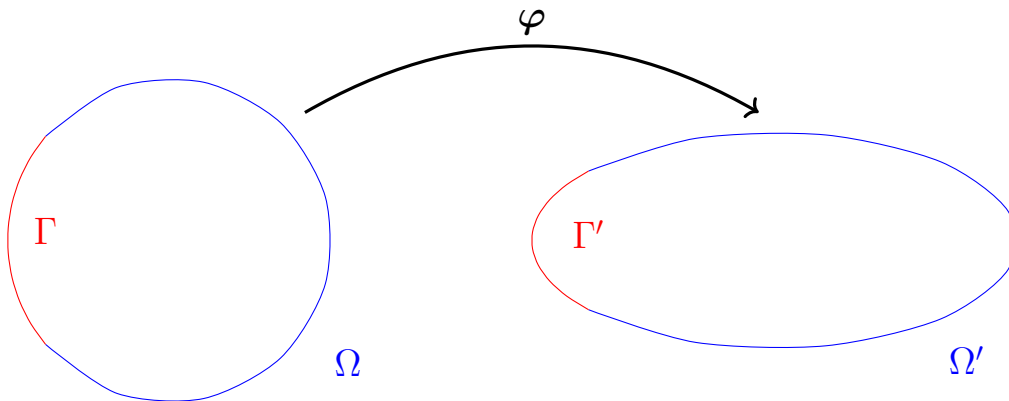


Abbildung 1: Mögliche Verformung φ des gesamten Körpers Ω bei vorgegebener Verformung des Randstückes Γ .

Die Idee für die mathematische Beschreibung der Deformation liegt in der Minimierung einer Verformungsenergie. Ein elastischer Körper Ω wird durch Aufbringen von Energie in eine deformierte Form Ω' gebracht und gibt aufgrund seiner Elastizität diese Energie beim Rückgang in seine Ursprungslage wieder vollständig zurück. Dabei wird sich immer die Verformung φ so einstellen, dass die gespeicherte lokale Verformungsenergie des gesamten Körpers minimal ist; unter der Einschränkung, dass vorgegebene Randbedingungen erfüllt sind.

Ein Funktional, das einer Verformung φ den Wert der Verformungsenergie zuordnet, wird als Energiefunktional bezeichnet. Da die gespeicherte Verformungsenergie eine lokale Eigenschaft des Materials ist, wird die Verformung von infinitesimalen Teilwürfeln von Ω betrachtet und man erhält die gesamte Energie des Körpers über die Summation aller infinitesimalen Teilwürfel.

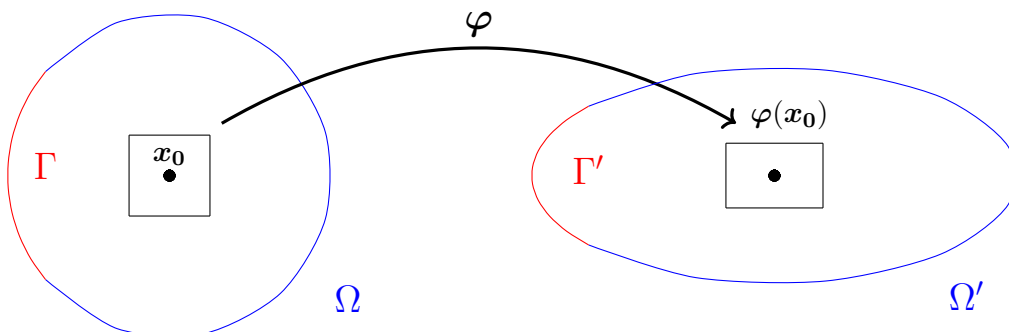


Abbildung 2: Verformung eines infinitesimalen Teilstücks durch φ .

Die Taylorentwicklung von φ an einer Stelle x_0 lautet

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \nabla\varphi(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0)^2) . \quad (2.1)$$

Für ein infinitesimales Teilstück werden alle Terme höherer Ordnung als der lineare Term $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ weggelassen. Der gesamte Körper soll homogen sein, sodass die gespeicherte Verformungsenergie W der Teilwürfel nicht vom Ort \mathbf{x}_0 abhängen darf. Des Weiteren sorgt der Term $\varphi(\mathbf{x}_0)$ lediglich für eine Verschiebung des gesamten Teilwürfels. Äußere Kräfte wie die Gravitation werden für die Betrachtung zunächst vernachlässigt; daraus folgt, dass ein Verschieben des gesamten Körpers nicht zu einer Änderung der Verformungsenergie führt. Der Term $\varphi(\mathbf{x}_0)$ wird also für die Verformungsenergie W der Teilwürfel nicht benötigt.

Mit diesen Vorüberlegungen hängt W also nur noch von $\nabla\varphi$ ab. Die Summation über alle Teilwürfel von Ω liefert im Grenzübergang die Gesamtenergie $I(\varphi)$ des Körpers

$$I(\varphi) := \int_{\Omega} W(\nabla\varphi) \, dx. \quad (2.2)$$

Der Ansatz der Minimierung der Verformungsenergie über alle möglichen Verformungen, die die vorgegebenen Randbedingungen erfüllen, führt zu dem Variationsproblem

$$I(\varphi) = \int_{\Omega} W(\nabla\varphi) \, dx \longrightarrow \min. \quad (2.3)$$

Dabei wird $\nabla\varphi$ in der Elastizitätstheorie als der **Deformationsgradient** F bezeichnet. Die Elastizitätstheorie beschäftigt sich mit der Untersuchung möglicher Energiefunktionale $W(F)$ mit dem Ziel, für verschiedene Experimente und Materialien ein möglichst allgemein gültiges Modell zu finden.

2.2 Polarzerlegung

Ein Material wird als **isotrop**¹ bezeichnet, wenn der Körper keine Vorzugsrichtung hat. Für den Rest der Arbeit sollen alle Energiefunktionale isotrop sein. Daher hängt $W(F)$ nicht von Drehungen ab. Deswegen wird in der Elastizitätstheorie mit Hilfe der Polarzerlegung zu F eine symmetrische Matrix identifiziert. Des Weiteren wird zwischen rechter und linker Polarzerlegung unterschieden

$$F = V \cdot R \quad \text{und} \quad F = R \cdot U, \quad (2.4)$$

mit einer orthogonalen Matrix $R \in O(3)$ und den beiden positiv-definit symmetrischen Matrizen $U, V \in \text{Sym}(3)$. Daraus folgend werden linker und rechter **Cauchy-Verzerrungstensor** definiert als

$$\begin{aligned} B &:= FF^T = VRR^TV^T = V^2, \\ C &:= F^TF = U^TR^TRU = U^2. \end{aligned}$$

B und C haben aufgrund ihrer einfacheren Berechnung aus F den Vorzug gegenüber V und U . Wegen

$$R \cdot U = V \cdot R \quad \Leftrightarrow \quad U = R^TVR \quad (2.5)$$

besteht die Möglichkeit, die beiden Tensoren B und C ineinander umzurechnen

$$C = U^2 = (R^TVR)(R^TVR) = R^TV^2R = R^TBR. \quad (2.6)$$

Die beiden Verzerrungstensoren unterscheiden sich also nur durch Drehungen und besitzen deswegen die gleichen Eigenwerte. Des Weiteren gilt

$$\|C\|^2 = \langle C, C \rangle = \langle R^TBR, R^TBR \rangle = \langle B, R R^T B R R^T \rangle = \langle B, B \rangle = \|B\|^2. \quad (2.7)$$

¹Isotropie beschreibt die Materialeigenschaft keine Vorzugsrichtung zu haben: $W(QFQ^T) = W(F)$, $\forall Q \in O(3)$, siehe auch Münch und Neff [13, eq. (35)].

2.3 Matrixinvarianten

Zu einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ sind drei **Matrixinvarianten** definiert

$$I_1 = \operatorname{tr}(B), \quad I_2 = \frac{1}{2}[(\operatorname{tr} B)^2 - \operatorname{tr}(B^2)] = \operatorname{tr}(\operatorname{Cof}(B)), \quad I_3 = \det(B), \quad (2.8)$$

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \quad I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \quad (2.9)$$

Dabei sind mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte von B bezeichnet und der Cofaktor einer Matrix ist als

$$\operatorname{Cof}(B) = \det(B)B^{-T} \quad (2.10)$$

definiert. Dabei liegt die Bedeutung des Begriffs Invariante in der Unveränderlichkeit unter orthogonalen Koordinatentransformationen

$$I_i(QBQ^T) = I_i(B) \quad \forall Q \in O(3), \quad i = 1, 2, 3.$$

Isotrope Energiefunktionale, welche hier ausschließlich betrachtet werden, können immer in ihren Invarianten ausgedrückt werden, siehe dazu in Antman, Marsden und Sirovich [1, Kap. 12.13]. Deswegen besteht die Möglichkeit das Energiefunktional $W(F)$ als

$$W(F) = \widetilde{W}(I_1, I_2, I_3) \quad (2.11)$$

aufzufassen. Nach (2.6) ist es egal, ob im Weiteren von den Invarianten von B oder C gesprochen wird, da sie die selben Eigenwerte haben.

Wir wollen für die Invarianten noch Ausdrücke in F finden

$$I_1 = \operatorname{tr}(B) = \langle B, \mathbb{1} \rangle = \langle FF^T, \mathbb{1} \rangle = \langle F, F \rangle = \|F\|^2, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \operatorname{tr}(\operatorname{Cof}(B)) = \langle \det(FF^T)(FF^T)^{-T}, \mathbb{1} \rangle = \det(F) \det(F^T) \langle F^{-T}(F^T)^{-T}, \mathbb{1} \rangle \\ &= \det(F) \det(F) \langle F^{-T}(F^{-T})^T, \mathbb{1} \rangle = \langle \det(F)F^{-T}, \det(F)F^{-T} \rangle = \|\operatorname{Cof}(F)\|^2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$I_3 = \det(B) = \det(FF^T) = \det(F) \det(F^T) = [\det(F)]^2. \quad (2.14)$$

2.4 Matrixdifferenzierung

In dieser Arbeit werden mehrere Ableitungen von Funktionalen der Art $W : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^3$ benötigt. Um die Ableitung an einer Stelle $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ in eine beliebige Richtung $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ zu berechnen, wird der Ausdruck $W(X + H)$ so sortiert, dass nach der Taylor-Entwicklung

$$W(X + H) = W(X) + \langle A, H \rangle + o(H^2) \quad (2.15)$$

der lineare Term $A.H$ die gesuchte Ableitung $DW(X).H$ ist.

Für spätere Rechnungen wollen wir die Invarianten ableiten können und betrachten dafür als erstes Beispiel die Ableitung von $\operatorname{tr}(X)$:

$$\operatorname{tr}(X + H) = \langle X + H, \mathbb{1} \rangle = \langle X, \mathbb{1} \rangle + \langle H, \mathbb{1} \rangle = \operatorname{tr}(X) + \langle \mathbb{1}, H \rangle.$$

Also lautet die Ableitung in X und Richtung H

$$D \operatorname{tr}(X).H = \langle \mathbb{1}, H \rangle. \quad (2.16)$$

Ein weiterer benötigter Ausdruck ist die Ableitung von $\text{tr}(X^2)$:

$$\begin{aligned}\text{tr}((X+H)^2) &= \langle X^2 + XH + HX + H^2, \mathbb{1} \rangle \\ &= \langle X^2, \mathbb{1} \rangle + \langle XH, \mathbb{1} \rangle + \langle HX, \mathbb{1} \rangle + \langle H^2, \mathbb{1} \rangle \\ &= \text{tr}(X^2) + 2\langle X^T, H \rangle + o(H^2).\end{aligned}$$

Also lautet die Ableitung in X und Richtung H

$$D\text{tr}(X^2).H = \langle 2X^T, H \rangle. \quad (2.17)$$

Als nächster Ausdruck soll die Ableitung von $(\text{tr} X)^2$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned}(\text{tr}(X+H))^2 &= (\text{tr}(X) + \text{tr}(H))^2 \\ &= \text{tr}(X)^2 + 2\text{tr}(X)\langle H, \mathbb{1} \rangle + \text{tr}(H)^2 \\ &= \text{tr}(X)^2 + \langle 2\text{tr}(X)\mathbb{1}, H \rangle + o(H^2).\end{aligned}$$

Also lautet die Ableitung in X und Richtung H

$$D(\text{tr} X)^2.H = \langle 2\text{tr}(X)\mathbb{1}, H \rangle. \quad (2.18)$$

Ein weiterer benötigter Ausdruck ist die Ableitung von $\|X\|^2$:

$$\begin{aligned}\|X+H\|^2 &= \langle X+H, X+H \rangle \\ &= \langle X, X \rangle + \langle X, H \rangle + \langle H, X \rangle + \langle H, H \rangle \\ &= \|X\|^2 + 2\langle X, H \rangle + o(H^2).\end{aligned}$$

Also lautet die Ableitung in X und Richtung H

$$D\|X\|^2.H = \langle 2X, H \rangle. \quad (2.19)$$

Als letzter benötigter Ausdruck soll die Ableitung von $\det(X)$ bestimmt werden.

Die Ableitung an einer beliebigen Stelle X lässt sich im Gegensatz zu den bisherigen Termen nicht sofort berechnen. Als Zwischenschritt schauen wir uns die Ableitung an der Stelle $\mathbb{1}$ an. Es gilt

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{1} + H) &= \begin{vmatrix} 1 + H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & 1 + H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & 1 + H_{33} \end{vmatrix} \\ &= (1 + H_{11})(1 + H_{22})(1 + H_{33}) + H_{12}H_{23}H_{31} + H_{13}H_{21}H_{32} \\ &\quad - (1 + H_{22})H_{31}H_{13} - (1 + H_{33})H_{21}H_{12} - (1 + H_{33})H_{32}H_{23} \\ &= 1 + [H_{11} + H_{22} + H_{33}] + [H_{11}H_{22} + H_{11}H_{33} + H_{22}H_{33} - H_{13}H_{31} - H_{23}H_{32} - H_{12}H_{21}] \\ &\quad + [H_{11}H_{22}H_{33} + H_{12}H_{23}H_{31} + H_{13}H_{21}H_{32} - H_{22}H_{31}H_{13} - H_{33}H_{21}H_{12} - H_{33}H_{32}H_{23}] \\ &= 1 + \text{tr}(H) + \text{tr}(\text{Cof}(H)) + \det(H) \\ &= \det(\mathbb{1}) + \langle \mathbb{1}, H \rangle + o(H^2).\end{aligned}$$

Damit kann nun die Ableitung an einer beliebigen invertierbaren² Stelle X durch

$$\begin{aligned}\det(X+H) &= \det(X(\mathbb{1} + X^{-1}H)) \\ &= \det(X)\det(\mathbb{1} + X^{-1}H) \\ &= \det(X)(\det(\mathbb{1}) + \langle \mathbb{1}, X^{-1}H \rangle + o(H^2)) \\ &= \det(X) + \det(X)\langle X^{-T}, H \rangle + o(H^2) \\ &= \det(X) + \langle \text{Cof}(X), H \rangle + o(H^2)\end{aligned}$$

²Da die invertierbaren Matrizen dicht in $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ liegen, ist damit auch die Ableitung für den gesamten Raum gegeben.

bestimmt werden. Also lautet die Ableitung in X und Richtung H

$$D \det(X).H = \langle \text{Cof}(X), H \rangle. \quad (2.20)$$

Durch Einsetzen der oberen Gleichungen in (2.8), lassen sich die Ableitungen der Invarianten ablesen

$$DI_1(B).H = D \text{tr}(B).H = \langle \mathbb{1}, H \rangle, \quad (2.21)$$

$$DI_2(B).H = D[(\text{tr } B)^2 - \text{tr}(B^2)].H = \langle \text{tr}(B)\mathbb{1} - B^T, H \rangle = \langle I_1\mathbb{1} - B, H \rangle, \quad (2.22)$$

$$DI_3(B).H = D \det(B).H = \langle \text{Cof}(B), H \rangle = \langle \det(B)B^{-T}, H \rangle = \langle I_3B^{-1}, H \rangle. \quad (2.23)$$

3 Anti-Plane Shear Funktionen

Definition 3.1. Als **Anti-Plane Shear Funktionen**, kurz **APS-Funktionen** werden Abbildungen $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vom Typ

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 + u(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

bezeichnet. Hierbei ist $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalare Funktion.

3.1 Geometrische Bedeutung

Ein Material, das nur APS-Verformungen zulässt, muss eine Reihe geometrischer Eigenschaften erfüllen. Anschaulich kann man sich das Material als eine Ansammlung von Stäben in x_3 -Richtung vorstellen. Aus den ersten beiden Komponenten $\varphi_1(\mathbf{x}) = x_1$ und $\varphi_2(\mathbf{x}) = x_2$ resultiert, dass nur eine Verformung in x_3 -Richtung möglich ist. Für eine Vorstellung mit Stäben im Material bedeutet dies, dass sie fest in x_1 - und x_2 -Position bleiben müssen und sich nur in x_3 -Richtung verändern dürfen. Zusätzlich folgt aus der dritten Komponente $\varphi_3(\mathbf{x}) = x_3 + u(x_1, x_2)$, dass diese Veränderung unabhängig von x_3 sein muss. Für unser geometrisches Bild heißt das, dass die Stäbe sich in ihrer Länge nicht verändern, sondern sich nur in x_3 -Richtung verschieben dürfen³.

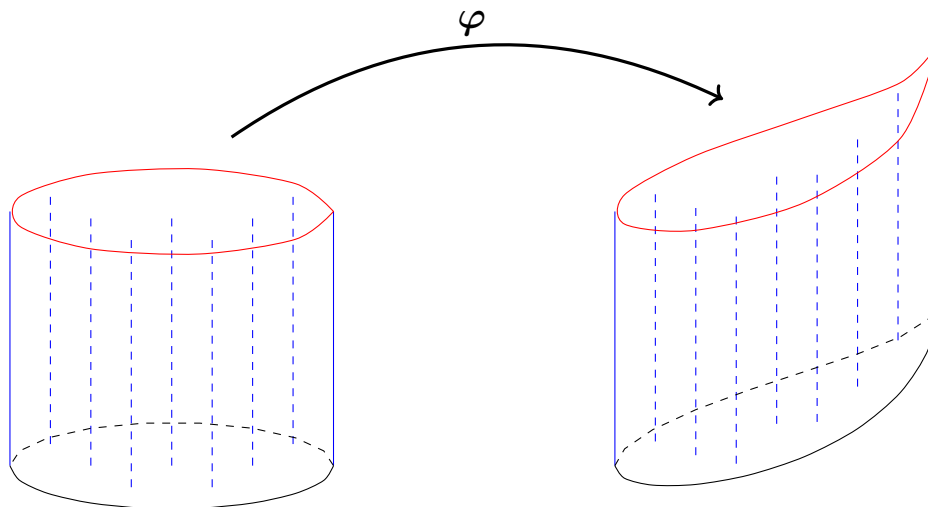


Abbildung 3: Mögliche APS-Verformung durch reine x_3 -Verschiebung von Stäben visualisiert.

APS-Verformungen lassen sich auch mit Hilfe eines 3D-Pinart Spiels veranschaulichen. Die Nägel zeigen dabei in x_3 -Richtung. Für eine sinnvolle Energiebetrachtung sollte man sich zusätzlich vorstellen, dass sich benachbarte Nägel untereinander beeinflussen, beispielsweise durch Gummis/Federn zwischen den Nägeln. Wenn am Rand die Position der Nägel vorgegeben wird, so stellen sich auch alle übrigen Nägel über die entstehenden Kräfte aus den Gummis/Federn untereinander ein.

³Dies entspricht der Vorstellung eines anisotropen Materials mit Fasern in x_3 -Richtung.

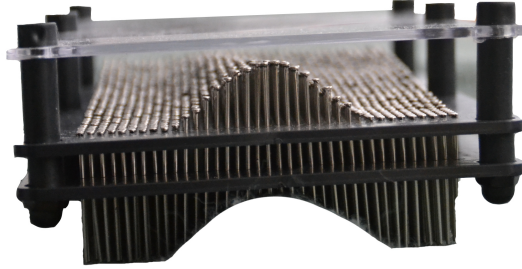


Abbildung 4: Mögliche APS-Verformung durch reine x_3 -Verschiebung von Stäben visualisiert.

Im mathematischen Modell steckt die gespeicherte Energie der gestreckten oder gestauchten Federn zwischen den Stäben in der Verformungsenergie $W(F)$.

3.2 Berechnung der Invarianten

Der Deformationsgradient $F = \nabla\varphi$ ist für APS-Funktionen gegeben als:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_{,x_1} & u_{,x_2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Wir führen

$$\alpha := u_{,x_1}, \quad \beta := u_{,x_2} \quad \text{und} \quad \gamma^2 := \|\nabla u\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (3.3)$$

ein. Dann lautet der rechte Cauchy-Green-Deformationstensor $B = FF^T$

$$B = FF^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ \alpha & \beta & 1 + \gamma^2 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Der linke Cauchy-Green-Deformationstensor $C = F^T F$ lautet

$$C = F^T F = \begin{pmatrix} 1 + \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha \\ \alpha\beta & 1 + \beta^2 & \beta \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Weiterhin gilt

$$\det(F) = 1, \quad \text{Cof}(F) = \det(F) F^{-T} = F^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Daraus folgt, dass APS-Verformungen das Volumen des Körpers nicht verändern. Sie gehören also zu den inkompressiblen⁴ Verformungen.

Um die Invarianten von B zu bestimmen, muss $\text{Cof}(B)$ gebildet werden

$$\text{Cof}(B) = \det(B)B^{-T} = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \gamma^2 - \beta^2 & \alpha\beta & -\alpha \\ \alpha\beta & 1 + \gamma^2 - \alpha^2 & -\beta \\ -\alpha & -\beta & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Daher lauten die Invarianten (2.8) von B für APS-Verformungen

$$\begin{aligned} I_1 &= 3 + \gamma^2, \\ I_2 &= 3 + 2\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 = 3 + \gamma^2, \\ I_3 &= 1 + \gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 = 1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Für APS-Funktionen gilt demnach

$$I_1 = I_2 = 3 + \|\nabla u\|^2 \quad \text{und} \quad I_3 = 1. \quad (3.9)$$

Außerdem ist $I_3 = 1$ von φ unabhängig.

3.3 Berechnung der Eigenwerte

Für spätere Rechnungen werden neben den Invarianten der APS-Verformungen auch die Eigenwerte selbst benötigt. Die Eigenwerte berechnen sich aus

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda \mathbb{1}) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & 1 - \lambda & \beta \\ \alpha & \beta & 1 + \gamma^2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)^2(1 + \gamma^2 - \lambda) - \alpha^2(1 - \lambda) - \beta^2(1 - \lambda) \\ &= (1 - \lambda)(1 + \gamma^2 - \lambda - \lambda - \lambda\gamma^2 + \lambda^2 - \alpha^2 - \beta^2) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - (2 + \gamma^2)\lambda + 1). \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_3 = 1$ und

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(2 + \gamma^2 + \sqrt{(2 + \gamma^2)^2 - 4}) = \frac{1}{2}(2 + \gamma^2 + \gamma\sqrt{\gamma^2 + 4}), \quad (3.10)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(2 + \gamma^2 - \sqrt{(2 + \gamma^2)^2 - 4}) = \frac{1}{2}(2 + \gamma^2 - \gamma\sqrt{\gamma^2 + 4}). \quad (3.11)$$

Aus $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = I_3 = 1$ folgt $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$. Für weitere Rechnungen wird folgende Darstellung für die Eigenwerte verwendet

$$\lambda := \frac{1}{2}(2 + \gamma^2 + \gamma\sqrt{\gamma^2 + 4}), \quad (3.12)$$

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda_3 = 1. \quad (3.13)$$

Es soll für spätere Überlegungen noch festgehalten werden, dass $\lambda \geq 1$ und

$$\lambda = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3$$

gilt.

⁴Inkompressible Verformungen sind Volumen erhaltene Deformationen und können durch die mathematische Nebenbedingung $\det(F) = 1$ beschrieben werden.

3.4 APS-Randwerte

Die APS-Verformungen werden an Körpern studiert, die in ihrer Ruhelage zylinderförmig in x_3 -Richtung sind. Dabei sei Ω ein Körper mit der Grundfläche Γ in der x_1 - x_2 -Ebene, welcher zusammen mit einer um einen festen Betrag in x_3 -Richtung verschobenen zweiten Grundfläche die Form des senkrechten Zylinders vorgibt (vgl. Fig: 4, S.8). Durch die besondere Form einer APS-Verformung reicht es, die Verformung der Grundfläche Γ zu kennen, um dadurch die gesamte Verformung zu beschreiben. Die Verformung von Γ wird durch ein $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ festgelegt; dadurch ist die APS-Verformung $\varphi(\boldsymbol{x})$ (3.1) durch die skalare Funktion $u(x_1, x_2)$ für den gesamten Körper Ω beschrieben.

Deswegen betrachten wir im Weiteren die skalare Funktion $u(x_1, x_2)$ stellvertretend für die gesamte APS-Verformung φ .

3.4.1 Dirichlet-Randbedingungen

Eine Möglichkeit Randbedingungen vorzugeben, sind die sogenannten Dirichlet-Randbedingungen. Dabei soll eine Verformung für $\partial\Gamma$ oder auch nur für ein Teilstück vorgeben werden

$$u(x_1, x_2) = u_D(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \partial\Gamma. \quad (3.14)$$

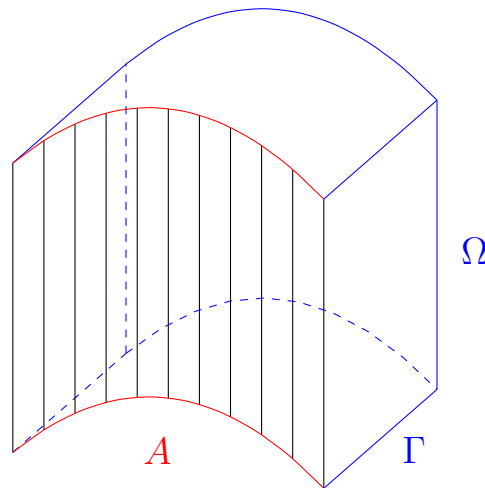


Abbildung 5: Vorgegebener Randteil $A \subset \partial\Gamma$ der Grundfläche Γ , erkennbar an schwarzen Stäben bzw. rotem Profil und mögliche eingestellte Verformung des restlichen blau gefärbten Körpers Ω .

In der Darstellung wird der obere bzw. untere rot eingezeichnete Teil A des Randes $\partial\Gamma$ vorgegeben. Durch die Gestalt der APS-Randwerte ist damit das ganze Profil von Ω mit seinen eingezeichneten schwarzen Stäben vorgegeben.

3.4.2 Neumann-Randbedingungen

Weitere mögliche Randbedingungen sind sogenannte Neumann-Randbedingungen. Dabei werden am Mantel $M \in \partial\Omega$ des Zylinders Kräfte vorgegeben. Damit diese zu einer APS-Verformung passen, dürfen sie nur in x_3 -Richtung wirken und ihr Betrag darf selbst nicht von x_3 abhängen,

Allgemein ist aufgrund fehlender Konvexität nicht klar, warum $W(F)$ überhaupt einen Minimierer besitzt. Selbst wenn mehrere stationäre Punkte existieren, bleibt zu klären, warum einer davon eine APS-Verformung sein sollte.

3.5.1 Veranschaulichung

Da diese Fragestellung in Funktionenräumen schwer zu veranschaulichen ist, soll es hier zunächst auf dem \mathbb{R}^2 vereinfacht dargestellt werden:

- Anstatt über Funktionen aus $C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ zu minimieren, begnügen wir uns mit dem \mathbb{R}^2 .
- Das Energiefunktional hat deswegen nur noch die Form

$$W: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

- Die Unterklasse der APS-Funktionen muss eine Teilmenge niedrigerer Dimension von \mathbb{R}^2 sein. Als einfaches Beispiel betrachten wir die Menge

$$\text{„APS“} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}.$$

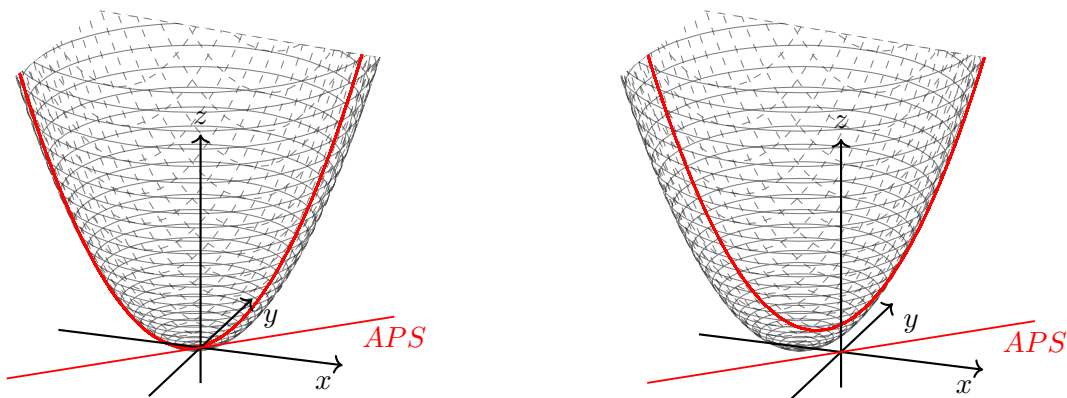


Abbildung 7: Mögliche Energiefunktionale $W(F)$, wobei nur im linken Bild das Minimum von APS auch gleichzeitig das globale Minimum ist.

Es ist also zwingend notwendig, von verschiedenen Minima zu sprechen:

- Die minimale APS-Verformung für $W(F)|_{APS}$.⁶
- Die globale minimale Verformung für $W(F)$, welche APS sein kann, es aber nicht sein muss.
- Wir sprechen von einem freien APS-Minimum, wenn eine minimale APS-Verformung für $W(F)|_{APS}$ auch eine globale stabile Verformung für $W(F)$ ist.

Energiefunktionale sind allgemein zunächst nicht konvex, deswegen ist die Existenz eines globalen Minimums nicht zwingend gegeben. Anstatt zu überlegen, wann das globale Minimum eine APS-Verformung ist, genügt es zu zeigen, wann ein APS-Minimum global stationär ist. Ein global stationäres Minimum soll im Folgenden freies APS-Minimum heißen. Es soll also erlaubt sein, dass es neben dem APS-Minimum noch weitere global stationäre Stellen gibt, welche nicht von APS-Gestalt sein müssen.

⁶ $W(F)|_{APS}$ heißt W eingeschränkt auf die Klasse der APS-Verformungen.

Ein Energiefunktional soll **APS-zulässig** heißen, wenn jede minimale APS-Verformung von $W(F)|_{APS}$ ein freies APS-Minimum ist, also auch eine globale minimale Verformung von $W(F)$ ist. Dabei muss dieser Zusammenhang für alle möglichen APS-Randwerte gelten. Eine weitere graphische Veranschaulichung der eingeführten Begriffe befindet sich nachher in der Zusammenfassung (S. 48).

APS-Zulässigkeit ist eine global geltende Eigenschaft für ein Funktional $W(F)$. Falls das Funktional nur für eine Unterklasse von APS-Verformungen oder nur bei ganz bestimmten Randwerten APS-Verformungen einstellt, heißt es noch nicht APS-zulässig. Dies führt entgegen der Intuition dazu, dass auch nicht APS-zulässige Energiefunktionale unter bestimmten Umständen APS-Verformungen als stationäre Stellen oder sogar als globale Minima haben können.

Schauen wir uns dafür die Ruhelage selbst an. Wenn am Rand eines spannungsfreien Körpers keine Verformungen und Kräfte vorgeben sind, wird die resultierende minimierende Verformung von $W(F)$ weiterhin die Ruhelage selbst sein. Wir können leicht erkennen, dass die Ruhelage über $u(x_1, x_2) = 0$ eine APS-Verformung ist. In diesem Fall sind also die eingeführten Minima dieselben und das Energiefunktional hat eine APS-Verformung eingestellt. Das bedeutet jedoch ohne weitere Bedingungen an das Energiefunktional noch nicht, dass dies auch bei anderen vorgegebenen APS-Randbedingungen eintritt.

Ein **nicht APS-zulässiges** Funktional ist also eine Energie, bei der es auch minimale APS-Verformungen gibt, welche nicht frei sind. Also heißt das im Allgemeinen, dass stationäre APS-Verformungen zu gegebenen APS-Randwerten im globalen Fall nicht mehr stationär sein müssen. Trotzdem können sich unter geeigneten Randwerten, wie zum Beispiel der Ruhelage⁷, APS-Verformungen einstellen.

3.5.2 Minimierungsmethoden

Unser mathematisches Model zur Bestimmung der gesuchten Verformung ist die Minimierung der gespeicherten Verformungsenergie des gesamten Körpers Ω .

$$I(\varphi) = \int_{\Omega} W(\nabla\varphi) \, dx \longrightarrow \min., \quad \text{bzgl. } \varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3. \quad (3.16)$$

Um das erste Minimum (die energetisch günstigste APS-Verformung) zu bestimmen, muss zuerst die APS-Verformungen eingesetzt werden. Da APS-Verformungen durch ein skalares $u(x_1, x_2)$ beschrieben werden, führt dies zu

$$I(u) = \int_{\Omega} \widetilde{W}(\nabla u) \, dx \longrightarrow \min., \quad \text{bzgl. } u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (3.17)$$

Zum Lösen wird die Euler-Lagrange-Gleichung aufgestellt, um sich mit der Existenz und der Bestimmung des APS-Minimierers auseinanderzusetzen. Diese Vorgehensweise soll **Rückwärts-Minimierung** genannt werden.

Den gegensätzlichen Ansatz zur Bestimmung des globalen Minimums nennen wir **Vorwärts-Minimierung**. Dabei sollen erst allgemein die Euler-Lagrange-Gleichungen aus (3.16) für beliebiges φ aufgestellt werden. Das resultierende Differentialgleichungssystem, um einen stationären Punkt $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ zu finden, wird sich analytisch nicht lösen lassen. Stattdessen wollen wir damit folgende zentrale Fragestellung beantworten können:

Wann ist ein Energiefunktional $W(F)$ APS-zulässig?

Es muss gezeigt werden, dass APS-Minima auch schon immer freie APS-Minima sind. Dafür sollen bei der Vorwärts-Minimierung nach dem Aufstellen der Euler-Lagrange-Gleichungen für

⁷Es werden auf (S. 43) noch weitere APS-Verformungen eingeführt, welche sich unabhängig von der Form des $W(F)$ immer einstellen können.

ein allgemeines φ , APS-Verformungen eingesetzt werden. Dies führt nicht zur gleichen Euler-Lagrange-Gleichung wie aus der Rückwärts-Minimierung, sondern bleibt weiterhin ein komplizierteres Gleichungssystem aus drei gekoppelten Gleichungen, um das skalare $u(x_1, x_2)$ aus der APS-Verformung zu bestimmen.

Die Existenz einer APS-Lösung unabhängig von der Wahl der APS-Randwerte haben wir schon als APS-zulässig definiert. Die Vorwärts-Minimierung soll uns Bedingungen liefern, unter denen ein Energiefunktional $W(F)$ APS-zulässig ist. Anschaulich sind APS-zulässige Energiefunktionale diejenigen, die „freiwillig“, ohne weitere geometrisch getroffenen Einschränkungen eine APS-Verformung einstellen können, sofern die Randbedingungen für APS-Verformungen möglich sind.

Die geometrisch anschauliche Tatsache, dass APS-zulässig bedeutet, dass ein APS-Minimum auch im globalen Fall die Euler-Lagrange-Gleichungen löst, führt zu folgender mathematischer Behauptung:

Bei einem Energiefunktional $W(F)$, welches APS-zulässig ist, führen die Rückwärts- und die Vorwärts-Minimierung zur derselben APS-Verformung, sofern welche existieren.

Das Ziel ist es, einen APS-Minimierer bestimmen zu können, indem mit obiger Behauptung beide Minimierungsmethoden kombiniert werden. In einem ersten Schritt wird das Energiefunktional $W(F)$ durch hergeleitete Bedingungen aus der Vorwärts-Minimierung auf APS-Zulässigkeit getestet und in einem zweiten Schritt braucht dann nur die leichtere Rückwärts-Minimierung ausgeführt zu werden, um den APS-Minimierer selbst explizit zu berechnen.

Da der Ansatz für den APS-Minimierer einfacher ist, wollen wir in der Arbeit mit der Rückwärts-Minimierung starten. Dabei sollen auch gewisse allgemeinere Methodiken vorgestellt werden, die bei der Vorwärts-Minimierung wiederholt zum Einsatz kommen.

4 Rückwärts-Minimierung (erst einsetzen, dann minimieren)

Wie im vorherigen Kapitel angesprochen wird im Folgenden der APS-Minimierer gesucht. Also suchen wir nur noch in der Klasse der APS-Verformungen einen Minimierer des Energiefunktional. Dieser Ansatz wurde von Gao [4] eingeführt. Die Rückwärts-Minimierung kann dabei keine Antwort auf die Frage liefern, ob der gefundene APS-Minimierer auch der globale Minimierer oder ein stationärer Punkt ist. Es ist möglich einen eindeutigen APS-Minimierer zu erhalten, der aber global instabil ist und sich deswegen nie einstellen kann.

Die Fragestellung in diesem Kapitel lautet also

$$I(\varphi) = \int_{\Omega} W(\nabla\varphi) \, dx \longrightarrow \min_{\varphi \text{ ist APS}}, \quad (4.1)$$

zusammen mit passenden APS-Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen.

4.1 Euler-Lagrange-Gleichungen

Wir wissen, dass wir φ durch ein $u(x_1, x_2)$ bestimmen können. Damit soll (4.1) vereinfachen werden, indem wir W in den Invarianten (2.8) ausdrücken. Da für APS-Funktionen (3.8)

$$I_1(\gamma) = I_2(\gamma), \quad I_3 = 1$$

gilt,⁸ fassen wir $W(F)|_{APS}$ überall als $\mathcal{W}(I_1(\gamma))$ auf. Wir wollen aus $\mathcal{W}(I_1(\gamma))$ die Euler-Lagrange-Gleichungen für u bilden.

Durch Einsetzen von APS-Funktionen wird nicht mehr über $\varphi : \Omega \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, sondern nur noch über $u : \Gamma \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ minimiert. Hierzu soll (4.1) umgeformt werden. Wir wollen die Euler-Lagrange-Gleichungen für $\mathcal{W}(I_1) = \mathcal{W}(3 + \|\nabla u\|^2)$ herleiten. Dabei starten wir mit

$$\min I(u) = \int_{\Omega} \mathcal{W}(3 + \|\nabla u\|^2) \, dx. \quad (4.2)$$

Wir bilden die erste Variation in beliebiger Richtung $\psi \in C_c^\infty(\Gamma, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} I(u + t\psi) \right|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} \left. \frac{d}{dt} \mathcal{W}(3 + \|\nabla u + t \nabla \psi\|^2) \right|_{t=0} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \left. \frac{d}{dt} \mathcal{W}(3 + \|\nabla u\|^2 + 2t \nabla u \cdot \nabla \psi + t^2 \|\nabla \psi\|^2) \right|_{t=0} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{W}'(3 + \|\nabla u + t \nabla \psi\|^2) (2 \nabla u \cdot \nabla \psi + 2t \|\nabla \psi\|^2) \Big|_{t=0} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{W}'(3 + \|\nabla u\|^2) 2 \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx \\ &\stackrel{P.I.}{=} \int_{\Omega} \operatorname{div} (-2 \mathcal{W}'(3 + \|\nabla u\|^2) \nabla u) \psi \, dx. \end{aligned}$$

Dabei ist mit *P.I.* die partielle Integration gemeint; die Randwerte fallen hier weg, da $\psi \in C_c^\infty(\Gamma, \mathbb{R})$ immer Null auf dem Rand ist. Das Fundamentallema der Variationsrechnung, siehe Neff [14, eq. (3.7)], liefert uns nun die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (-2 \mathcal{W}'(3 + \|\nabla u\|^2) \nabla u) &= 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{div} \left(-2 \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial I_1}(I_1) \nabla u \right) &= 0. \end{aligned}$$

⁸dabei war $\gamma = \|\nabla u\|$ und $I_1 = I_2 = 3 + \|\nabla u\|^2$.

Da $\mathcal{W}(I_1)$ nur eine skalare Funktion von I_1 ist, schreiben wir weiter \mathcal{W}' statt $\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial I_1}$. Damit erhalten wir aus den Euler-Lagrange-Gleichungen in der Rückwärts-Minimierung nur eine einzige Gleichung

$$\operatorname{div}(\mathcal{W}'(I_1)\nabla u) = 0, \quad I_1 = 3 + \|\nabla u\|^2, \quad (4.3)$$

um die skalare Funktion $u(x_1, x_2)$ zu bestimmen.

Die Euler-Lagrange-Gleichung ist eine Bedingung, um stationäre Stellen zu erhalten. Ein u , das die Gleichung erfüllt, ist deswegen nicht zwingend ein lokales Minimum, sondern kann auch ein lokales Maximum oder ein Sattelpunkt sein. Dieses Problem wird hier nicht weiter bearbeitet.

4.2 Konvexität

Um die Frage nach der Existenz des APS-Minimierers zu beantworten, soll

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{W}(3 + \|\nabla u\|^2) \, dx \longrightarrow \min. \\ \Rightarrow & \operatorname{div}(\mathcal{W}'(3 + \|\nabla u\|^2)\nabla u) = 0 \end{aligned}$$

im Hinblick auf die Vorwärts-Minimierung so verallgemeinert werden, dass wir dort wieder auf diese Betrachtung zurückgreifen können. Wir verwenden deswegen hier die Form

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} g(\|\nabla u\|^2) \, dx \longrightarrow \min. \quad (4.4)$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(M(\|\nabla u\|^2)\nabla u) = 0. \quad (4.5)$$

Dabei ist M eine skalare Funktion in $\gamma^2 = \|\nabla u\|^2$. Zusätzlich führen wir eine weitere skalare Funktion $g(\gamma^2)$ mit $g'(\gamma^2) = M(\gamma^2)$ ein. Die Euler-Lagrange-Gleichungen von (4.4) lassen sich wie folgt herleiten

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx_1} \left[\frac{\partial g}{\partial u_{,x_1}}(\|\nabla u\|^2) \right] + \frac{d}{dx_2} \left[\frac{\partial g}{\partial u_{,x_2}}(\|\nabla u\|^2) \right] \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{dx_1} [g'(\|\nabla u\|^2) \cdot 2u_{,x_1}] + \frac{d}{dx_2} [g'(\|\nabla u\|^2) \cdot 2u_{,x_2}] = 0 \\ \Leftrightarrow & \operatorname{div}(g'(\|\nabla u\|^2)\nabla u) = 0 \\ \Leftrightarrow & \operatorname{div}(M(\|\nabla u\|^2)\nabla u) = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung (4.5) hat also eine Lösung, wenn das zugehörige Variationsproblem (4.4) ein Minimum⁹ hat. Die einfachste Bedingung, die unter ausreichender Differenzierbarkeit für die Existenz eines Minimums gefordert werden kann, ist die Konvexität von $g(\|\nabla u\|^2)$ als Funktion von ∇u .

Dass Konvexität nicht notwendig für die Existenz eines Minimums sein muss, sieht man leicht beim nachfolgenden Schaubild.

⁹Genau genommen, hat die Gleichung (4.5) schon eine Lösung, wenn das zugehörige Variationsproblem (4.4) einen stationären Punkt hat.

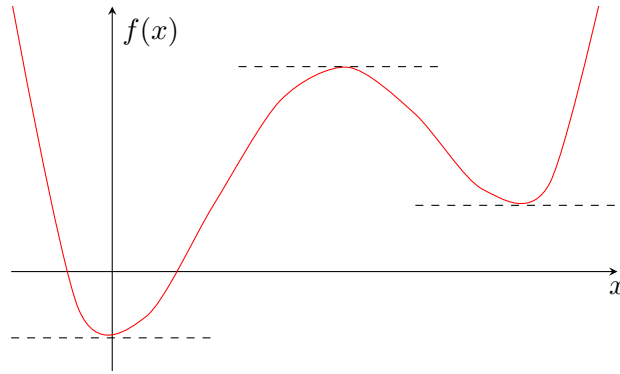


Abbildung 8: Mögliches nicht konvexe Funktion $f(x)$ mit mehreren stationären Stellen und globalen Minimum.

Es kann also einen APS-Minimierer geben, auch wenn $g(\|\nabla u\|^2)$ nicht konvex ist. Diese Tatsache soll in dieser Arbeit nicht weiter vertieft werden.

Andersherum jedoch können auch konvexe Funktionen ohne Minimum sein:

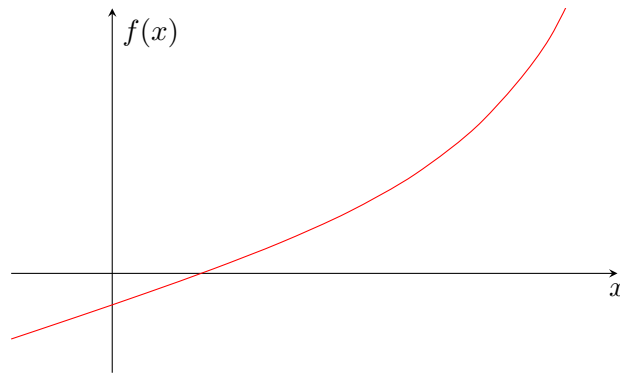


Abbildung 9: Mögliche konvexe Funktion $f(x)$ ohne Minimum.

Bei Energiefunktionalen beschäftigen wir uns nicht mit diesem Problem, da aus physikalisch sinnvoller Sicht ein spannungsfreies Material in der Ruhelage ein Minimum haben muss. Außerdem soll für Verformungen unendlich weit weg zur Ruhelage auch das Energiefunktional nach unendlich streben. Im Kapitel 6, S.53 wird nochmal genauer die Existenz einer allgemeinen Minimierungsaufgabe betrachtet.

Im folgenden Abschnitt wird der Begriff der APS-Konvexität eingeführt. Dabei soll gezeigt werden, dass diese Bedingung ausreichend für die Existenz eines Minimierers ist und von fast allen annähernd realistischen Energiefunktionalen automatisch erfüllt wird.

4.3 APS-Konvexität

Beginnen wir mit der Definition der Konvexität auf APS-Funktionen.

Definition 4.1. Als **Anti-Plane Shear konvex**, kurz **APS-konvex** bezeichnen wir ein Energiefunktional

$$W : \mathbb{R}^{3 \times 3} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F \longmapsto W(F), \quad (4.6)$$

das auf der Klasse der Funktionen

$$\mathcal{APS} = \left\{ F \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

konvex ist. Ist eine Darstellung in den Invarianten I_1, I_2 und I_3 gegeben, so ist das Funktional APS-konvex genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto W(3 + \gamma^2, 3 + \gamma^2, 1), \quad \text{mit } \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (4.7)$$

konvex ist. Die Äquivalenz beider Definitionen folgt aus $I_1 = I_2 = 3 + \|\nabla u\|^2$ und $I_3 = 1$ für APS-Verformungen.

Bemerkung 4.2. Ist das Energiefunktional in der Form $W(I_1, I_2, I_3)$ gegeben, dann lässt dies die Notation

$$W(I_1, I_2, I_3)|_{\mathcal{APS}} = W(3 + \|\nabla u\|^2, 3 + \|\nabla u\|^2, 1) =: \mathcal{W}(3 + \|\nabla u\|^2)$$

zu. Die Funktion $W(I_1, I_2, I_3)$ ist genau dann APS-Konvex, wenn die Funktion $\mathcal{W}(3 + \|\nabla u\|^2)$ konvex in ∇u ist.

Bemerkung 4.3. Ist das Energiefunktional $W(I_1, I_2, I_3)$ als Abbildung

$$\gamma^2 \mapsto W(3 + \gamma^2, 3 + \gamma^2, 1) \quad (4.8)$$

konvex in γ^2 , so ist das Energiefunktional schon APS-konvex.

Beweis. Die Abbildung $\nabla u \mapsto \|\nabla u\|^2$ ist konvex und monoton in ∇u . Da W konvex in $\gamma^2 = \|\nabla u\|^2$ sein soll, folgt aus der Verkettung einer konvexen mit einer konvexen monotonen Funktion direkt, dass W konvex in ∇u ist. ■

Bemerkung 4.4. Die Klasse der sogenannten Simple-Shear-Verformungen lassen sich durch Deformationsgradienten der Art

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tilde{\gamma} & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma} \in \mathbb{R} \quad (4.9)$$

beschreiben. Jede Simple-Shear-Verformung kann als eine APS-Verformung mit $u(x_1, x_2) = \tilde{\gamma} x_2$ aufgefasst werden. Deswegen ist ein APS-konvexes Energiefunktional auch immer konvex auf der Klasse der Simple-Shear-Verformung. Die Umkehrung dieser Beziehung gilt jedoch nicht.

Für den Rest dieses Abschnittes erweitern wir die Klasse der APS-Funktionen durch beliebige Verformungen $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vom skalaren Typ

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 + u(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}, \quad u \in C^1(\Omega). \quad (4.10)$$

Um einen besseren Überblick zu behalten, wollen wir die Konvexität auf dieser Klasse von Funktionen **APS⁺-konvex** nennen. Es ist klar, dass APS⁺-Konvexität stärker als die normale APS-Konvexität ist.

4.3.1 Polykonvexität

Sei $W(F)$ ein polykonvexes Energiefunktional nach Ball [2, eq. (0.8)]

$$W(F) = P(F, \text{Cof}(F), \det(F)),$$

mit $P : \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{19} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex.

Es gilt folgendes Lemma.

Lemma 4.5. *Sei $W(F)$ polykonvex, dann ist $W(F)$ auch schon APS^+ -Konvex*

Beweis. Für die APS^+ -Konvexität von W in $F = \nabla\varphi$ ist zu zeigen, dass:

$$W(t \nabla\varphi_1 + (1-t) \nabla\varphi_2) \leq t W(\nabla\varphi_1) + (1-t) W(\nabla\varphi_2), \quad t \in [0, 1]$$

mit beliebigen skalaren Verformungen φ_1, φ_2 sodass (4.10) gilt. Die unabhängigen Variablen von P ausgedrückt in φ aus (4.10) lauten:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_{,x_1} & u_{,x_2} & 1 + u_{,x_3} \end{pmatrix}, \quad \text{Cof}(F) = \begin{pmatrix} 1 + u_{,x_3} & 0 & -u_{,x_1} \\ 0 & 1 + u_{,x_3} & -u_{,x_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(F) = 1 + u_{,x_3}. \quad (4.11)$$

Aus der Linearität der obigen Ausdrücke folgt für $\varphi = t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2$:

$$\begin{aligned} F &= t F_1 + (1-t) F_2, \\ \text{Cof}(t F_1 + (1-t) F_2) &= t \text{Cof}(F_1) + (1-t) \text{Cof}(F_2), \\ \det(t F_1 + (1-t) F_2) &= t \det(F_1) + (1-t) \det(F_2), \end{aligned} \quad (4.12)$$

mit $F_1 = \nabla\varphi_1$ und $F_2 = \nabla\varphi_2$. Aus der Konvexität von P folgt mit diesen Gleichungen letztendlich:

$$\begin{aligned} W(t F_1 + (1-t) F_2) &= P(t F_1 + (1-t) F_2, \text{Cof}(t F_1 + (1-t) F_2), \det(t F_1 + (1-t) F_2)) \\ &= P(t F_1 + (1-t) F_2, \text{Cof}(F_1) + (1-t) \text{Cof}(F_2), t \det(F_1) + (1-t) \det(F_2)) \\ &\leq t P(F_1, \text{Cof}(F_1), \det(F_1)) + (1-t) P(F_2, \text{Cof}(F_2), \det(F_2)) \\ &= t W(F_1) + (1-t) W(F_2). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Daraus folgt, dass jedes polykonvexe, im Allgemeinen nicht konvexe, Energiefunktional APS -konvex ist.

4.3.2 Rang-1 Konvexität

In diesem Kapitel wollen wir die Polykonvexität durch Rang-1-Konvexität¹⁰ abschwächen. Ein Energiefunktional $W(F)$ heißt Rang-1 konvex, wenn die Abbildung

$$t \mapsto W(F + t \xi \otimes \eta) \quad \forall F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^3 \quad (4.13)$$

konvex ist. Die Definition ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} W(t F_1 + (1-t) F_2) &\leq t W(F_1) + (1-t) W(F_2) \quad \forall t \in (0, 1) \\ F_1, F_2 &\in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \text{sodass} \quad \exists \xi, \eta \in \mathbb{R}^3 : F_1 - F_2 = \xi \otimes \eta. \end{aligned}$$

¹⁰In der englischsprachigen Literatur ist der Begriff Rank-1-konvex geläufig.

Lemma 4.6. Sei $W(F)$ ein Rang-1 konvexes Energiefunktional, dann ist $W(F)$ auch APS⁺-konvex.

Beweis. Für die APS⁺-Konvexität von W in $F = \nabla\varphi$ ist zu zeigen, dass

$$W(t \nabla\varphi_1 + (1-t) \nabla\varphi_2) \leq t W(\nabla\varphi_1) + (1-t) W(\nabla\varphi_2), \quad t \in [0, 1],$$

mit beliebigen skalaren Verformungen φ_1, φ_2 (4.10) gilt. Der Deformationsgradient F hat die Form (4.11). Explizites Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} W(F) &= W(t F_1 + (1-t) F_2) \\ &= W \left(t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_{x_1} & u_{x_2} & 1 + u_{x_3} \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ v_{x_1} & v_{x_2} & 1 + v_{x_3} \end{pmatrix} \right) \\ &\leq t W \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_{x_1} & u_{x_2} & 1 + u_{x_3} \end{pmatrix} + (1-t) W \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ v_{x_1} & v_{x_2} & 1 + v_{x_3} \end{pmatrix} \\ &= t W(F_1) + (1-t) W(F_2). \end{aligned}$$

Dabei konnte die Rang-1-Konvexität verwendet werden, da sich

$$F_1 - F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ u_{x_1} - v_{x_1} & u_{x_2} - v_{x_2} & u_{x_3} - v_{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u_{x_1} - v_{x_1} \\ u_{x_2} - v_{x_2} \\ u_{x_3} - v_{x_3} \end{pmatrix}$$

als dyadisches Produkt schreiben lässt. ■

Daraus folgt, dass auch jedes Rang-1-konvexe Energiefunktional APS-konvex ist.

Bemerkung 4.7. Aus dem Beweis aus vorherigen Lemma wurde auch klar, dass umgekehrt der Zusammenhang

$$W(F) \text{ ist APS}^+\text{-konvex} \quad \Leftrightarrow \quad W(F) \text{ ist Rang-1-konvex für } \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

gilt.

4.4 Bedingung der APS-Konvexität

Im letzten Kapitel wurde der Begriff der APS-Konvexität eingeführt und in einen Zusammenhang mit Poly- und Rang-1-Konvexität gestellt. Da fast alle physikalisch sinnvolle Energiefunktionale polykonvex oder zumindest Rang-1-konvex sind, ist die Forderung nach APS-Konvexität auch physikalisch vertretbar.

Kommen wir nun zurück zu der Betrachtung der Aussage

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} g(\|\nabla u\|^2) dx \longrightarrow \min. \quad (4.4)$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} (M(\|\nabla u\|^2) \nabla u) = 0, \quad \text{mit } M(\gamma^2) = g'(\gamma^2). \quad (4.5)$$

Sei nun $W(F)$ APS-konvex. Dann wissen wir aus

$$W(I_1, I_2, I_3)|_{APS} = \mathcal{W}(3 + \|\nabla u\|^2) =: g(\|\nabla u\|^2),$$

dass $g(\|\nabla u\|^2)$ eine konvexe Funktion in ∇u ist. Damit gilt der folgende Satz.

Satz 4.8. *Falls ein Energiefunktional $W(F)$ strikt APS-konvex ist, so existiert ein eindeutiger APS-Minimierer aus*

$$\int_{\Omega} \mathcal{W}(3 + \|\nabla u\|^2) dx \longrightarrow \min .$$

Beweis. Der Existenzbeweis findet sich am Ende von Kapitel 6 S.53. ■

APS-Konvexität liefert demnach eine Bedingung für die Existenz eines APS-Minimierers von $W(F)$, ohne dabei die Klasse der zu betrachtenden Energiefunktionale stark einzuschränken.

Wir haben bis jetzt zwei Möglichkeiten kennengelernt, eine Funktion auf APS-Konvexität zu testen:

- Funktionale auf poly- oder Rang-1-konvex testen. Das impliziert dann direkt die APS-Konvexität
- Funktionale die nicht Rang-1-konvex sind, oder bei denen man dies noch nicht nachgeprüft hat, können direkt auf APS-Konvexität überprüft werden, indem APS-Funktionen in $W(F)$ eingesetzt werden und dann dieser Ausdruck auf Konvexität in ∇u überprüft wird.

Das heißt, man versucht die Konvexität von $W(F)|_{APS}$ in ∇u nachzuprüfen.

Im Folgenden sollen noch weitere Bedingungen für die APS-Konvexität aufgestellt werden. Dafür verwenden wir, dass die APS-Konvexität von $W(F)$ äquivalent zu der Konvexität von $g(\|\nabla u\|^2)$ in ∇u ist. Es soll weiter mit g und M gerechnet werden, um zum Schluss über

$$g(\|\nabla u\|^2) = \mathcal{W}(3 + \|\nabla u\|^2) = W(3 + \|\nabla u\|^2, 3 + \|\nabla u\|^2, 1), \quad (4.15)$$

$$M(\|\nabla u\|^2) = g'(\|\nabla u\|^2) = \frac{d}{d(\|\nabla u\|^2)} W(3 + \|\nabla u\|^2, 3 + \|\nabla u\|^2, 1) \quad (4.16)$$

eine neue Bedingung für die APS-Konvexität von $W(F)$ zu erhalten. Wir wollen jetzt zwei mögliche Vorgehensweise vorstellen, um Konvexität von g zu zeigen:

- Monotonie und Konvexität von $\|\nabla u\|^2 \mapsto g(\|\nabla u\|^2)$ als skalare Funktion in $\|\nabla u\|^2$.
- Alternativ direkt Konvexität von $\nabla u \mapsto g(\|\nabla u\|^2)$ in ∇u .

Fangen wir mit der Betrachtung von $g(\|\nabla u\|^2)$ als skalare Funktion $s \mapsto g(s)$ an. Eine Komposition zweier Funktionen $g \circ h$ ist konvex, falls die Funktion h konvex und die Funktion g konvex und monoton steigend ist. Die Funktion $h = \|\nabla u\|^2$ ist immer konvex und muss deswegen nicht weiter betrachtet werden.

Bleibt zu zeigen, dass g als skalare Funktion von $\|\nabla u\|^2$ konvex und monoton ist.

Monotonie in $\|\nabla u\|^2$: Es muss Folgendes gelten

$$\begin{aligned} & g'(\|\nabla u\|^2) > 0 && \forall \|\nabla u\|^2 > 0 \\ \Leftrightarrow & M(\|\nabla u\|^2) > 0 && \forall \|\nabla u\|^2 > 0 \\ \Leftrightarrow & \mathcal{W}'(3 + R^2) > 0 && \forall R > 0. \end{aligned}$$

Wird aber berücksichtigt, dass das Energiefunktional W sein globales Minimum in der Ruhelage ($\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$) annimmt, gilt

$$F = 1, \quad B = 1 \quad \Leftrightarrow \quad I_1 = I_2 = 3, \quad I_3 = 1.$$

Im APS-Fall liegt das globale Minimum von \mathcal{W} also bei $R = 0$. Bei Konvexität gilt also

$$\begin{aligned} \mathcal{W}'(3) = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{W}''(3 + R^2) > 0 \quad \forall R > 0 \\ \Rightarrow \quad \mathcal{W}'(3 + R^2) > 0 \quad \forall R > 0. \end{aligned}$$

Somit folgt die Monotonie von $s \mapsto g(s)$ direkt aus der Konvexität von $s \mapsto g(s)$.

Konvexität in $\|\nabla u\|^2$: Es muss Folgendes gelten

$$\begin{aligned} & g''(\|\nabla u\|^2) > 0 && \forall \|\nabla u\|^2 > 0 \\ \Leftrightarrow & M'(\|\nabla u\|^2) > 0 && \forall \|\nabla u\|^2 > 0 \\ \Leftrightarrow & \mathcal{W}''(3 + R^2) > 0 && \forall R > 0. \end{aligned}$$

Damit ist die Konvexität von $g(\|\nabla u\|^2)$ in ∇u durch die Konvexität und daraus folgender Monotonie von $\|\nabla u\|^2 \mapsto g(\|\nabla u\|^2)$ gezeigt. Im Zusammenhang zu der APS-Konvexität ergibt sich nun folgender Zusammenhang:

Lemma 4.9. *Die Bedingung*

$$\mathcal{W}''(3 + R^2) > 0 \quad \forall R > 0, \quad \text{mit} \quad \mathcal{W}(I_1) := W(I_1, I_1, 1) \quad (\text{APS1})$$

impliziert die APS-Konvexität von $W(F)$.

Die Umkehrung dieser Beziehung gilt jedoch nicht. Zum Beispiel ist ein Term der Art $(3 + \|\nabla u\|^2)^{\frac{2}{3}}$ wie im nachfolgender Abbildung visualisiert zwar nicht konvex in $\|\nabla u\|^2$, aber durchaus konvex in ∇u selbst.

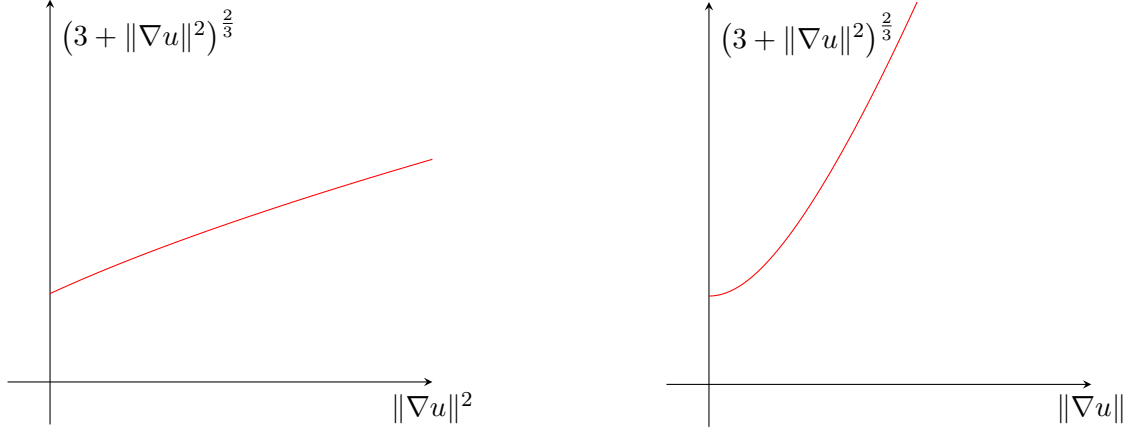


Abbildung 10: Beispiel einer Funktion, welche nicht konvex in $\|\nabla u\|^2$ aber dennoch konvex in ∇u ist.

Um eine Bedingung zu finden, welche äquivalent zur APS-Konvexität ist, muss deswegen die direkte Konvexität von $g(\|\nabla u\|^2)$ in ∇u betrachtet werden.

Konvexität in ∇u : Als zweiter Ansatz soll nun die Konvexität in ∇u über die positive Definitheit der Hessematrix von $g(\|\nabla u\|^2)$ betrachtet werden. Es gilt

$$Dg(\|\nabla u\|^2) = g'(\|\nabla u\|^2) \begin{pmatrix} 2u_{,x_1} \\ 2u_{,x_2} \end{pmatrix} = 2M(\|\nabla u\|^2) \nabla u. \quad (4.17)$$

Wir schreiben wieder $\nabla u = (\alpha, \beta)^T$ und nennen $\|\nabla u\|^2 = \gamma^2$, die Hessematrix ist dann gegeben als

$$\begin{aligned} D^2g(\gamma^2) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \end{pmatrix} \left[2M(\gamma^2) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right]^T \\ &= 2 \begin{pmatrix} M'(\gamma^2) 2\alpha^2 + M(\gamma^2) & M'(\gamma^2) 2\alpha\beta \\ M'(\gamma^2) 2\alpha\beta & M'(\gamma^2) 2\beta^2 + M(\gamma^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Forderung nach positiver Definitheit liefert folgende zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} (1) \quad & M'(\gamma^2) 2\alpha^2 + M(\gamma^2) > 0, \\ (2) \quad & (M'(\gamma^2) 2\alpha^2 + M(\gamma^2)) (M'(\gamma^2) 2\beta^2 + M(\gamma^2)) - (M'(\gamma^2) 2\alpha\beta)^2 > 0. \end{aligned}$$

Gleichung (2) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & M'(\gamma^2)^2 4\alpha^2\beta^2 + M'(\gamma^2) 2\alpha^2 M(\gamma^2) + M(\gamma^2) M'(\gamma^2) 2\beta^2 + M(\gamma^2)^2 - M'(\gamma^2)^2 4\alpha^2\beta^2 > 0 \\ \Leftrightarrow & M(\gamma^2) M'(\gamma^2) 2\alpha^2 + M(\gamma^2) M'(\gamma^2) 2\beta^2 + M(\gamma^2)^2 > 0 \\ \Leftrightarrow & M(\gamma^2) (M'(\gamma^2) 2\gamma^2 + M(\gamma^2)) > 0. \end{aligned}$$

Wir werten lokal in $R \in \mathbb{R}$ für $\gamma^2 = R^2$ aus und Gleichung (2) wird global erfüllt, falls

$$M(R^2) (M'(R^2) 2R^2 + M(R^2)) > 0 \quad \forall R \in \mathbb{R}.$$

Es gibt also zwei mögliche Fälle:

Fall 1: $M(R^2) < 0$ und $M'(R^2) 2R^2 + M(R^2) < 0$.

Aus (1) folgt

$$M'(R^2) 2\alpha^2 > -M(R^2) > 0 \quad \Rightarrow \quad M'(R^2) > 0.$$

Dann gilt weiter

$$M'(R^2) 2R^2 + M(R^2) > M'(R^2) 2\alpha^2 + M(R^2) > 0.$$

Damit erhalten wir einen Widerspruch zur Annahme $M'(R^2) 2R^2 + M(R^2) < 0$.

Fall 2: $M(R^2) > 0$ und $M'(R^2) 2R^2 + M(R^2) > 0$.

Falls auch $M'(R^2) \geq 0$ gilt, so ist auch (1) trivialerweise erfüllt. Sei also $M'(R^2) < 0$, dann gilt für Gleichung (1)

$$M'(R^2) 2\alpha^2 + M(R^2) > M'(R^2) 2R^2 + M(R^2) > 0.$$

Also folgt Bedingung (1) automatisch aus (2) und kann deswegen weggelassen werden.

Damit ist die Hessematrix von $g(\|\nabla u\|^2)$ positiv definit, falls

$$M(R^2) > 0 \quad \text{und} \quad M'(R^2) 2R^2 + M(R^2) > 0, \quad \forall R \in \mathbb{R}.$$

Wir wollen zeigen, dass unter Berücksichtigung der spannungsfreien Referenzkonfiguration ($M(0) = 0$) auf die Forderung $M(R^2) > 0$ noch verzichtet werden kann.

Lemma 4.10. *Sei $m : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige skalare Funktion, die folgende Differentialgleichung erfüllt*

$$m'(x) 2x + m(x) > 0 \quad \text{mit} \quad m(0) = 0.$$

Dann gilt $m(x) > 0 \quad \forall x > 0$.

Beweis. Wir formen die Differentialgleichung um zu

$$m'(x) > -\frac{m(x)}{2x} \quad \text{mit} \quad m(0) = 0.$$

Eine untere Schranke für $m(x)$ erfüllt

$$m'(x) = -\frac{m(x)}{2x} \quad \text{mit} \quad m(0) = 0.$$

Diese Differentialgleichung wird nur von der Nulllösung $m(x) \equiv 0$ gelöst und ist damit eine untere Schranke für die Differentialgleichung. Deswegen gilt

$$m(x) > 0 \quad \forall x > 0.$$

Zur Veranschaulichung starten wir von $m(0) = 0$ mit einer beliebigen Funktion und schauen uns erst ab einem beliebigen Punkt ($m(x_0) = y_0$ mit $x_0, y_0 > 0$) die untere Schranke

$$m'(x) = -\frac{m(x)}{2x} \quad \text{mit} \quad m(x_0) = y_0$$

an. Trennung der Variablen liefert

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{m(x)} \, dm &= \int -\frac{1}{2x} \, dx \\ \Leftrightarrow \ln(m(x)) &= -\frac{1}{2} \ln(x) + c \\ \Leftrightarrow m(x) &= \frac{c}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

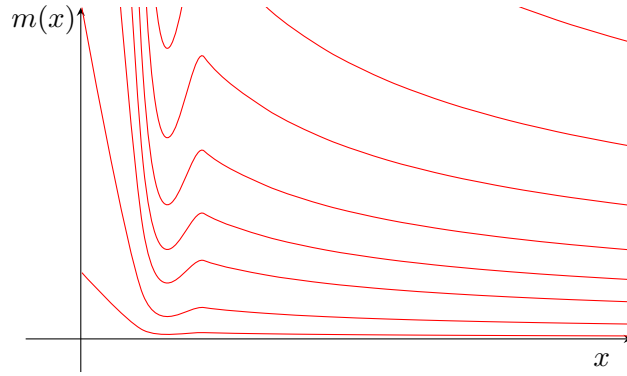


Abbildung 11: Mögliche unteren Schranken für verschiedene Anfangswerte $m(x_0) = y_0$.

Es ist also auch graphisch zu sehen, warum $m(x) > 0$ für jeden beliebigen Startpunkt gilt. ■

Aus der positiven Definitheit der Hessematrix von $g(\|\nabla u\|^2)$ bleibt deswegen nur noch die Bedingung

$$M'(R^2) \cdot 2R^2 + M(R^2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dR} [RM(R^2)] > 0$$

übrig. Dies drücken wir durch das nachfolgende Lemma aus.

Lemma 4.11. *Die Bedingung*

$$\frac{d}{dR} [RW'(3 + R^2)] > 0 \quad \forall R > 0, \quad \text{mit } \mathcal{W}(I_1) := W(I_1, I_1, 1) \quad (\text{APS2})$$

ist äquivalent zur APS-Konvexität von $W(F)$.

Beweis.

- APS-Konvexität von $W(F)$.
- \Leftrightarrow Konvexität von $\nabla u \mapsto g(\|\nabla u\|^2)$ in ∇u .
- \Leftrightarrow positive Definitheit der Hessematrix von g
und Spannungsfreiheit von $W(F)$ in $F = \mathbb{1}$.
- $\Leftrightarrow M'(R^2) \cdot 2R^2 + M(R^2) > 0, \quad \forall R > 0$
- $\Leftrightarrow \frac{d}{dR} [RM(R^2)] > 0, \quad \forall R > 0$
- \Leftrightarrow (APS2). ■

5 Vorwärts-Minimierung (erst minimieren, dann einsetzen)

5.1 Fragestellung

Kommen wir nun zur Vorwärts-Minimierung, um die folgende Frage zu beantworten:

Unter welchen Bedingungen ist der APS-Minimierer auch ein freier Minimierer zu gegebenen APS-Randbedingungen?

Allgemein dürfen sich auch Verformungen einstellen, die zwar die vorgegeben APS-Randwerte erfüllen, jedoch nicht im ganzen Körper APS-Gestalt haben.

Im letzten Kapitel über die Rückwärts-Minimierung haben wir den APS-Minimierer hergeleitet. Für dessen Existenz wurde die APS-Konvexität eingeführt und mit (APS2) eine erste Konvexitätsbedingung an $W(F)$ hergeleitet.

Wir werden eine analoge Konvexitätsbedingung für die Vorwärts-Minimierung herleiten und den Zusammenhang zwischen den beiden Bedingungen betrachten. Eine solche Bedingung schließt jedoch nicht aus, dass der APS-Minimierer gar nicht global stabil ist. Zusätzlich müssen in der Vorwärts-Minimierung weitere Energiebedingung an $W(F)$ gestellt werden, damit der APS-Minimierer immer auch global stabil ist.

Dieses Problem wurde 1976 in zwei Arbeiten von Knowles [9, 10] erläutert. Wir wollen seine Arbeiten weiter ausführen und mit der eingeführten APS-Konvexität in Verbindung setzen.

5.2 Lineare Elastizität

Bevor wir uns weiter mit allgemeinen nichtlinearen isotropen Energiefunktionalen beschäftigen, werden wir zuerst einen Abstecher zum linearen Fall machen. Dabei wollen wir ein besseres Verständnis für die weitere Herangehensweise bekommen und die Einschränkung der **Inkompressibilität** einführen.

Das lineare Energiefunktional ist gegeben als

$$W_{\text{lin}}(\varepsilon) = \mu \|\varepsilon\|^2 + \frac{\lambda}{2} \text{tr}(\varepsilon)^2. \quad (5.1)$$

Dabei ist $\varepsilon = \text{sym}(F - \mathbb{1})$. der Verzerrungstensor, $\mu > 0$ wird als Schermodul und λ als die 2-Lamé-Konstante bezeichnet.

Es soll zuerst noch einmal die Rückwärts-Minimierung durchgeführt werden, damit wir sie nachher mit den Ergebnissen der Vorwärts-Minimierung in Verbindung bringen können. Dafür ist im APS-Fall ε durch (3.2) gegeben als

$$\varepsilon = \text{sym}(F - \mathbb{1}) = \text{sym} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Weiter folgt

$$\text{tr}(\varepsilon) = 0, \quad \|\varepsilon\|^2 = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2) 2 = \frac{1}{2}\gamma^2. \quad (5.3)$$

Demnach ergibt sich für das lineare Energiefunktional einer APS-Verformung

$$W_{\text{lin}}(u)_{\text{APS}} = \frac{\mu}{2} \|\nabla u\|^2. \quad (5.4)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung dieser Variationsaufgabe führt zur Laplace-Gleichung

$$\Delta u(x_1, x_2) = 0. \quad (5.5)$$

Die Laplace-Gleichung ist sowohl für Dirichlet- als auch für Neumann-Randbedingungen eindeutig lösbar und numerisch schnell realisierbar. Um ein Gefühl für die resultierende Verformung zu bekommen, betrachten wir einen unverformten Würfel. Dieser soll sich APS verformen, so dass wir nur noch die obere bzw. untere Seite des Würfels betrachten müssen. Die Vorderseite soll, wie im Bild (Abb: 6, S.11) veranschaulicht, parabelförmig verformt werden. Die resultierende Verformung in der linearen Elastizitätstheorie hat durch das Lösen der Laplace-Gleichung folgende Gestalt.

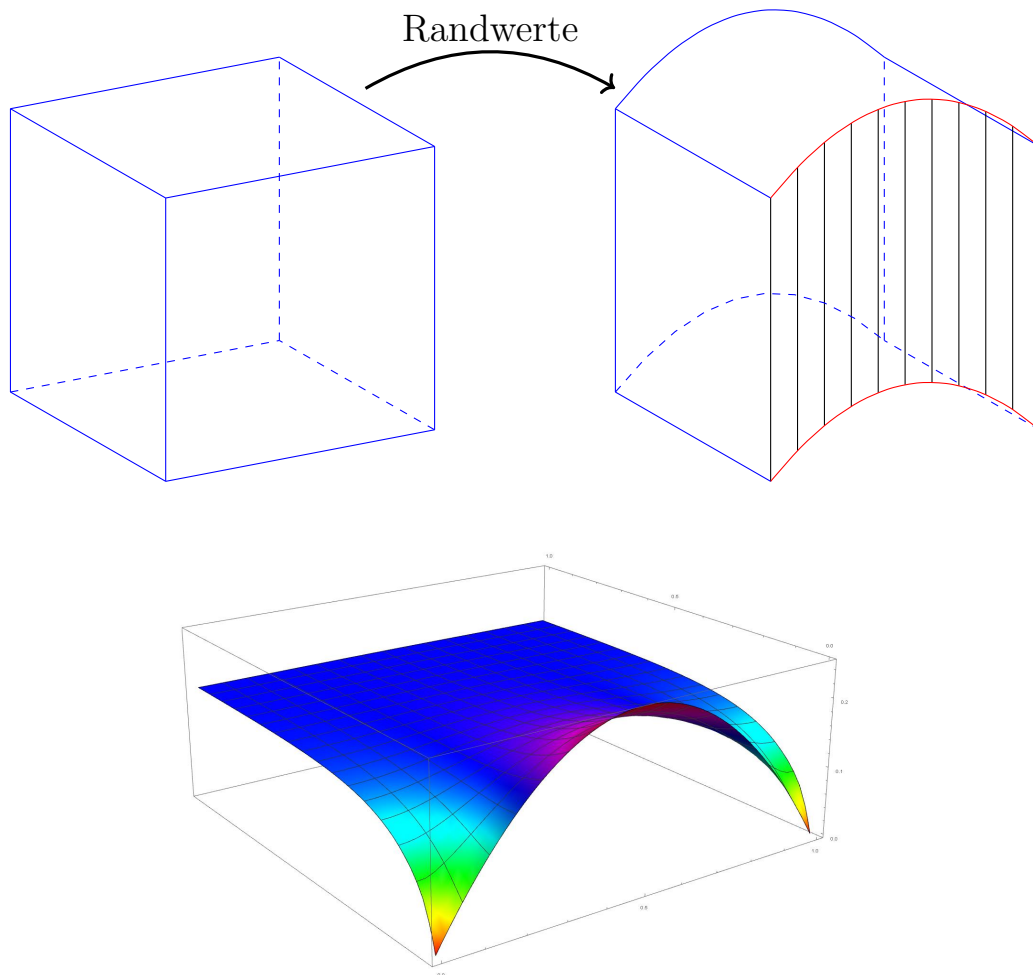


Abbildung 12: Veranschaulichung einer Verformung, beschreiben durch die lineare Elastizitätstheorie ($\nabla u = 0$), der Oberfläche eines Würfels, dessen Frontseite (schwarz und rot gefärbt) vorgegeben verformt wird.

Die resultierende Verformung hat also eine andere Gestalt als in Bild (Fig: 6, S.11) angedeutet, sodass sich die gegenüberliegende Rückseite kaum noch deformiert.

5.2.1 Kompressibler Fall

Das Lösen der Laplace-Gleichung liefert also den APS-Minimierer von $W_{\text{lin}}(\varepsilon)$. Es soll jetzt zur Vorwärts-Minimierung übergegangen werden.

Dafür schauen wir uns die allgemeinen Euler-Lagrange-Gleichungen für das lineare Energiefunktional an, ohne vorher APS einzusetzen. Die explizite Herleitung der Gleichungen kann auf S. 41 nachgelesen werden.

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\operatorname{Div}[DW_{\text{lin}}(\varepsilon)] = 0 \quad (5.6)$$

mit

$$DW(\varepsilon) = \begin{pmatrix} W_{\varepsilon_{11}} & W_{\varepsilon_{12}} & W_{\varepsilon_{13}} \\ W_{\varepsilon_{21}} & W_{\varepsilon_{22}} & W_{\varepsilon_{23}} \\ W_{\varepsilon_{31}} & W_{\varepsilon_{32}} & W_{\varepsilon_{33}} \end{pmatrix}.$$

Aus (2.19) und (2.18) kennen wir schon die benötigten Ableitungen

$$\begin{aligned} D\|\varepsilon\|^2.H &= \langle 2\varepsilon, H \rangle, \\ D\operatorname{tr}(\varepsilon)^2.H &= \langle 2\operatorname{tr}(\varepsilon)\mathbb{1}, H \rangle. \end{aligned}$$

Daraus folgt insgesamt die Ableitung

$$DW_{\text{lin}}(\varepsilon) = 2\mu\varepsilon + \lambda\operatorname{tr}(\varepsilon)\mathbb{1} \quad (5.7)$$

und die Euler-Lagrange-Gleichungen für $W_{\text{lin}}(\varepsilon)$ lauten

$$\operatorname{Div}[2\mu\varepsilon + \lambda\operatorname{tr}(\varepsilon)\mathbb{1}] = 0. \quad (5.8)$$

Wenn wir nun (5.2) in $DW_{\text{lin}}(\varepsilon)$ einsetzen, erhalten wir für (5.8)

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \left[2\mu \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} + \lambda \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{Div} \left[\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} + \lambda \mathbb{0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{Div} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Gleichungen

$$\frac{d}{dx_3}\alpha(x_1, x_2) = 0, \quad (\text{I lin})$$

$$\frac{d}{dx_3}\beta(x_1, x_2) = 0 \quad (\text{II lin})$$

sind durch die Unabhängigkeit von x_3 automatisch erfüllt und es bleibt nur die dritte Gleichung

$$\frac{d}{dx_1}\alpha(x_1, x_2) + \frac{d}{dx_2}\beta(x_1, x_2) = 0 \quad (\text{III lin})$$

übrig. Diese lässt sich umschreiben zu

$$\frac{d^2}{dx_1^2}u(x_1, x_2) + \frac{d^2}{dx_2^2}u(x_1, x_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta u(x_1, x_2) = 0. \quad (\text{III lin})$$

Diese Gleichung ist uns schon als (5.5) bekannt.

Wir haben demnach bei $W_{\text{lin}}(\varepsilon)$ in der Vorwärts-Minimierung genau dieselbe Gleichung wie schon in der Rückwärts-Minimierung. Aus dieser Gleichheit folgt, dass der APS-Minimierer auch schon ein globaler Minimierer ist. Dies beruht auf der Eigenschaft, dass die Gleichungen (I lin) und (II lin) ohne weitere zusätzliche Annahmen weggefallen sind.

Zusammen mit der Tatsache, dass die Laplacegleichung (5.5) für Dirichlet- und Neumann-Randwerte eindeutig lösbar ist, haben wir gezeigt, dass sich bei APS-konformen Randwerten im linearen Fall auch insgesamt eine APS-Verformung einstellt. Die ersten beiden Gleichungen der Euler-Lagrange-Gleichung werden jedoch für ein allgemeines nichtlineares $W(F)$ nicht weggefallen und dadurch weitere Bedingungen an die APS-Gestalt unseres globalen Minimierers liefern.

5.2.2 Inkompressibler Fall

Da APS-Verformungen durch $\det(F) = 1$ das Volumen des deformierten Körpers nicht ändern, gehören sie zur Klasse der **inkompressiblen Verformungen**. Bei einer Vielzahl an Materialien setzt man a priori näherungsweise eine Inkompressibilität voraus.¹¹

Die Einschränkung auf inkompressible Verformungen ist weniger stark als die Einschränkung auf APS-Verformungen, jedoch stärker als die Betrachtung von kompressiblen Materialien.

Deswegen ist die inkompressible Vorwärts-Minimierung ein guter Zwischenschritt zu der allgemeineren kompressiblen Vorwärts-Minimierung. Die Bedingungen an ein $W(F)$, sodass ein APS-Minimierer auch im inkompressiblen Fall stationär ist, werden schwächer sein, als die Bedingungen für die Übertragung auf den kompressiblen Fall.

Im linearen Fall wurde im vorherigen Abschnitt gezeigt, dass $W_{\text{lin}}(F)$ schon im kompressiblen Fall APS-zulässig ist,¹² deswegen liefert der Schritt mit der Nebenbedingung der Inkompressibilität hier keine neuen Erkenntnisse. Trotzdem soll das Verfahren einmal kurz erläutert werden, bevor es nachher für ein allgemeines $W(F)$ als Vorstufe zum kompressiblen Fall angewendet wird.

Die Klasse der inkompressiblen Verformungen können wir durch die Nebenbedingung $\det(F) = 1$ erhalten. Für die lineare Energiebetrachtung muss diese Bedingung jedoch auch linearisiert werden. Dabei sind nur kleine Verformungen erlaubt und die übliche Notation ist dabei

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{mit } \|\mathbf{u}(\mathbf{x})\| \ll 1. \quad (5.9)$$

Hierbei ist mit $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ **nicht** das skalare $u(x_1, x_2)$ aus den APS-Verformungen gemeint. Infolgedessen schreiben wir $F = \mathbb{1} + \nabla \mathbf{u}$ und wollen $\det(F)$ in der Nähe der $\mathbb{1}$ entwickeln. Durch explizites Ausrechnen von $\det(\mathbb{1} + H)$ und Sortieren der Terme erhält man die Darstellung

$$\det(\mathbb{1} + H) = 1 + \text{tr}(H) + \text{tr}(\text{Cof } H) + \det(H). \quad (5.10)$$

Daraus ergibt sich die linearisierte Nebenbedingung

$$1 = \det(F) = \det(\mathbb{1} + \nabla \mathbf{u}) = 1 + \text{tr}(\nabla \mathbf{u}) + o(\|\nabla \mathbf{u}\|^2) \quad \Rightarrow \quad \text{tr}(\nabla \mathbf{u}) = 0. \quad (5.11)$$

Die Umwandlung nach ε liefert uns letztendlich folgende Nebenbedingung W_{lin}

$$\text{tr}(\nabla \mathbf{u}) = \text{tr}(\text{sym } \nabla \mathbf{u}) = \text{tr}(\varepsilon) = 0. \quad (5.12)$$

¹¹Gummi wird häufig als inkompressibles Material betrachtet, da sich Gummi sehr viel leichter scheren (Form verändern) als komprimieren lässt.

¹²APS-zulässig heißt: APS-Minimierer ist auch schon globaler Minimierer von $W(F)$.

Unter Einführung eines Lagrange-Multiplikators $p_{\text{lin}}(\mathbf{x}) \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ lautet die Variationsaufgabe für die inkompressible lineare Energiebetrachtung

$$\left. \begin{array}{l} \int_{\Omega} W_{\text{lin}}(\varepsilon) \, dx \longrightarrow \min. \\ \text{NB: } \quad \text{tr}(\varepsilon) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{\Omega} W_{\text{lin}}(\varepsilon) + p_{\text{lin}}(\mathbf{x}) \, \text{tr}(\varepsilon) \, dx \longrightarrow \min. \quad (5.13)$$

Mit Hilfe der Ableitung von $\text{tr}(\varepsilon)$ (2.16)

$$D \, \text{tr}(\varepsilon) \cdot H = \langle \mathbf{1}, H \rangle$$

lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen für den inkompressiblen Fall

$$\text{Div}[DW_{\text{lin}}(\varepsilon) + p_{\text{lin}}(\mathbf{x}) \mathbf{1}] = 0. \quad (5.14)$$

Eine ausführlichere Herleitung findet sich im Abschnitt der allgemeinen inkompressiblen Energiebetrachtung (S. 31).

Durch Einsetzen von (5.7) erhalten wir

$$\text{Div} \left[\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{\text{lin}} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\text{lin}} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\text{lin}} \end{pmatrix} \right] = \text{Div} \begin{pmatrix} p_{\text{lin}} & 0 & \mu \alpha \\ 0 & p_{\text{lin}} & \mu \beta \\ \mu \alpha & \mu \beta & p_{\text{lin}} \end{pmatrix} = 0. \quad (5.15)$$

Die ersten beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1} p_{\text{lin}}(\mathbf{x}) + \frac{d}{dx_3} \mu \alpha(x_1, x_2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx_1} p_{\text{lin}}(\mathbf{x}) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{I lin})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_2} p_{\text{lin}}(\mathbf{x}) + \frac{d}{dx_3} \mu \beta(x_1, x_2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx_2} p_{\text{lin}}(\mathbf{x}) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{II lin})$$

führen zu der Einschränkung

$$p_{\text{lin}}(\mathbf{x}) = c_1 + \bar{p}_{\text{lin}}(x_3), \quad (5.16)$$

woraufhin die dritte Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1} \mu \alpha(x_1, x_2) + \frac{d}{dx_2} \mu \beta(x_1, x_2) + \frac{d}{dx_3} p_{\text{lin}}(\mathbf{x}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \Delta u(x_1, x_2) + \frac{1}{\mu} \bar{p}'_{\text{lin}}(x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III lin})$$

lautet. Da u unabhängig von x_3 ist, muss auch \bar{p}'_{lin} unabhängig von x_3 sein. Es ergibt sich also

$$\Delta u(x_1, x_2) + c_2 = 0 \quad \text{und} \quad p_{\text{lin}}(\mathbf{x}) = c_1 + c_2 \mu x_3 \quad (5.17)$$

mit zwei frei wählbaren Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Das Gleichungssystem ist im Vergleich zur kompressiblen linearen Energiebetrachtung diesmal sogar unterbestimmt. Für jedes beliebige $c_1 \in \mathbb{R}, c_2 = 0$ erhalten wir dieselbe Gleichung wie im kompressiblen Fall. Wie vorher schon erwartet, stellen sich auch im inkompressiblen, linearen Fall APS-Verformungen ein und die gesamte inkompressible Betrachtung führt bei $W_{\text{lin}}(\varepsilon)$ zu keinem neuen Ergebnis.

5.3 Inkompressible Materialien

Verlassen wir nun die lineare Energiebetrachtung und kommen zurück zu einem allgemeinen nichtlinearen $W(F)$. In diesem Abschnitt soll überlegt werden, wann der APS-Minimierer im Falle der Einschränkung auf die Inkompressibilität ein globaler Minimierer ist.

Dafür werden die Euler-Lagrange-Gleichungen mit der Nebenbedingung der Inkompressibilität ($\det(F) = 1$) aufgestellt.

5.3.1 Euler-Lagrange-Gleichungen

Wir verwenden dafür wie schon im linearen Fall die Methode der Lagrange-Multiplikatoren:

$$\left. \begin{array}{l} \int_{\Omega} W(\nabla \varphi) \, dx \longrightarrow \min. \\ \text{NB: } \det(\nabla \varphi) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{\Omega} W(\nabla \varphi) + p(\mathbf{x}) (\det(\nabla \varphi) - 1) \, dx \longrightarrow \min .$$

mit $p(\mathbf{x}) \in C^1(\Omega)$. Bezeichne

$$I(\varphi) := \int_{\Omega} W(\nabla \varphi) + p(\mathbf{x}) (\det(\nabla \varphi) - 1) \, dx =: \int_{\Omega} L(\nabla \varphi) \, dx$$

mit

$$L : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \nabla \varphi \mapsto L(\nabla \varphi) = L \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} .$$

Wir bilden die erste Variation in Richtung $\psi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} I(\varphi + t\psi) \right|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} \left. \frac{d}{dt} L(\nabla \varphi + t\nabla \psi) \right|_{t=0} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 L_{F_{ik}}(\nabla \varphi + t\nabla \psi) \cdot \left(\left. \frac{d}{dx_i} \psi_k \right) \right|_{t=0} \, dx \\ &= \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} L_{F_{ik}}(\nabla \varphi) \cdot \left(\frac{d}{dx_i} \psi_k \right) \, dx \\ &\stackrel{P.I.}{=} \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \left(-\frac{d}{dx_i} L_{F_{ik}}(\nabla \varphi) \right) \psi_k \, dx \\ &= \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} - \left(\sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx_i} L_{F_{ik}}(\nabla \varphi) \right) \psi_k \, dx . \end{aligned}$$

Das Fundamentallemma der Variationsrechnung, siehe Neff [14, eq. (3.7)], liefert uns die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx_i} L_{F_{ik}}(\nabla \varphi) = 0 \quad \forall k \in \{1, 2, 3\} \\ \Leftrightarrow & - \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx_i} [W_{F_{ik}}(\nabla \varphi) + p(\mathbf{x}) [\det(\nabla \varphi) - 1]_{F_{ik}}] = 0 \quad \forall k \in \{1, 2, 3\} . \end{aligned}$$

Der Übersicht wegen wird folgende Notation eingeführt

$$DW(\nabla\varphi) = \begin{pmatrix} W_{F_{11}} & W_{F_{12}} & W_{F_{13}} \\ W_{F_{21}} & W_{F_{22}} & W_{F_{23}} \\ W_{F_{31}} & W_{F_{32}} & W_{F_{33}} \end{pmatrix}.$$

Mit der Ableitung

$$D \det(F) \cdot H = \langle \text{Cof}(F), H \rangle \quad (2.20)$$

lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\text{Div}[DW(\nabla\varphi) + p(\mathbf{x}) \text{Cof}(\nabla\varphi)] = 0. \quad (5.18)$$

Wir schreiben weiter F für $\nabla\varphi$. Im inkompressiblen Fall ($\det(F) = 1$) gilt $\text{Cof}(F) = F^{-T}$. Die Euler-Lagrange-Gleichungen für ein allgemeines Energiefunktional $W(F)$ unter der Nebenbedingung der Inkompressibilität lauten daher

$$\text{Div}[DW(F) + p(\mathbf{x}) F^{-T}] = 0. \quad (5.19)$$

Jede isotrope Energieformulierung $W(F)$ kann auch über die Invarianten von $B = FF^T$ beschrieben werden. Da für den inkompressiblen Fall $I_3 = \det(B) = 1$ gilt, kann $W(F)$ als $\widehat{W}(I_1(B), I_2(B))$ aufgefasst werden. Der Übersicht wegen wird weiterhin W statt \widehat{W} geschrieben. Wir wollen nun (5.19) in Abhängigkeit von den Invarianten I_1, I_2 von B schreiben. Um $DW(F) = DW(I_1, I_2)$ zu bestimmen, werden mehrere Ableitungen aus Kapitel 2.4 benötigt. Die Ableitung der Invarianten nach B lauteten

$$D_B I_1(B) \cdot H = \langle \mathbb{1}, H \rangle, \quad (2.21)$$

$$D_B I_2(B) \cdot H = \langle \text{tr}(B)\mathbb{1} - B^T, H \rangle = \langle I_1\mathbb{1} - B, H \rangle. \quad (2.22)$$

Allerdings werden die Ableitungen der Invarianten nach F anstatt nach B benötigt. Dazu nutzen wir die Kettenregel. Dafür muss zuerst die Ableitung $D_F B(F)$ gebildet werden. Es gilt

$$B(F + H) = (F + H)(F + H)^T = FF^T + FH^T + HF^T + HH^T$$

und deswegen lautet die Ableitung

$$D_F B(F) \cdot H = FH^T + F^T H. \quad (5.20)$$

Die Kettenregel liefert nun

$$\begin{aligned} D_F I_1(B(F)) \cdot H &= \langle D_B I_1(B), D_F B(F) \cdot H \rangle = \langle \mathbb{1}, FH^T + F^T H \rangle \\ &= \langle H, F \rangle + \langle F, H \rangle = \langle 2F, H \rangle, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} D_F I_2(B(F)) \cdot H &= \langle D_B I_2(B), D_F B(F) \cdot H \rangle = \langle I_1\mathbb{1} - B, FH^T + F^T H \rangle \\ &= \langle H, (I_1\mathbb{1} - B)^T F \rangle + \langle (I_1\mathbb{1} - B)F, H \rangle = \langle 2(I_1\mathbb{1} - B)F, H \rangle. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Damit lautet die Ableitung von $W(F)$ in den Invarianten I_1, I_2 von B

$$\begin{aligned} DW(F) &= \frac{\partial W}{\partial I_1} D_B I_1(B) DB(F) + \frac{\partial W}{\partial I_2} D_B I_2(B) DB(F) \\ &= 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} F + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1\mathbb{1} - B)F. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen in der Darstellung der Invarianten lauten dann

$$\operatorname{Div} \left(2 \frac{\partial W}{\partial I_1} (I_1, I_2) F + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1, I_2) (I_1 \mathbb{1} - B) F + p F^{-T} \right) = 0, \quad (5.24)$$

wobei $p \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ der Lagrange-Multiplikator ist, siehe auch Knowles [9, eq. (2.6)].

Um nun Bedingungen für das Energiefunktional ableiten zu können, werden in die Euler-Lagrange-Gleichungen APS-Funktionen eingesetzt. Die Größen F, B, I_1 und I_2 wurden schon für APS-Verformungen berechnet, es fehlt noch der Term

$$(I_1(B)\mathbb{1} - B)F = \begin{pmatrix} 2 + \gamma^2 & 0 & -\alpha \\ 0 & 2 + \gamma^2 & -\beta \\ -\alpha & -\beta & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \beta^2 & -\alpha\beta & -\alpha \\ -\alpha\beta & 2 + \alpha^2 & -\beta \\ \alpha & \beta & 2 \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Durch Einsetzen aller bekannten Terme reduzieren sich die Euler-Lagrange-Gleichungen (5.24) auf

$$\operatorname{Div} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2(2 + \beta^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} + p & -2\alpha\beta \frac{\partial W}{\partial I_2} & -2\alpha \left(\frac{\partial W}{\partial I_2} + p \right) \\ -2\alpha\beta \frac{\partial W}{\partial I_2} & 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2(2 + \alpha^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} + p & -2\beta \left(\frac{\partial W}{\partial I_2} + p \right) \\ 2\alpha \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) & 2\beta \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) & 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} + 4 \frac{\partial W}{\partial I_2} + p \end{pmatrix} = 0. \quad (5.26)$$

Damit erhalten wir nun ein Gleichungssystem aus 3 gekoppelten partielle DGL's, um die beiden skalaren Funktionen $u(x_1, x_2)$ und $p(\mathbf{x})$ zu bestimmen. Das Gleichungssystem ist also um eine Gleichung **überbestimmt**. Dies bedeutet, dass es im Allgemeinen keine Lösung gibt, welche alle drei Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt. Damit dieser Fall aber doch eintreten kann, muss das $W(F)$ von der Bauart sein, dass eine Gleichung wegfällt. Unter Ausnutzung dieser Überlegung wollen wir nun unsere erste Bedingung für die APS-Zulässigkeit herleiten.

Wir wollen neue Bezeichnungen einführen, um die Euler-Lagrange-Gleichungen übersichtlicher zu gestalten. Da $u(x_1, x_2)$ unabhängig von x_3 ist, sind auch alle Faktoren außer $p(\mathbf{x})$ in (5.24) von x_3 unabhängig. Die 3. Gleichung ergibt

$$\left(2\alpha \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \right)_{,x_1} + \left(2\beta \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \right)_{,x_2} = -p_{,x_3}. \quad (5.27)$$

Da die linke Seite der Gleichung unabhängig von x_3 ist, muss auch $p_{,x_3}$ unabhängig von x_3 sein. Deswegen kann x_3 nur linear in $p(\mathbf{x})$ auftreten. Diese Linearität führt dazu, dass auch $p_{,x_1}$ aus der ersten Gleichung und $p_{,x_2}$ aus der zweiten Gleichung unabhängig von x_3 sind. Daraus leitet sich die Form

$$p(x_1, x_2, x_3) = c x_3 + \bar{p}(x_1, x_2) \quad (5.28)$$

her, siehe auch Knowles [9, eq. (2.22)]. Wir führen neue Bezeichnungen ein:¹³

$$G(I_1, I_2) := 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1, I_2), \quad (5.29)$$

$$H(I_1, I_2) := 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} (I_1, I_2) + \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1, I_2) \right], \quad (5.30)$$

$$q := p(\mathbf{x}) + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} (I_1, I_2) + 2(2 + \gamma^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1, I_2). \quad (5.31)$$

¹³Bei Knowles [9, eq. (3.1)] wird $F(I_1, I_2)$ anstatt $H(I_1, I_2)$ verwendet.

Dadurch lassen sich unsere Euler-Lagrange-Gleichungen schreiben als

$$\operatorname{Div} \begin{pmatrix} q - \alpha^2 G & -\alpha\beta G & -\alpha G - 2\alpha p \\ -\alpha\beta G & q - \beta^2 G & -\beta G - 2\beta p \\ \alpha H & \beta H & G + H + p \end{pmatrix} = 0. \quad (5.32)$$

Mit der Vorbetrachtung (5.28) erhalten wir die drei Gleichungen

$$q_{,x_1} + 2c\alpha = (\alpha^2 G)_{,x_1} + (\alpha\beta G)_{,x_2}, \quad (\text{I})$$

$$q_{,x_2} + 2c\beta = (\alpha\beta G)_{,x_1} + (\beta^2 G)_{,x_2}, \quad (\text{II})$$

$$-c = (\alpha H)_{,x_1} + (\beta H)_{,x_2}. \quad (\text{III})$$

Auch wenn G und H als Funktionen von I_1, I_2 eingeführt wurden, sind die Euler-Lagrange-Gleichungen nur von $u(x_1, x_2)$ bzw. den eingeführten Bezeichnungen¹⁴ α, β, γ und dem Lagrange-Multiplikator $p(\mathbf{x})$ abhängig. Dies liegt einfach daran, dass für den APS-Fall in die Gleichungen $I_1 = I_2 = 3 + \gamma^2 = 3 + \|\nabla u\|^2$ eingesetzt wird.

5.3.2 Bedingung APS-Konvex

Als Vorgriff auf den kompressiblen Fall wird dort die Gleichung (III) für den Fall $c = 0$ wiederkehren. Deswegen wollen wir auch hier im inkompressiblen Fall den Ansatz $c = 0$ wählen. Dies bedeutet, dass der Lagrange-Multiplikator $p(x_1, x_2, x_3)$ unabhängig von x_3 ist. Schreiben wir die Gleichung (III) für $c = 0$ nochmal in Divergenzform auf

$$\operatorname{div}(H\nabla u) = 0. \quad (5.33)$$

Ausgeschrieben lautet sie

$$\operatorname{div} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2) + \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2) \right) \nabla u \right) = 0$$

mit $I_1 = I_2 = 3 + \|\nabla u\|^2$. Wir wollen die Gleichung in folgender Form auffassen

$$\operatorname{div} (M(\|\nabla u\|^2) \nabla u) = 0, \quad (4.5)$$

mit $M(\|\nabla u\|^2) = H(3 + \|\nabla u\|^2)$. Wir sehen, dass wir denselben Gleichungstyp wie bei der Rückwärts-Minimierung erhalten und können deswegen die Resultate aus der Rückwärts-Minimierung, siehe dazu Kapitel 4.4 S. 20, nutzen. Es konnte über die APS-Konvexität (S. 25) gezeigt werden, dass Gleichung (4.5) eine Lösung hat, wenn

$$\frac{d}{dR} [R M(R^2)] > 0 \quad \forall R > 0.$$

Diese Beziehung wurde schon von Knowles [10, eq. (19)] erkannt und wird im folgenden Lemma festgehalten.

Lemma 5.1. *Die Gleichung*

$$\operatorname{div} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2) + \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2) \right) \nabla u \right) = 0$$

hat eine Lösung, falls

¹⁴Zur Erinnerung: $\alpha := u_{,x_1}, \beta := u_{,x_2}, \gamma := \|\nabla u\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

$$\frac{d}{dR} \left[R \left(\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2) + \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2) \right) \Big|_{I_1=I_2=3+R^2} \right] > 0 \quad \forall R > 0. \quad (\text{APS3})$$

Wir konnten bei der Rückwärts-Minimierung durch $M(R^2) = \mathcal{W}(3 + R^2)$ zeigen, dass

$$\frac{d}{dR} [R \mathcal{W}'(3 + R^2)] = \frac{d}{dR} [R M(R^2)] > 0 \quad \forall R > 0 \quad (\text{APS2})$$

äquivalent zur APS-Konvexität von $W(F)$ ist. Dabei war \mathcal{W} als $\mathcal{W}(I_1) := W(I_1, I_1, 1)$ definiert. Nun wollen wir auch (APS3) mit Hilfe des folgenden Lemmas dazu in Verbindung setzen.

Lemma 5.2. *Es gilt*

$$\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2) + \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2) \right) \Big|_{I_1=I_2} = \mathcal{W}'(I_1). \quad (5.34)$$

Dabei kommt die linke Seite der Gleichung aus (APS3) und die rechte Seite aus (APS2).

Beweis. Wir beweisen die Aussage allgemein für eine beliebige skalare Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann lautet die Aussage

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right]_{x=y} = \frac{df}{dx}(x, x). \quad (5.35)$$

Dies schreiben wir um zu

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right]_{x=\bar{x}(z), y=\bar{y}(z)} = \frac{df}{dz}(\bar{x}(z), \bar{y}(z)), \quad (5.36)$$

bei $\bar{x}(z) = z = \bar{y}(z)$

mit der parametrisierte Kurve $z \mapsto (\bar{x}(z), \bar{y}(z))$. Der Beweis folgt nun durch simples Einsetzen

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(x, x) &= \frac{df}{dz}(z, z) = \frac{df}{dz}(\bar{x}(z), \bar{y}(z)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(z), \bar{y}(z)) \frac{d\bar{x}}{dz} + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}(z), \bar{y}(z)) \frac{d\bar{y}}{dz} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(z), \bar{y}(z)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}(z), \bar{y}(z)) \cdot 1 \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right]_{x=\bar{x}(z), y=\bar{y}(z)} \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right]_{x=y}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Also ist mit Lemma (5.3) die Betrachtung der Existenz einer Lösung von

$$\operatorname{div} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2) + \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2) \right) \nabla u \right) = 0$$

oder

$$\operatorname{div} (\mathcal{W}'(I_1) \nabla u) = 0$$

äquivalent.

Die Gleichheit von erst $x(z)$, $y(z)$ einsetzen und dann nach z ableiten, oder erst nach x , y ableiten und anschließend $x(z)$, $y(z)$ einsetzen, gilt nur für den Spezialfall $\frac{d\bar{x}}{dz} = 1 = \frac{d\bar{y}}{dz}$. Allgemein muss auf die Reihenfolge der Rechenschritte geachtet werden. Damit haben wir gezeigt, dass der Term $M(\|\nabla u\|^2)$ nicht nur dieselbe Gestalt wie bei der Rückwärts-Minimierung hat, sondern wirklich exakt dieselbe Funktion ist. Damit ist nun gezeigt, dass (III) für $c = 0$ aus der Vorwärts-Minimierung genau dann eine Lösung hat, wenn $W(F)$ APS-konvex ist. Desweiteren können wir analog wie für Lemma 4.11 Knowles Bedingung (APS3) mit der APS-Konvexität in Verbindung setzen.

Satz 5.3. *Die Bedingung von Knowles (APS3)*

$$\frac{d}{dR} \left[R \left(\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2) + \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2) \right) \Big|_{I_1=I_2=3+R^2} \right] > 0, \quad \forall R > 0 \quad (\text{APS3})$$

ist äquivalent zur APS-Konvexität von $W(F)$

$$R \mapsto W(3 + R^2, 3 + R^2, 1) \quad \text{ist konvex} \quad \forall R > 0.$$

Beweis. Der Beweis folgt äquivalent wie Lemma zu 4.11.

$$\begin{aligned} & \text{APS-Konvexität von } W(F) \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{dR} [R M(R^2)] > 0, \quad \forall R > 0 \\ \Leftrightarrow & (\text{APS3}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Wir wollen nun auch kurz den Fall

$$\operatorname{div}(H\nabla u) = c \quad (5.37)$$

für ein beliebiges $c \neq 0$ betrachten. Dabei ändert sich im variationellen Ansatz lediglich, dass aus

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(M(\|\nabla u\|^2) \nabla u) = 0, \\ & \int_{\Omega} \frac{1}{2} g(\|\nabla u\|^2) dx \longrightarrow \min., \end{aligned}$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(M(\|\nabla u\|^2) \nabla u) = c, \\ & \int_{\Omega} \frac{1}{2} g(\|\nabla u\|^2) - c u dx \longrightarrow \min., \end{aligned}$$

werden.

Lemma 5.4. *Jedes APS-konvexe Energiefunktional $W(F)$ hat eine Lösung für*

$$\operatorname{div}(H\nabla u) = c. \quad (5.38)$$

Beweis. Wir wissen schon, dass durch die APS-Konvexität die gesuchte Gleichung für den Fall $c = 0$ gelöst wird. Wir wollen dabei daran erinnern, dass die Existenz der Lösung aus der Konvexität und Koerzitivität¹⁵ von g in ∇u der Minimierungsaufgabe

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} g(\|\nabla u\|^2) \, dx \longrightarrow \min.$$

folgte. Falls wir zeigen können, dass auch

$$h(\nabla u, u) := \frac{1}{2} g(\|\nabla u\|^2) - c u \tag{5.39}$$

konvex ist, kann der Beweis äquivalent geführt werden, da aus dem Variationsfunktional (5.39) die Gleichung (5.38) folgt. Dies liegt an der Tatsache, dass der hinzukommende Term $c u$ nur von linearer Art ist und für die zweite Ableitung $\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} = 0$ gilt. Damit ändert dieser Term nichts an der Konvexitätsbetrachtung von g bzw. h .

Deswegen ist auch $h(\nabla u, u)$ konvex in $\nabla u, u$, falls $g(\|\nabla u\|^2)$ konvex in ∇u ist.

Bleibt noch die Koerzitivität von $h(\nabla u, u)$ zu zeigen. Dabei ist h koerziv, wenn

$$h(\nabla u, u) \geq c_1 \left(\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) - c_2, \quad c_1, c_2 > 0 \tag{5.40}$$

gilt. Wir wollen die Koerzitivität von g

$$g(u) \geq c'_1 \|\nabla u\|_{L^2(\Gamma)}^2 - c'_2, \quad c'_1, c'_2 > 0 \tag{5.41}$$

verwenden. Dafür muss also nur der hinzukommende Term $\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2$ abgeschätzt werden. Für Dirichlet-Randbedingungen¹⁶ kann die Poincaré-Ungleichung Neff [14, Kap. 3.14]

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \frac{1}{c^+(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Gamma)}^2, \quad \text{falls } u|_{A \subset \partial \Gamma} = 0. \tag{5.42}$$

verwendet werden. Damit folgt die Koerzitivität von $h(\nabla u, u)$ direkt aus der Koerzitivität von $g(\nabla u)$. ■

5.3.3 Erste Energiebedingung

Im vorherigen Kapitel haben wir gezeigt, dass $W(F)$ APS-konvex sein muss, damit für Gleichung (III) eine Lösung $u(x_1, x_2)$ existiert. Zudem ist diese Lösung dieselbe, wie der APS-Minimierer aus der Rückwärts-Minimierung.

Nun setzen wir in diesem Abschnitt eine Lösung der dritten Gleichung aus der APS-Konvexität voraus und überlegen uns, unter welchen Bedingungen diese Lösung zusammen mit dem noch nicht bestimmten Lagrange-Multiplikator $p(\mathbf{x})$ auch die beiden Gleichungen (I) und (II) erfüllt. Das Gleichungssystem ist somit um eine Gleichung überbestimmt. Deswegen wollen wir eine Bedingung an das Energiefunktional $W(F)$ finden, sodass Gleichung (I) und (II) sich zu einer Gleichung vereinfachen lassen. Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$q_{,x_1} + 2c\alpha = (\alpha^2 G)_{,x_1} + (\alpha\beta G)_{,x_2}, \tag{I}$$

$$q_{,x_2} + 2c\beta = (\alpha\beta G)_{,x_1} + (\beta^2 G)_{,x_2}, \tag{II}$$

$$-c = \operatorname{div}(H\nabla u). \tag{III}$$

¹⁵Vergleiche dazu Kapitel 6 auf Seite 53

¹⁶Mit Verschieben von $u(x_1, x_2)$, sodass ein Teil des Randes $u_D(x_1, x_2) = 0$ erfüllt.

Um die Gleichungen in Verbindung zu setzen, fordert Knowles [9, eq. (3.22)] die Bedingung¹⁷

$$b H(I_1, I_2) = G(I_1, I_2), \quad b = \text{const.} \quad (5.43)$$

Mit G und H ausgeschrieben lautet sie

$$\exists b \in \mathbb{R} : \quad b \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2) + (b-1) \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2) = 0, \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3. \quad (\text{K1}^*)$$

Mit dieser Beziehung kann man sowohl Gleichung (I) als auch Gleichung (II) vereinfachen, indem man Gleichung (III) ausnutzt. So können Divergenzterme wegfallen

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}(H \nabla u) &= -c \\ b H(I_1, I_2) &= G(I_1, I_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{div}(G \nabla u) = -bc. \quad (\text{III}')$$

Gleichung (I) lässt sich nun durch (III') vereinfachen zu

$$\begin{aligned} q_{,x_1} + 2c\alpha &= (\alpha^2 G)_{,x_1} + (\alpha\beta G)_{,x_2} \\ &= \alpha(\alpha G)_{,x_1} + \alpha_{,x_1} \alpha G + \alpha(\beta G)_{,x_2} + \alpha_{,x_2} \beta G \\ &= \alpha \operatorname{div}(G \nabla u) + \alpha_{,x_1} \alpha G + \alpha_{,x_2} \beta G \\ &= G(\alpha_{,x_1} \alpha + \alpha_{,x_2} \beta) - bc \alpha \\ &= G(\alpha \alpha_{,x_1} + \beta \beta_{,x_1}) - bc \alpha \\ &= G \left(\frac{1}{2} \gamma^2 \right)_{,x_1} - bc \alpha \\ &= G \gamma \gamma_{,x_1} - bc \alpha, \\ \Leftrightarrow \quad q_{,x_1} + (2+b)c\alpha &= G \gamma \gamma_{,x_1}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Dabei wurde verwendet, dass $\alpha_{,x_2} = u_{,x_1 x_2} = u_{,x_2 x_1} = \beta_{,x_1}$ gilt. Analog lässt sich auch (II) vereinfachen, sodass die EL-Gleichungen für ein $W(F)$, welches Bedingung (K1) erfüllt

$$q_{,x_1} + (2+b)c\alpha = G \gamma \gamma_{,x_1}, \quad (\text{I})$$

$$q_{,x_2} + (2+b)c\beta = G \gamma \gamma_{,x_2}, \quad (\text{II})$$

$$-c = (\alpha H)_{,x_1} + (\beta H)_{,x_2} \quad (\text{III})$$

lauten. Unter Voraussetzung ausreichender Differenzierbarkeit können wir aus (I) und (II) eine neue Gleichung erhalten, die unabhängig von p ist. Aus

$$\begin{aligned} (q_{,x_1} + (2+b)c\alpha)_{,x_2} &= q_{,x_1 x_2} + (2+b)c\alpha_{,x_2} \\ &= q_{,x_2 x_1} + (2+b)c\beta_{,x_1} \\ &= (q_{,x_2} + (2+b)c\beta)_{,x_1} \end{aligned} \quad (5.45)$$

folgt die Beziehung

$$\begin{aligned} &(G \gamma \gamma_{,x_1})_{,x_2} = (G \gamma \gamma_{,x_2})_{,x_1} \\ \Leftrightarrow \quad &G_{,x_2} \gamma \gamma_{,x_1} + G \gamma_{,x_2} \gamma_{,x_1} + G \gamma \gamma_{,x_1 x_2} = G_{,x_1} \gamma \gamma_{,x_2} + G \gamma_{,x_1} \gamma_{,x_2} + G \gamma \gamma_{,x_2 x_1} \\ \Leftrightarrow \quad &G_{,x_2} \gamma \gamma_{,x_1} = G_{,x_1} \gamma \gamma_{,x_2} \\ \Leftrightarrow \quad &G_{,x_2} \gamma_{,x_1} = G_{,x_1} \gamma_{,x_2}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

¹⁷In Knowles Arbeit werden die APS-Verformungen noch durch einen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ erweitert. Für den Fall $\lambda = 1$ erhalten wir dieselbe Beziehung.

Ausgeschrieben lautet die Gleichung

$$\left[\left(\frac{\partial W}{I_2}(I_1, I_2) \right)_{I_1=I_2=3+\gamma^2} \right]_{,x_2} \gamma_{,x_1} = \left[\left(\frac{\partial W}{I_2}(I_1, I_2) \right)_{I_1=I_2=3+\gamma^2} \right]_{,x_1} \gamma_{,x_2}. \quad (5.47)$$

Bezeichnen wir $g(\gamma^2)$ mit $g(\gamma^2) := \frac{\partial W}{I_2}(I_1, I_2) \Big|_{I_1=I_2=3+\gamma^2}$ erkennt man, dass (5.47) immer erfüllt ist, denn

$$\begin{aligned} g(\gamma^2)_{,x_2} \gamma_{,x_1} &= g(\gamma^2)_{,x_1} \gamma_{,x_2} \\ \Leftrightarrow g'(\gamma^2) 2\gamma \gamma_{,x_2} \gamma_{,x_1} &= g'(\gamma^2) 2\gamma \gamma_{,x_1} \gamma_{,x_2}. \end{aligned}$$

Deswegen dürfen wir eine der beiden Gleichungen (I) oder (II) streichen und übrig bleiben zwei Gleichungen, um $u(x_1, x_2)$ und $\bar{p}(x_1, x_2)$ zu bestimmen. Das Gleichungssystem ist damit unter der Voraussetzung (K1) nicht mehr länger überbestimmt.

Diese Erkenntnis fassen wir in dem folgenden Satz zusammen.

Satz 5.5. *Sei $W(I_1, I_2)$ ein inkompressibles, APS-konvexes isotropes elastisches Energiefunktional. Falls W den Zusammenhang*

$$\exists b \in \mathbb{R} : \quad b \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2) + (b-1) \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2) = 0, \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3 \quad (\text{K1}^*)$$

erfüllt, so ist W APS-zulässig.

Auch wenn für die restliche Arbeit nicht weiter von Bedeutung, wollen wir nun noch den Lagrange-Multiplikator $p(\mathbf{x})$ bestimmen. Dafür fassen wir (I) auf als

$$\begin{aligned} q_{,x_1} &= G\gamma\gamma_{,x_1} - (2+b)c\alpha, \\ \Leftrightarrow q_{,x_1} &= \frac{b}{2}W(I_1, I_2)_{,x_1} - (2+b)c u_{,x_1}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Dabei wurde wieder die Beziehung $I_1 = I_2 = 3 + \gamma^2$ verwendet, sowie Gleichung (K1), um folgenden Zusammenhang zu erhalten

$$\begin{aligned} \frac{b}{2}W(I_1, I_2)_{,x_1} &= \frac{b}{2} \frac{d}{dx_1} W(3 + \gamma^2, 3 + \gamma^2) \\ &= \frac{b}{2} \frac{\partial W}{\partial I_1}(3 + \gamma^2, 3 + \gamma^2) 2\gamma \gamma_{,x_1} + \frac{b}{2} \frac{\partial W}{\partial I_2}(3 + \gamma^2, 3 + \gamma^2) 2\gamma \gamma_{,x_1} \\ &= b \left(\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2) + \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2) \right) \gamma \gamma_{,x_1} \\ &= b H(I_1, I_2) \gamma \gamma_{,x_1} \\ &= G(I_1, I_2) \gamma \gamma_{,x_1}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Analog liefert Gleichung (II) die Beziehung

$$\begin{aligned} q_{,x_2} &= G\gamma\gamma_{,x_2} - (2+b)c\beta \\ \Leftrightarrow q_{,x_2} &= \frac{b}{2}W(I_1, I_2)_{,x_2} - (2+b)c u_{,x_2}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Aus früherer Rechnung (5.28) konnte schon die Linearität von p und damit auch q in x_3 -Richtung gezeigt werden. Mit allen drei Gleichungen zusammen kann $q(\mathbf{x})$ bestimmt werden als

$$q(\mathbf{x}) = \frac{b}{2} W(I_1, I_2) - (2 + b)cu(x_1, x_2) + cx_3. \quad (5.51)$$

Daraus lässt sich nun mit (5.31) direkt $p(\mathbf{x})$ bestimmen

$$p(\mathbf{x}) = \frac{b}{2} W(I_1, I_2) - 2\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2) - 2(2 + \gamma^2)\frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2) - (2 + b)cu + cx_3. \quad (5.52)$$

Dabei ist an die Konstante c keinerlei Bedingung gestellt. Mit der Wahl $c = 0$ lautet unser von x_3 unabhängiger Lagrange-Multiplikator

$$p(x_1, x_2) = \frac{b}{2} W(I_1, I_2) - 2\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2) - 2(2 + \gamma^2)\frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2), \quad \text{für } I_1 = I_2 = 3 + \gamma^2. \quad (5.53)$$

Damit ist p wohlbestimmt und kann mit obiger Formel aus dem Minimierer $u(x_1, x_2)$ berechnet werden.

5.4 Kompressible Materialien

Aus dem letzten Abschnitt wurde für die Existenz von APS-Lösungen unter der Nebenbedingung $\det(F) = 1$ die Bedingung (K1) an das Energiefunktional $W(F)$ hergeleitet. In diesem Abschnitt soll auf diese Nebenbedingung der Inkompressibilität verzichtet und untersucht werden, welche weitere Bedingung wir stellen müssen, damit auch eine kompressible Materialbeschreibung APS-Lösungen zulässt. Dabei gehen wir vollkommen analog zu der inkompressiblen Vorwärts-Minimierung vor.

5.4.1 Euler-Lagrange-Gleichungen

Es werden wieder die Euler-Lagrange-Gleichungen allgemein hergeleitet, um danach APS-Funktionen in sie einzusetzen. Daher betrachten wir

$$I(\varphi) = \int_{\Omega} W(\nabla\varphi) \, dx \longrightarrow \min. \quad (5.54)$$

ohne die Nebenbedingung der Inkompressibilität. Dabei soll $W(\nabla\varphi)$ wieder als $W(F_{11}, F_{12}, \dots)$ mit

$$\nabla\varphi = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix}$$

aufgefasst werden. Wir bilden die erste Variation in Richtung $\psi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$:

$$\begin{aligned}
0 &= \left. \frac{d}{dt} I(\varphi + t\psi) \right|_{t=0} \\
&= \int_{\Omega} \left. \frac{d}{dt} W(\nabla\varphi + t\nabla\psi) \right|_{t=0} dx \\
&= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 W_{F_{ik}}(\nabla\varphi + t\nabla\psi) \cdot \left(\frac{d}{dx_i} \psi_k \right) \Big|_{t=0} dx \\
&= \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} W_{F_{ik}}(\nabla\varphi) \cdot \left(\frac{d}{dx_i} \psi_k \right) dx \\
&\stackrel{P.I.}{=} \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \left(-\frac{d}{dx_i} W_{F_{ik}}(\nabla\varphi) \right) \psi_k dx \\
&= \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} - \left(\sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx_i} L_{W_{ik}}(\nabla\varphi) \right) \psi_k dx.
\end{aligned}$$

Das Fundamentallema der Variationsrechnung, siehe Neff [14, eq. (3.7)], liefert uns wieder die gesuchten Euler-Lagrange-Gleichungen

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx_i} W_{F_{ik}}(\nabla\varphi) = 0 \quad \forall k \in \{1, 2, 3\}.$$

Der Übersicht wegen wird folgende Notation eingeführt

$$DW(F) = \begin{pmatrix} W_{F_{11}} & W_{F_{12}} & W_{F_{13}} \\ W_{F_{21}} & W_{F_{22}} & W_{F_{23}} \\ W_{F_{31}} & W_{F_{32}} & W_{F_{33}} \end{pmatrix}.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten dann vereinfacht

$$\text{Div}[DW(\nabla\varphi)] = 0. \tag{5.55}$$

Jede isotrope Energieformulierung $W(F)$ kann auch über die Invarianten von $B = FF^T$ beschrieben werden. Diesmal kann nicht wie bei der inkompressiblen Betrachtung auf I_3 verzichtet werden, da bei kompressiblen Energien $I_3 = \det(F)^2 \neq 1$ möglich ist.

Um $DW(F) = DW(I_1, I_2, I_3)$ zu bestimmen, können wir wieder die Ableitungen aus Kapitel 2.4 verwenden

$$DI_1(B).H = \langle \mathbb{1}, H \rangle, \tag{2.21}$$

$$DI_2(B).H = \langle \text{tr}(B)\mathbb{1} - B^T, H \rangle = \langle I_1\mathbb{1} - B, H \rangle, \tag{2.22}$$

$$DI_3(B).H = \langle \text{Cof}(B), H \rangle = \langle \det(B)B^{-T}, H \rangle = \langle I_3B^{-1}, H \rangle. \tag{2.23}$$

Zusammen mit $D_F B(F).H = FH^T + HF^T$ und der Kettenregel sind

$$D_F I_1(B(F)).H = \langle 2F, H \rangle, \tag{5.21}$$

$$D_B I_2(B(F)).H = \langle 2(I_1\mathbb{1} - B)F, H \rangle \tag{5.21}$$

schon aus dem inkompressiblen Fall bekannt. Für den kompressiblen Fall wird auch noch

$$\begin{aligned}
D_F I_3(B(F)) \cdot H &= \langle D_B I_3(B), D_F B(F) \cdot H \rangle \\
&= \langle I_3 B^{-1}, F H^T + H F^T \rangle \\
&= \langle H, (I_3 B^{-1})^T F \rangle + \langle I_3 B^{-1} F \rangle \\
&= \langle H, I_3 (B^T)^{-1} F \rangle + \langle I_3 B^{-1} F \rangle \\
&= \langle 2 I_3 B^{-1} F, H \rangle \\
&= \langle 2 I_3 F^{-T}, H \rangle
\end{aligned} \tag{5.56}$$

benötigt. Dabei wurde im letzten Schritt verwendet, dass

$$B^{-1} F = (F F^T)^{-1} F = (F^{-T} F^{-1}) F = F^{-T} (F^{-1} F) = F^{-T}$$

gilt. Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}
DW(F) &= \frac{\partial W}{\partial I_1} D_B I_1(B) D_F B(F) + \frac{\partial W}{\partial I_2} D_B I_2(B) D_F B(F) + \frac{\partial W}{\partial I_3} D_B I_3(B) D_F B(F) \\
&= 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} F + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 \mathbb{1} - B) F + 2 I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} F^{-T}.
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen in der Darstellung der Invarianten lauten dann

$$\text{Div} \left(2 \frac{\partial W(I_1, I_2, I_3)}{\partial I_1} F + 2 \frac{\partial W(I_1, I_2, I_3)}{\partial I_2} (I_1 \mathbb{1} - B) F + 2 I_3 \frac{\partial W(I_1, I_2, I_3)}{\partial I_3} F^{-T} \right) = 0. \tag{5.58}$$

Um nun Bedingungen für das Energiefunktional ableiten zu können, werden in die Euler-Lagrange-Gleichungen wieder APS-Funktionen eingesetzt. Die Größen F , B , I_1 und I_2 und $(I_1(B) \mathbb{1} - B) F$ wurden schon im inkompressiblen Fall berechnet. Da für APS-Funktionen nach (3.8) $I_3 = 1$ gilt, setzen wir

$$p(I_1, I_2) := 2 \frac{\partial W}{\partial I_3}(I_1, I_2, 1). \tag{5.59}$$

Dadurch können wir (5.58) schreiben als

$$\text{Div} \left(2 \frac{\partial W}{\partial I_1} F + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 \mathbb{1} - B) F + p F^{-T} \right) = 0, \tag{5.60}$$

siehe auch Knowles [10, eq. (10)]. Die EL-Gleichungen sehen in dieser Darstellung exakt aus wie im inkompressiblen Fall. Dabei muss aber zwingend beachtet werden, dass diesmal $p(I_1, I_2)$ kein freier Lagrange-Multiplikator ist, sondern aus $W(I_1, I_2, I_3)$ bestimmt wird. Obwohl die Gleichungen durch das APS-Einsetzen von I_3 unabhängig sind, ist $W(F)$ selbst weiter von I_3 abhängig.

Explizites Einsetzen liefert so den gleichen Ausdruck

$$\text{Div} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2(2 + \beta^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} + p & -2\alpha\beta \frac{\partial W}{\partial I_2} & -2\alpha \left(\frac{\partial W}{\partial I_2} + p \right) \\ -2\alpha\beta \frac{\partial W}{\partial I_2} & 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2(2 + \alpha^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} + p & -2\beta \left(\frac{\partial W}{\partial I_2} + p \right) \\ 2\alpha \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) & 2\beta \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) & 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} + 4 \frac{\partial W}{\partial I_2} + p \end{pmatrix} = 0 \tag{5.61}$$

wie im inkompressiblen Fall.

Wir erhalten auch hier 3 partielle DGL's, aus denen wir diesmal aber nur die skalare Funktion $u(x_1, x_2)$ bestimmen sollen. Das Gleichungssystem ist also um eine weitere Gleichung

überbestimmt. Damit eine Lösung \bar{u} existieren kann, die alle 3 DGL's erfüllt, müssen Bedingungen an das Energiefunktional gefordert werden, sodass nun zwei Gleichungen wegfallen. Wir erwarten hier deswegen zwei Bedingungen an $W(I_1, I_2, I_3)$ aufstellen zu müssen.

Diesmal ist auch $p(I_1, I_2)$ unabhängig von x_3 , sodass sich die Gleichungen im Vergleich zu dem inkompressiblen Fall noch weiter vereinfachen. Da nun sind alle auftretende Terme unabhängig von x_3 , braucht die letzte Spalte der Matrix nicht weiter berechnet werden und die unbekanntenen wegfallenden Terme werden einfach mit \star gekennzeichnet.

Wir wollen die gleichen Bezeichnungen wie im inkompressiblen Fall einführen, um (5.61) übersichtlicher zu gestalten:

$$G(I_1, I_2) := 2 \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2), \quad (5.62)$$

$$H(I_1, I_2) := 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2) + \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2) \right], \quad (5.63)$$

$$q(I_1, I_2) := p(I_1, I_2) + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2) + 2(2 + \gamma^2) \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2). \quad (5.64)$$

Dadurch lassen sich die Euler-Lagrange Gleichungen schreiben als

$$\text{Div} \begin{pmatrix} q - \alpha^2 G & -2\alpha\beta G & \star \\ -2\alpha\beta G & q - \beta^2 G & \star \\ \alpha H & \beta H & \star \end{pmatrix} = 0. \quad (5.65)$$

Wir erhalten so für den kompressiblen Fall 3 Gleichungen

$$q_{,x_1} = (\alpha^2 G)_{,x_1} + (\alpha\beta G)_{,x_2}, \quad (\text{I})$$

$$q_{,x_2} = (\alpha\beta G)_{,x_1} + (\beta^2 G)_{,x_2}, \quad (\text{II})$$

$$0 = (\alpha H)_{,x_1} + (\beta H)_{,x_2}. \quad (\text{III})$$

5.4.2 Simple-Plane-Shear

Wir wollen einen kurzen Einschub vornehmen, um auf das schon im Kapitel 3.5 eingeführte Problem zu sensibilisieren:

Jedes Energiefunktional, insbesondere auch ein nicht APS-zulässiges Funktional, hat mit der Ruhelage eine mögliche APS-Verformung. Wir wollen die Ruhelage zu den sogenannten **Simple-Plane-Shear-Verformungen**, kurz SSP, erweitern. Dabei sind SSP-Verformungen spezielle APS-Verformungen, welche alle drei Euler-Lagrange Gleichungen in trivialer Weise durch $\gamma = \text{const.}$ erfüllen. Schauen wir uns dafür die homogene Verformung

$$u(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 \quad (5.66)$$

mit drei festen Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ an. Die Euler-Lagrange-Gleichungen hängen von $\gamma^2 = \|\nabla u\|^2$ ab. Aus der Linearität von u folgt direkt

$$\begin{aligned} \alpha = u_{,x_1} = c_1, \quad \beta = u_{,x_2} = c_2 &\quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \text{const.} \\ &\quad \Rightarrow \quad I_1 = I_2 = \text{const.} \\ &\quad \Rightarrow \quad G(I_1, I_2), H(I_1, I_2), p(I_1, I_2), q(I_1, I_2) = \text{const.} \end{aligned}$$

Dadurch sind alle drei Euler-Lagrange-Gleichungen trivialer Weise erfüllt.

Die Simple-Plane-Shear Verformungen können noch erweitert werden, indem wir weitere Funktionstypen von $u(x_1, x_2)$ finden, die die Euler-Lagrange-Gleichungen immer erfüllen. In der

Publikation von Hill [6, eq. (2.7)] wurden noch weitere solcher Formen von $u(x_1, x_2)$ für den inkompressiblen Falls aufgestellt. Sie lauten

$$u(x_1, x_2) = c_1 \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + c_2, \quad (5.67)$$

$$u(x_1, x_2) = f(x_1^2 + x_2^2), \quad (5.68)$$

$$u(x_1, x_2) = g(c_1 x_1 + c_2 x_2), \quad (5.69)$$

mit beliebigen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und skalaren Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Obwohl Hill nur den inkompressiblen Fall bearbeitet hat, erfüllt die erste Verformung (5.67) wieder über $\gamma = \text{const.}$ die Euler-Lagrange-Gleichungen für den kompressiblen Fall, es gilt

$$\begin{aligned} \alpha = u_{,x_1} &= c_1 \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} \frac{-x_2}{x_1^2} = \frac{-c_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \beta = u_{,x_2} &= c_1 \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} \frac{1}{x_1} = \frac{c_1 x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \\ \Rightarrow \quad \gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 = c_1^2 \frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} = \text{const.} \\ \Rightarrow \quad I_1 &= I_2 = \text{const.} \\ \Rightarrow \quad G(I_1, I_2), H(I_1, I_2), p(I_1, I_2), q(I_1, I_2) &= \text{const.} \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass jedes Energiefunktional APS-Verformungen in Form von SSP-Verformungen erzeugen kann, falls diese zu vorgegebenen Randbedingungen passen. Bei den gesuchten Energien, welche APS-zulässig sein sollen, meinen wir nun insbesondere APS-Verformungen, welche **nicht** SSP sind.

5.4.3 Zweite Energiebedingung

Die Gleichung (III) wurde schon im inkompressiblen Fall Kapitel 5.3.2 betrachtet. Die Bedingung für die APS-Konvexität wurde als

$$\frac{d}{dR} \left[R \left(\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2, 1) + \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2, 1) \right) \Big|_{I_1=I_2=3+R^2} \right] > 0 \quad \forall R > 0 \quad (\text{APS3})$$

hergeleitet und kann auch hier verwendet werden, da im APS-Fall $I_3 = 1$ gilt. Sei also hier die Existenz von (III) mittels APS-Konvexität gegeben. Wir wollen überlegen, unter welchen Forderungen an $W(I_1, I_2, I_3)$ dann auch die beiden anderen Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt sind. Um die Gleichungen

$$q_{,x_1} = (\alpha^2 G)_{,x_1} + (\alpha \beta G)_{,x_2}, \quad (\text{I})$$

$$q_{,x_2} = (\alpha \beta G)_{,x_1} + (\beta^2 G)_{,x_2}, \quad (\text{II})$$

$$0 = (\alpha H)_{,x_1} + (\beta H)_{,x_2} \quad (\text{III})$$

in Verbindung zu setzen, soll die gleiche Beziehung wie im inkompressiblen Fall verwendet werden

$$b H(I_1, I_2) = G(I_1, I_2), \quad b = \text{const.} \quad (\text{K1})$$

Durch die Abhängigkeit von W durch I_3 lautet sie mit G und H ausgeschrieben

$$\exists b \in \mathbb{R} : \quad b \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2, I_3) + (b-1) \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2, I_3) = 0 \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3, I_3 = 1. \quad (\text{K1})$$

Analog soll wieder die Beziehung

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}(H \nabla u) &= 0 \\ b H(I_1, I_2) &= G(I_1, I_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{div}(G \nabla u) = 0 \quad (\text{III}') \quad (5.70)$$

verwendet werden, um damit Gleichung (I) zu

$$\begin{aligned} q_{,x_1} &= (\alpha^2 G)_{,x_1} + (\alpha \beta G)_{,x_2} \\ &= \alpha (\alpha G)_{,x_1} + \alpha_{,x_1} \alpha G + \alpha (\beta G)_{,x_2} + \alpha_{,x_2} \beta G \\ &= \alpha \operatorname{div}(G \nabla u) + \alpha_{,x_1} \alpha G + \alpha_{,x_2} \beta G \\ &= G(\alpha_{,x_1} \alpha + \alpha_{,x_2} \beta) \\ &= G(\alpha \alpha_{,x_1} + \beta \beta_{,x_1}) \\ &= G \left(\frac{1}{2} \gamma^2 \right)_{,x_1} \\ &= G \gamma \gamma_{,x_1} \end{aligned} \quad (5.70)$$

zu vereinfachen. Dabei wurde $\alpha_{,x_2} = u_{,x_1 x_2} = u_{,x_2 x_1} = \beta_{,x_1}$ umgeformt.

Durch die Abhängigkeit der Invarianten¹⁸ von $u(x_1, x_2)$ kann $q(I_1, I_2)$ als eine Abbildung von $u(x_1, x_2)$ durch $q = q(\gamma^2)$ aufgefasst werden und es gilt

$$\frac{dq(\gamma^2)}{dx_1} = q'(\gamma^2) 2\gamma \gamma_{,x_1}.$$

Damit können wir (I) schreiben als

$$\left(q'(\gamma^2) - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_2}(3 + \gamma^2, 3 + \gamma^2, 1) \right) 2\gamma \gamma_{,x_1} = 0. \quad (5.71)$$

Vollkommen analog lässt sich (II) umformen zu

$$\left(q'(\gamma^2) - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_2}(3 + \gamma^2, 3 + \gamma^2, 1) \right) 2\gamma \gamma_{,x_2} = 0. \quad (5.72)$$

Insgesamt erhält man mit der Bedingung (K1) das Gleichungssystem

$$\left[q'(\gamma^2) - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_2}(3 + \gamma^2, 3 + \gamma^2, 1) \right] 2\gamma \gamma_{,x_1} = 0 \quad (\text{I})$$

$$\left[q'(\gamma^2) - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_2}(3 + \gamma^2, 3 + \gamma^2, 1) \right] 2\gamma \gamma_{,x_2} = 0 \quad (\text{II})$$

$$\left[\alpha \frac{\partial W}{\partial I_2}(3 + \gamma^2, 3 + \gamma^2, 1) \right]_{,x_1} + \left[\beta \frac{\partial W}{\partial I_2}(3 + \gamma^2, 3 + \gamma^2, 1) \right]_{,x_2} = 0. \quad (\text{III})$$

Sei $u = u(x_1, x_2)$ Lösung der Gleichung (III) und habe nicht die Form einer SSP-Verformung. Dann gilt $\gamma = \|\nabla u\|^2 \neq \text{const.}$ und somit vereinfachen sich sowohl (I) als auch (II) zu

$$q'(\gamma^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_2}(3 + \gamma^2, 3 + \gamma^2, 1). \quad (5.73)$$

Also wurden die beiden Gleichungen (I) und (II) durch (K1) auf eine Gleichung reduziert. Übrig sind deswegen noch 2 Gleichungen, wobei uns (III) weiterhin die Lösung $u(x_1, x_2)$ aufstellen soll, während die zusätzliche Gleichung (5.73) immer noch dafür sorgt, dass das Gleichungssystem

¹⁸ $I_1 = I_2 = 3 + \gamma^2 = 3 + \|\nabla u\|^2$.

überbestimmt ist. Wir suchen eine zweite Bedingung an das Energiefunktional $W(I_1, I_2, I_3)$, sodass Gleichung (5.73) für alle Lösungen u aus Gleichung (III) immer erfüllt ist.

Gleichung (5.73) hängt aber offensichtlich von $\gamma = \|\nabla u\|$ ab, wir benötigen aber eine Gleichung für das Energiefunktional W unabhängig von seiner Verformung φ . Betrachtet man die Gleichung an einem festen Punkt $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, so ist $\gamma(x_{0_1}, x_{0_2})$ eine konstante positive reelle Zahl $R \in \mathbb{R}$. Für eine Verformung, die nicht von der SSP-Art ist, kann $\gamma(x_1, x_2)$ nicht konstant auf Ω sein. Die punktweise Betrachtung von Gleichung (5.73) soll auf ganz Ω erfüllt sein und deshalb für alle möglichen $\{R \in \mathbb{R} \mid \exists (x_1, x_2, \star) \in \Omega : \gamma(x_1, x_2) = R\}$ gelten.

Es reicht also nicht aus, dass

$$q(R^2) = 2 \frac{\partial W}{\partial I_3}(I_1, I_2, 1) + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2, 1) + 2(2 + R^2) \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2, 1), \quad \text{mit } I_1 = I_2 = 3 + R^2$$

nur für ein einzelnes $R \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Mit der punktweisen Betrachtung für $\forall R \in \mathbb{R}$ kann die Gleichung in die gewünschte Form gebracht werden.

Es gilt

$$I_1'(R^2) = I_2'(R^2) = \frac{d}{d(R^2)}[3 + R^2] = 1.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} q'(R^2) &= 2 \frac{d}{d(R^2)} \frac{\partial W}{\partial I_3}(I_1, I_2, 1) + 2 \frac{d}{d(R^2)} \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2, 1) + 2(2 + R^2) \frac{d}{d(R^2)} \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2, 1) \\ &= 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial I_3 \partial I_1} 1 + \frac{\partial^2 W}{\partial I_3 \partial I_2} 1 \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} 1 + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} 1 \right) \\ &\quad + 2(2 + R^2) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_1} 1 + \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} 1 \right) \\ &= 2 \left[\frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_3} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_3} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} + (2 + R^2) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} \right) \right] \\ &= 2 \left[\frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_3} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_3} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} + I_1 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} + (I_1 - 1) \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} \right]. \end{aligned}$$

Dadurch lässt sich aus (5.73) die zweite Bedingung an das Energiefunktional W schreiben als

$$\frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} + I_1 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_3} + (I_1 - 1) \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_2} = 0, \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3, I_3 = 1. \quad (\text{K2})$$

Diese Bedingung wurde zuerst von Knowles [10, eq. (21)] aufgestellt. Mit den beiden Bedingungen (K1) und (K2) vereinfachen sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für eine kompressible Materialbetrachtung immer so, dass nach dem Einsetzen einer APS-Funktion die Gleichungen (I) und (II) wegfallen. Zusammen mit der APS-Konvexität ist folgender Satz hergeleitet.

Satz 5.6. Sei $W(I_1, I_2, I_3)$ ein APS-konvexes, isotropes elastisches Energiefunktional. Das Funktional W ist genau dann APS-zulässig, falls

$$\exists b \in \mathbb{R} : \quad b \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2, I_3) + (b-1) \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2, I_3) = 0, \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3, I_3 = 1, \quad (\text{K1})$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} + I_1 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_3} + (I_1 - 1) \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_2} = 0, \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3, I_3 = 1, \quad (\text{K2})$$

erfüllt ist.

Mit diesem Satz ist gezeigt, welche Energiefunktionale nichttriviale Anti-Plane Shear Verformungen zulassen. Dies bedeutet, dass ein APS-Minimierer von $W(F)$ auch im globalen Fall ein stationärer Punkt von $W(F)$ ist. Die Existenz eines APS-Minimierers konnte aus der APS-Konvexität von $W(F)$ gesichert werden. Bestimmt wird $u(x_1, x_2)$ durch Lösen der Gleichung (III) oder der äquivalenten Gleichung aus der Rückwerts-Minimierung. Dies führt zu folgendem Satz

Satz 5.7. Falls ein Energiefunktional APS-zulässig ist, indem es die Gleichung aus Theorem 5.6 erfüllt, so kann der Minimierer aus Gleichung

$$\operatorname{div} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2, 1) + \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2, 1) \right)_{I_1=I_2=3+\|\nabla u\|^2} \nabla u \right) = 0 \quad (\text{III})$$

oder der äquivalenten Gleichung

$$\operatorname{div} (\mathcal{W}'(I_1)_{I_1=3+\|\nabla u\|^2} \nabla u) = 0, \quad \text{mit } \mathcal{W}(I_1) := W(I_1, I_1, 1) \quad (4.3)$$

mit zugehörigen Nebenbedingungen gelöst werden.

5.5 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden bis hier hin im Hinblick auf die Frage nach der Existenz einer APS-Verformung folgende Begriffe eingeführt.

- Ein **APS-Minimum** ist ein Punkt, der bei der vorherigen Einschränkung auf APS-Verformungen stationär ist (Rückwärts-Minimierung).
- Ein **globales Minimum** ist ein Punkt, der ohne Einschränkung auf APS-Verformungen stationär ist und über dessen Form nichts bekannt ist (Vorwärts-Minimierung).
- Ein **freies APS-Minimum** ist ein Punkt, der sowohl bei vorheriger Einschränkung auf APS-Verformungen (Rückwärts-Minimierung), wie auch im globalen Fall (Vorwärts-Minimierung) stationär ist.
- Die **APS-Konvexität** von $W(F)$ besagt, dass das Energiefunktional eingeschränkt auf die APS-Verformungen konvex ist. Daraus lässt sich die Existenz eines APS-Minimum beweisen.
- Die **APS-Zulässigkeit** besagt, dass $W(F)$ die Bedingungen (K1) und (K2) erfüllt und dadurch jedes mögliche stationäre APS-Minimum auch global stationär ist. Dadurch sind alle APS-Minima auch schon frei APS-Minima.

Um die Bedingungen (K1), (K2) und APS-Konvexität zu veranschaulichen, betrachten wir ein mögliches $W(F)$ für alle möglichen Kombinationen der Bedingungen und visualisieren die unterschiedlichen Fälle. Wir schränken uns hier auf den kompressiblen Fall ein, im inkompressiblen Fall muss lediglich die Bedingung (K2) weggelassen werden.

- Energie $W(F)$ ist APS-konvex und APS-zulässig:
 $W(F)$ hat für alle möglichen APS-Randwerte ein eindeutiges APS-Minimum, welches global stabil ist. Es sind auch weitere stationäre nicht-APS-Verformungen möglich.

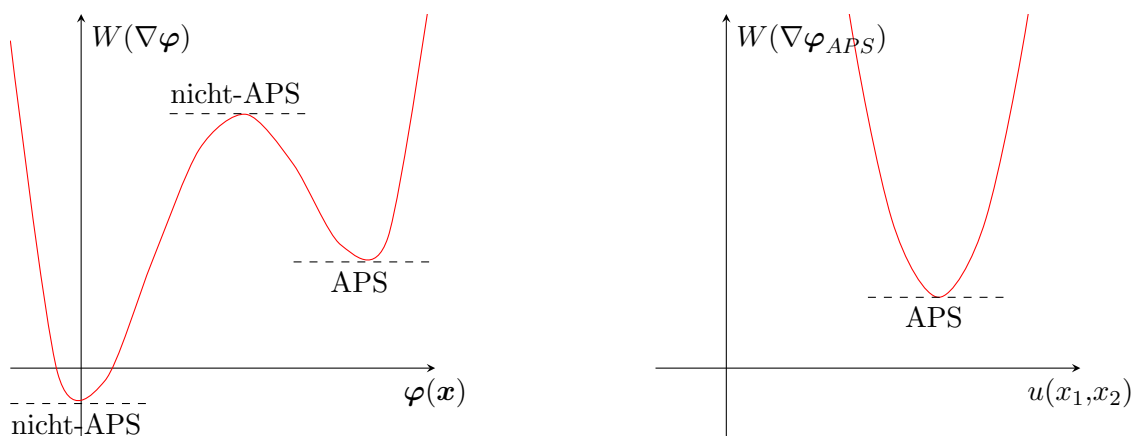


Abbildung 13: Links möglicher globaler Fall, rechts möglicher APS-Fall.

- Energie $W(F)$ ist APS-zulässig, aber nicht APS-konvex:
 Stationäre Funktionen im APS-Fall (Rückwärts-Minimierung) sind immer auch global stationär (Vorwärts-Minimierung). Es fehlt jedoch die Aussage darüber, ob überhaupt ein APS-Minimum existiert. Zusätzlich kann es auch weiterhin im globalen Fall stationäre Funktionen geben, die nicht von APS-Gestalt sind.

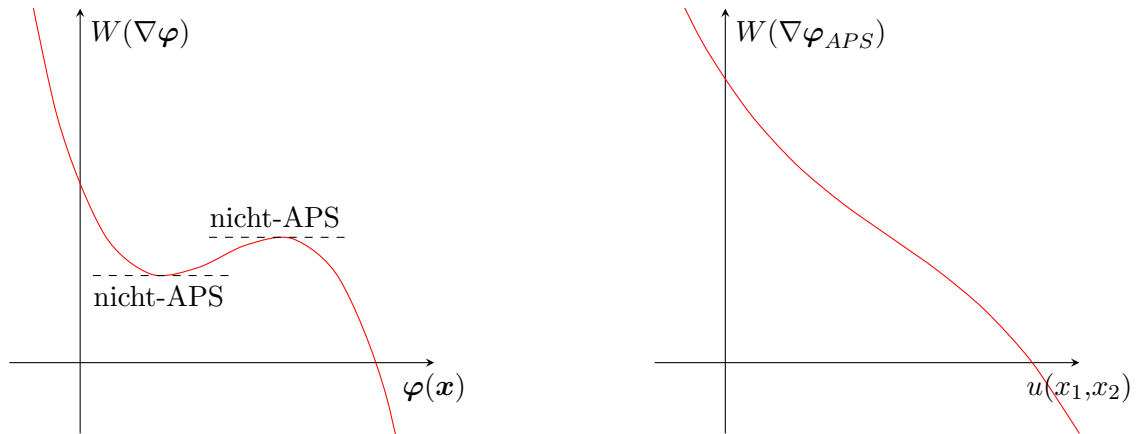


Abbildung 14: Links möglicher globaler Fall, rechts möglicher APS-Fall.

- Energie $W(F)$ ist APS-konvex, aber nicht APS-zulässig:
Es existiert ein eindeutiges APS-Minimum, das jedoch im globalen Fall nicht stationär sein muss.

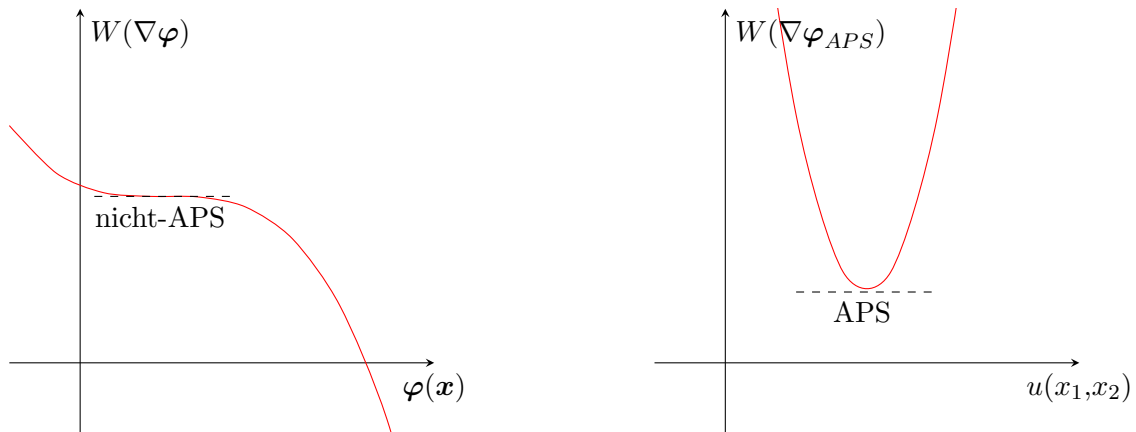
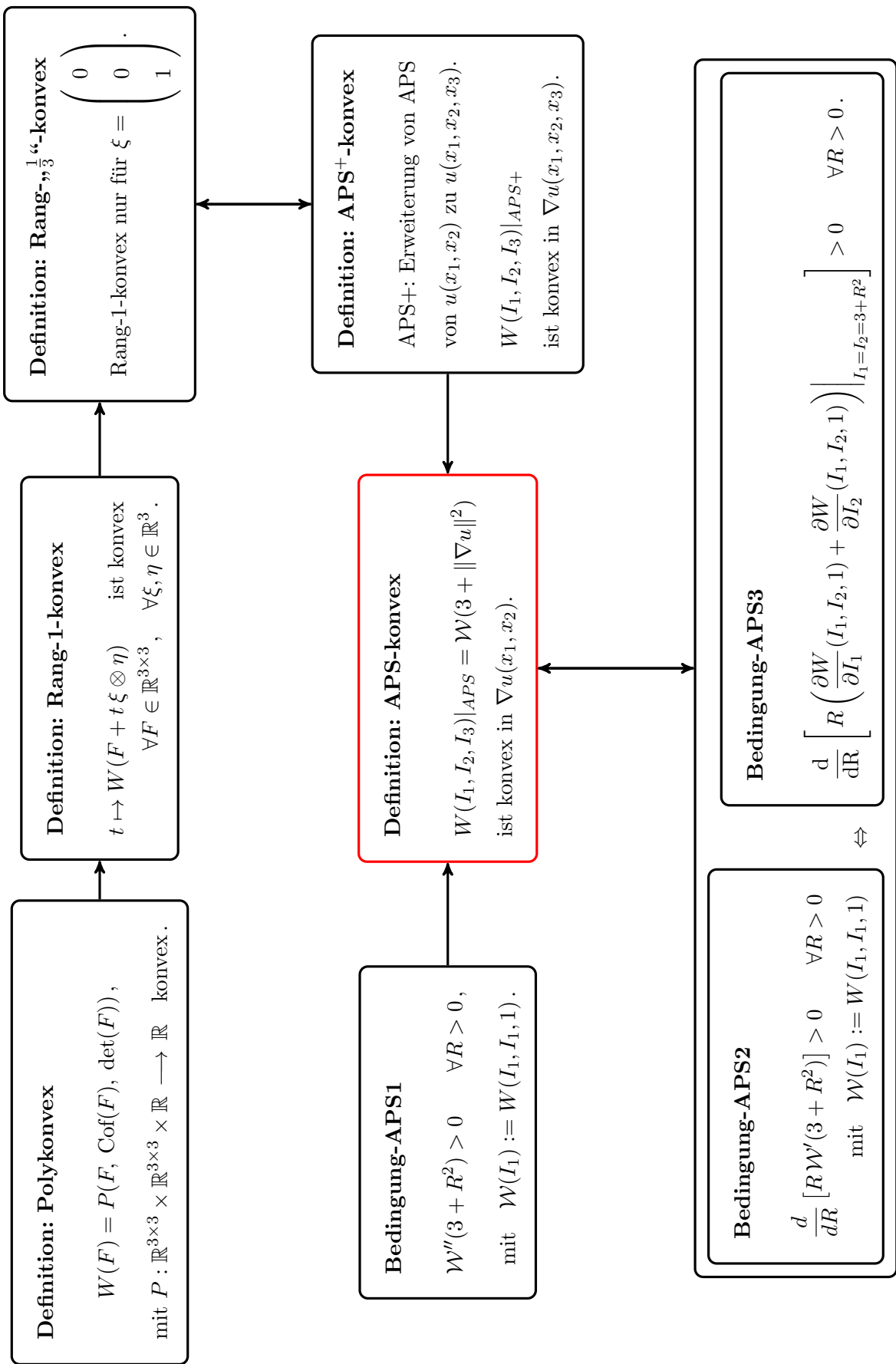


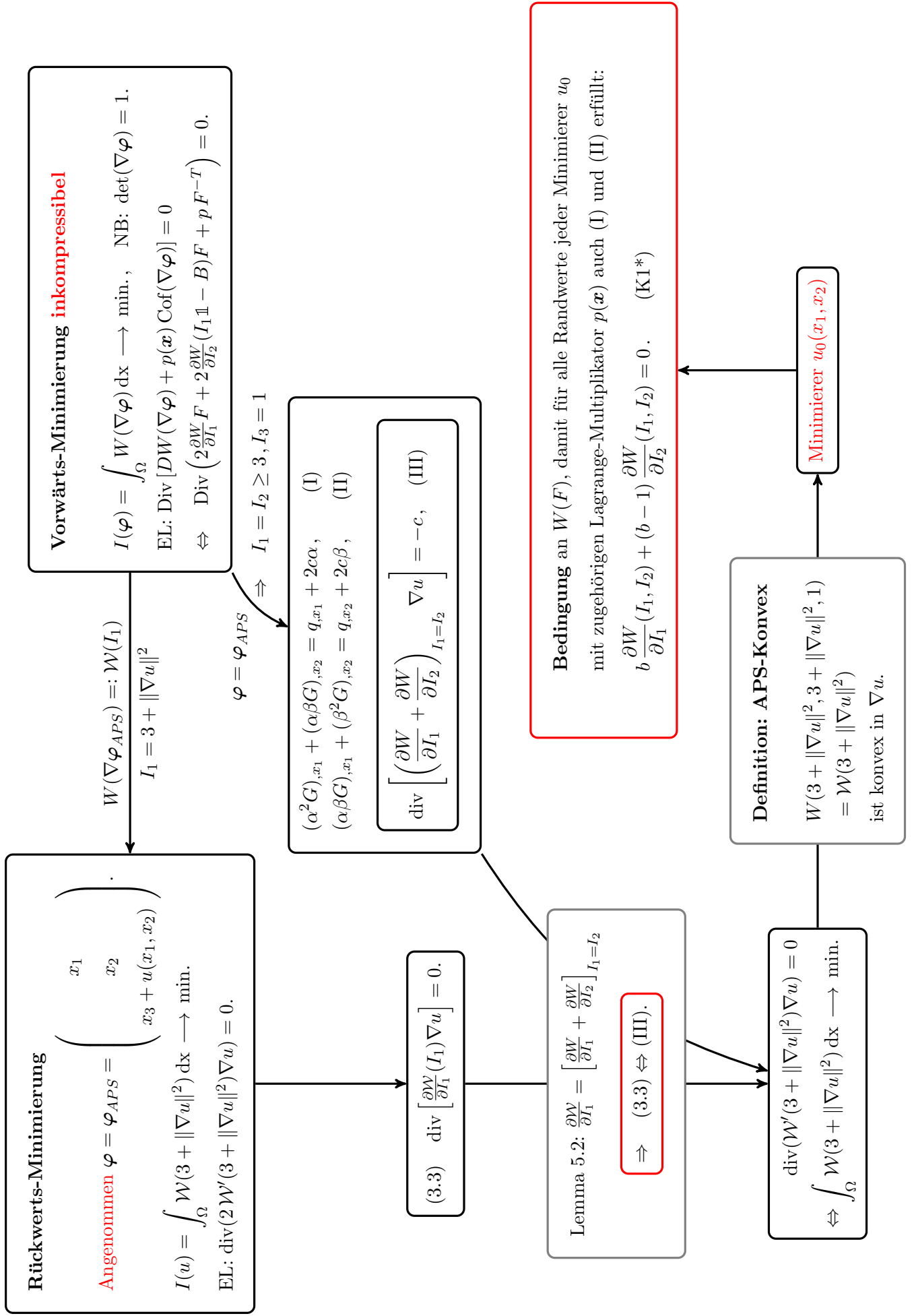
Abbildung 15: Links möglicher globaler Fall, rechts möglicher APS-Fall.

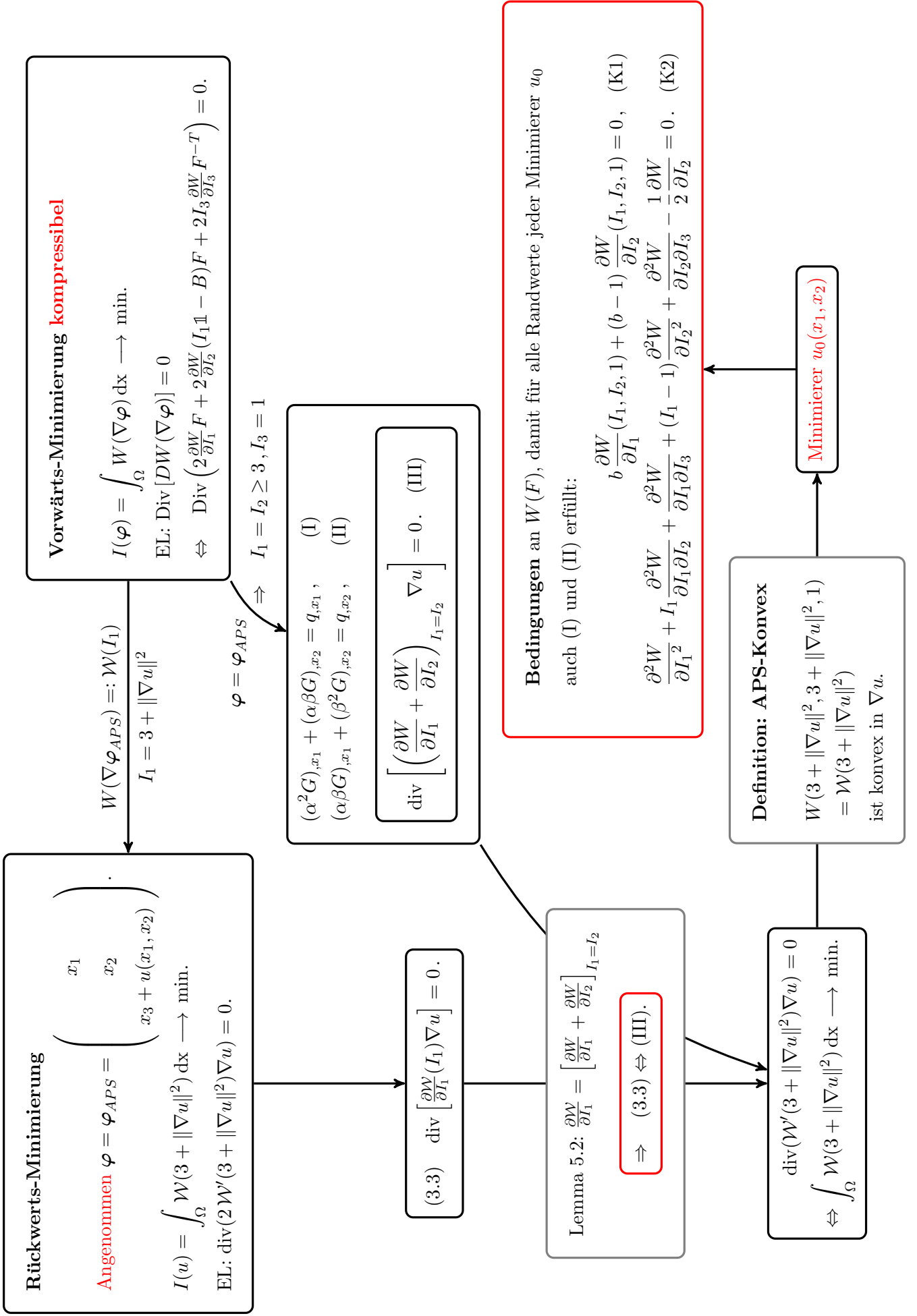
Zusätzlich wurde in dieser Arbeit noch die Frage beantwortet:

- Wie müssen Randwerte aussehen, damit sich APS einstellt, obwohl das Energiefunktional $W(F)$ nicht APS-zulässig ist?
Die Randwerte müssen zu einer Simple-Plane-Shear-Verformungen passen. Diese Untergruppe der APS-Verformungen sind Deformationen von der Bauart, dass die ersten beiden Gleichungen (I) und (II) der Euler-Lagrange-Gleichung wegfallen. Dies führt dazu, dass ein APS-Minimierer, der eine SSP-Gestalt hat, immer schon global stabil ist. Insbesondere muss $W(F)$ dafür nicht die Bedingungen (K1) und (K2) erfüllen.

Auf den nachfolgenden Seiten sind Abbildungen zu sehen, die den Bezug der APS-Konvexität und den beiden Bedingungen (K1) und (K2) zur Fragestellung der Arbeit und allgemeinen Begriffen aus der Elastizitätstheorie visualisieren sollen.







6 Direkte Methoden

Um die mathematische Bedeutung und die Anwendung der verschiedenen Konvexitätsbegriffen zu erklären, soll hier ein kurzer Exkurs zu den direkten Variationsmethoden stattfinden.

Die Berechnung eines Minimierers über die Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung, auch erste Variation genannt, so wie sie hier in dieser Arbeit mehrfach vorkommt, wird indirekte Methode genannt. Der Begriff leitet sich daraus ab, dass die Existenz eines Minimierers nicht direkt gesehen werden kann. Die Euler-Lagrange-Gleichungen liefern bestenfalls stationäre Punkte, oder mitunter auch gar keine Punkte und können die Frage nach der Existenz eines Minimierers nur indirekt beantworten, indem nachher die Beschaffenheit der stationären Punkte weiter untersucht werden kann.

Bei den direkten Methoden wird versucht, die Existenz eines Minimierers direkt zu zeigen, ohne diesen konkret berechnen zu können. Ist die Existenz und mitunter auch die Eindeutigkeit aus den direkten Methoden gezeigt, so kann mit der Euler-Lagrange-Gleichung sicher der gesuchte Minimierer berechnet werden. Die allgemeine variationelle Fragestellung lautet

$$I(u) = \int_{\Omega} F(u) \, dx \longrightarrow \min . \quad (6.1)$$

Dieser Exkurs soll allgemein erstmal nichts mit APS-Verformungen zu tun haben, folglich ist u nicht die bekannte Verschiebung aus der APS-Verformung, sondern einfach ein Element aus einem vorgegebenen Funktionenraum X . Für den Existenzbereich müssen mehrere wichtige mathematische Begriffe eingeführt werden.

Definition 6.1. Als **Sobolevraum** $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ versteht man¹⁹

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \exists v \in L^p(\Omega) : \int_{\Omega} v \varphi = - \int_{\Omega} u D\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega) \right\} . \quad (6.2)$$

Dabei bezeichnet man $v \in L^p(\Omega)$ als **schwache Ableitung** von u .

Definition 6.2. Als **schwache Konvergenz** einer Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit Grenzwert $\bar{u} \in X$, versteht man

$$u_n \rightharpoonup \bar{u} \quad \Leftrightarrow \quad \forall f \in X' : \quad f(u_n) \longrightarrow f(\bar{u}) . \quad (6.3)$$

Dabei lässt sich der Dualraum von $W^{1,p}(\Omega)$ mit $W^{1,q}(\Omega)$ bei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ identifizieren und es gilt in $W^{1,p}(\Omega)$

$$u_n \rightharpoonup \bar{u} \quad \Leftrightarrow \quad \forall f \in W^{1,q}(\Omega) : \quad \langle f, u_n \rangle \longrightarrow \langle f, \bar{u} \rangle . \quad (6.4)$$

Definition 6.3. Ein Raum X heißt **folgenkompakt**, falls jede beschränkte Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine schwach konvergente Teilfolge $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $\bar{u} \in X$ besitzt.

Für diese Arbeit sei die Folgenkompaktheit vorausgesetzt.

Definition 6.4. Ein Funktional $F: X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **unterhalbstetig**, falls

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X, \bar{u} \in X : \quad u_n \longrightarrow \bar{u} \quad \Rightarrow \quad F(\bar{u}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n) . \quad (6.5)$$

Ein Funktional $F: X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **schwach unterhalbstetig**, falls

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X, \bar{u} \in X : \quad u_n \rightharpoonup \bar{u} \quad \Rightarrow \quad F(\bar{u}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n) . \quad (6.6)$$

Dabei folgt aus schwacher Unterhalbstetigkeit auch immer die (starke) Unterhalbstetigkeit, während die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt.

Falls das Funktional $F: V \subset W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ aber konvex ist, gilt

$$F \text{ ist unterhalbstetig} \quad \Leftrightarrow \quad F \text{ ist schwach unterhalbstetig} . \quad (6.7)$$

¹⁹Mit $L^p(\Omega)$ ist der klassische Lebesgue-Raum auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gemeint.

Definition 6.5. Ein Funktional $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **koerziv**, falls

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X \quad \text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_X = \infty \quad \text{gilt} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = \infty. \quad (6.8)$$

Häufig wird auch eine Abschätzung der Art

$$\forall u \in X : \quad F(u) \geq c_1 \|u\|_X^2 - c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \quad (6.9)$$

gefordert.

Der Existenzbeweis für einen globalen Minimierer $\tilde{u} \in X$ folgt unabhängig von der Form von F und Ω immer nach demselben Schema und kann im Detail im Vorlesungsskript Neff [14, eq. (7.7)] nachgelesen werden.

- Als erstes muss eine untere Schranke $\inf_{u \in X} I(u) =: \alpha < \infty$ gefunden werden.
- Dazu soll ein beliebiges $u \in X$ mit $I(u) = k < \infty$ ausgewählt werden.
- Aus der Koerzivität kann in der beschränkten Teilmenge $V \subset X$ minimiert werden.

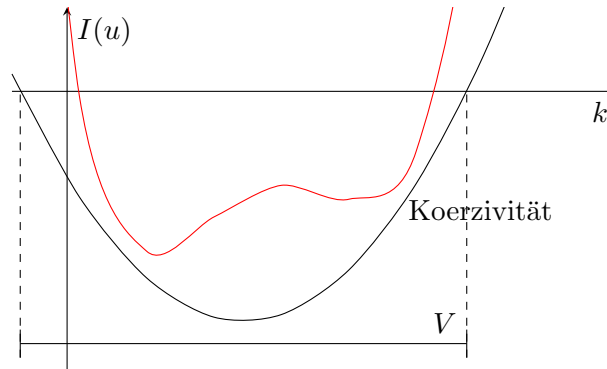


Abbildung 16: Einschränkung des Minimums auf $V \subset X$ durch Koerzivität und oberer Schranke.

Aufgrund der Koerzivität von F ist also $I(u)$ nach unten beschränkt und es existiert ein Infimum α . Bilde dazu eine Minimalfolge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$I(u_n) \rightarrow \inf_{u \in V} I(u) =: \alpha.$$

- Es wird die schwache Folgenkompaktheit von $V \subset X$ verwendet, um eine Teilfolge

$$(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset V, \hat{u} \in V : \quad u_{n_k} \rightharpoonup \hat{u}$$

zu erhalten.

- Die Konvexität und Unterhalbstetigkeit von F liefert die schwache Unterhalbstetigkeit von I in X . Damit gilt

$$I(\hat{u}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I(u_{n_k}).$$

- Damit kann die Existenz eines globalen Minimierers aus folgender Ungleichungskette gezeigt werden

$$-\infty < \alpha \leq I(\hat{u}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I(u_{n_k}) = \inf_{u \in V} I(u) = \alpha \quad (6.10)$$

und $\hat{u} \in V$ ist der gesuchte Minimierer mit $I(\hat{u}) = \alpha$.

- Zusätzlich kann im Falle von strikter Konvexität auch direkt die Eindeutigkeit des Minimierers gezeigt werden.

Beweis. Angenommen es existieren zwei unterschiedliche Minimierer

$$\bar{u} \neq \tilde{u} \in X : \quad I(\bar{u}) = I(\tilde{u}) = \alpha .$$

Wähle $u := t\bar{u} + (1-t)\tilde{u} \in X$ mit $t \in [0, 1]$. Es gilt nun aus der strikten von Konvexität von $I(u)$

$$I(u) = I(t\bar{u} + (1-t)\tilde{u}) < tI(\bar{u}) + (1-t)I(\tilde{u}) = t\alpha + (1-t)\alpha = \alpha . \quad (6.11)$$

Damit ist mit $I(u) < \alpha$ ein Widerspruch zur Annahme, dass $\bar{u} \neq \tilde{u} \in X$ zwei unterschiedliche Minima von I in X sind. ■

In der nichtlinearen Elastizitätstheorie wird an einfachen physikalischen Beispielen gezeigt, warum Konvexität von $W(F)$ mit ihrer daraus folgenden Eindeutigkeit eines Minimierers eine nicht erfüllbare Forderung ist.

Als Beispiel soll sich ein Gummizylinder mit vorgegebenen festgehaltenen Anfangs- und Endseiten vorgestellt werden. Nun kann der Zylinder an der Endseite um einen beliebigen Winkel $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ verdreht werden, ohne die Randbedingung an seiner Endseite zu verletzen²⁰. Jede solche Drehung ist eine stabile Verformung und somit hat der Gummizylinder unendlich viele Lösungen. Deswegen muss die Forderung nach Konvexität mit der resultierenden Eindeutigkeit des Minimierers fallen gelassen werden.

Aus diesem Grund müssen die direkten Methoden in der Variationsrechnung soweit angepasst werden, dass ein Ersatz für die fehlende Konvexität gefunden werden muss. Zu diesem Zweck wurde die **Polykonvexität** (S. 19) eingeführt. Dabei besagt die Polykonvexität lediglich, dass $P(\xi) = W(F, \text{Cof}(F), \det(F))$ konvex in $\xi \in \mathbb{R}^{19}$ ist. Damit kann der Existenzbeweis direkt über $P(\xi)$ geführt werden. Dafür muss folgende Eigenschaft

$$F_n \rightharpoonup F \quad \Rightarrow \quad \xi_n \rightharpoonup \xi$$

überprüft werden muss. Zu ist also zu zeigen, dass

$$\nabla \varphi_n \rightharpoonup \nabla \varphi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{Cof}(\nabla \varphi_n) \rightharpoonup \text{Cof}(\nabla \varphi) \\ \det(\nabla \varphi_n) \rightharpoonup \det(\nabla \varphi) \end{cases}$$

erfüllt ist. Für allgemeine Abbildungen gilt die Implikation

$$x_n \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \rightharpoonup f(x)$$

nicht. Jedoch sorgt Divergenzstruktur der Determinante und dadurch auch des Kofaktors zu der gewünschten Eigenschaft. Es soll hier einmal exemplarisch im zweidimensionalen Fall gezeigt

²⁰Das Drehen als kontinuierliche Bewegung verletzt natürlich die Randbedingung, die resultierende Verformung nach der Drehung aber nicht.

werden. Die Divergenzstruktur lautet hier

$$\begin{aligned}
\det(\nabla\varphi_n) &= \begin{vmatrix} (\varphi_n)_{1,x_1} & (\varphi_n)_{1,x_2} \\ (\varphi_n)_{2,x_1} & (\varphi_n)_{2,x_2} \end{vmatrix} \\
&= (\varphi_n)_{1,x_1}(\varphi_n)_{2,x_2} - (\varphi_n)_{1,x_2}(\varphi_n)_{2,x_1} \\
&= (\varphi_n)_{1,x_1}(\varphi_n)_{2,x_2} + (\varphi_n)_1(\varphi_n)_{2,x_2x_1} - (\varphi_n)_1(\varphi_n)_{2,x_2x_1} - (\varphi_n)_{1,x_2}(\varphi_n)_{2,x_1} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} [(\varphi_n)_1(\varphi_n)_{2,x_2}] - \frac{\partial}{\partial x_2} [(\varphi_n)_1(\varphi_n)_{2,x_1}] \\
&= \operatorname{div} \begin{pmatrix} (\varphi_n)_1(\varphi_n)_{2,x_2} \\ (\varphi_n)_1(\varphi_n)_{2,x_1} \end{pmatrix} \\
&=: \operatorname{div}(\mathbf{v}_n).
\end{aligned}$$

Damit kann nun

$$\begin{aligned}
F_n \rightharpoonup F &\Rightarrow \det(F_n) \rightharpoonup \det(F) \\
&\Leftrightarrow \langle \det(\nabla\varphi_n), \vartheta \rangle \longrightarrow \langle \det(\nabla\varphi), \vartheta \rangle, \quad \forall \vartheta \in C_c^\infty(\Omega)
\end{aligned}$$

gezeigt werden. Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle \det(\nabla\varphi_n), \vartheta \rangle &= \int_{\Omega} \det(\nabla\varphi_n) \vartheta \, dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_n) \vartheta \, dx_1 dx_2 \\
&\stackrel{P.I.}{=} - \int_{\Omega} \mathbf{v}_n \cdot \nabla \vartheta \, dx_1 dx_2 = \langle \mathbf{v}_n, \nabla \vartheta \rangle, \\
\langle \det(\nabla\varphi), \vartheta \rangle &= \int_{\Omega} \det(\nabla\varphi) \vartheta \, dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}) \vartheta \, dx_1 dx_2 \\
&\stackrel{P.I.}{=} - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \vartheta \, dx_1 dx_2 = \langle \mathbf{v}, \nabla \vartheta \rangle.
\end{aligned}$$

Es kann nun die schwache Konvergenz von $\nabla\varphi_n$ verwendet werden, um mit

$$v_n \rightharpoonup v \Leftrightarrow \langle v, \nabla \vartheta \rangle \longrightarrow \langle v, \nabla \vartheta \rangle$$

die schwache Konvergenz von $\det(\nabla\varphi_n)$ zu zeigen. Analog zu dieser Rechnung kann auch im dreidimensionalen Fall der Existenzsatz aus der Polykonvexität geführt werden. Dabei ist die Polykonvexität eine schwächere Forderung als die physikalisch unhaltbare Forderung der Konvexität.

Mithilfe dieser Vorüberlegungen kann nun die Bedeutung von der APS-Konvexität und APS-Zulässigkeit im Hinblick auf die Existenztheorie verstanden werden. Betrachten wir dazu ein Energiefunktional $W(F)$ welches APS-konvex ist und auch die Bedingungen (K1) und bei der kompressiblen Betrachtung zusätzlich auch noch (K2) erfüllt, jedoch nicht polykonvex ist. Zusätzlich seien APS-Randwerte vorgegeben.

Mit der bisherigen Theorie kann aufgrund fehlender Polykonvexität kein Existenzbeweis geführt werden. Durch die APS-Konvexität haben wir die Existenz einer Lösung auf der Klasse der APS-Verformungen und mit der APS-Zulässigkeit ist die Lösung auch ein Minimierer des globalen Falls und somit die Existenz eines Minimierers gezeigt.

Satz 6.6. *Ein APS-konvexes und -zulässiges koerzives Energiefunktional $W(F)$ hat für alle möglichen APS-Randwerte ein eindeutiges Minimum.*

Beweis. Wir definieren

$$I(u) := \int_{\Gamma} W(F|_{APS}(u)) \, dx. \quad (6.12)$$

Durch die APS-Zulässigkeit von $W(F)$ folgt die Existenz eines globalen Minimums aus der Existenz eines APS-Minimums von $I(u)$. Zusätzlich folgt aus der APS-Konvexität von $W(F)$ direkt die Konvexität von $I(u)$. Deswegen sind alle Voraussetzungen für den vorher allgemein aufgeführten Existenzbeweis erfüllt und die Existenz eines Minimierers $\hat{u}(x_1, x_2)$ gegeben. Der zugehöriger APS-Minimierer $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \hat{u}(x_1, x_2)\mathbf{e}_3$ ist das gesuchte globale Minimierer der Minimierungsaufgabe. ■

Dieser Existenzbeweis funktioniert nur bei APS-Randwerten und ist deswegen nicht allgemein für andere Probleme der Elastizitätstheorie brauchbar.

7 Beispiele

In diesem Abschnitt wollen wir konkrete Energiefunktionale genauer auf die Bedingungen

$$\exists b \in \mathbb{R} : \quad b \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2, I_3) + (b-1) \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2, I_3) = 0, \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3, I_3 = 1, \quad (\text{K1})$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} + I_1 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_3} + (I_1 - 1) \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_2} = 0, \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3, I_3 = 1 \quad (\text{K2})$$

und der APS-Konvexität untersuchen, um diese besser zu verstehen und neue Zusammenhänge zu anderen Begriffen aus der Elastizitätstheorie aufzuzeigen.

7.1 Mooney-Rivlin-Energie

Die inkompressible Mooney-Rivlin-Energie ist definiert als

$$W(F) = \frac{\mu}{2} (\alpha(I_1 - 3) + (1 - \alpha)(I_2 - 3)), \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (7.1)$$

mit zwei vorgegeben positiven Materialkonstanten μ und α . Hierbei ist $\mu > 0$ der infinitesimale Schermodulus.

Durch (3.8) lässt sich

$$W(F)|_{APS} = \frac{\mu}{2} (\alpha(3 + \gamma^2 - 3) + (1 - \alpha)(3 + \gamma^2 - 3)) = \frac{\mu}{2} \gamma^2$$

bilden. Die Mooney-Rivlin-Energie $W(F)|_{APS} = \frac{\mu}{2} \|\nabla u\|^2$ ist konvex in ∇u und damit APS-konvex. Als nächstes soll die Bedingung (K1) überprüft werden

$$\begin{aligned} & b \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2, 1) + (b-1) \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2, 1) = 0 \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3 \\ \Leftrightarrow & \quad b \frac{\mu\alpha}{2} + (b-1) \frac{\mu(1-\alpha)}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad b\alpha + (b-1)(1-\alpha) = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad b = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Durch die Wahl von $b = 1 - \alpha$ ist die Bedingung (K1) erfüllt. Also lässt die Mooney-Energie unter der Nebenbedingung der Inkompressibilität APS-Verformungen zu.

Die Mooney-Rivlin-Energie kann, so wie sie bis jetzt behandelt wurde, nur für die Beschreibung von inkompressiblen Materialien verwendet werden. Um Volumenänderungen bewerten zu können, soll noch ein Term $h(I_3)$ hinzugefügt werden. Zusätzlich werden die vorherigen Terme durch die Einführung von

$$\bar{I}_1 = \frac{I_1}{I_3^{\frac{1}{3}}}, \quad \bar{I}_2 = \frac{I_2}{I_3^{\frac{2}{3}}} \quad (7.2)$$

von der Volumenänderung getrennt. Eine mögliche kompressible Erweiterung lautet also

$$W(F) = \frac{\mu}{2} \left(\alpha(I_1 I_3^{-\frac{1}{3}} - 3) + (1 - \alpha)(I_2 I_3^{-\frac{2}{3}} - 3) \right) + h(I_3), \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (7.3)$$

Die Bedingung (K2) für die kompressible Mooney-Rivlin-Energie lautet

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} + I_1 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_3} + (I_1 - 1) \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_2} = 0 \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3, I_3 = 1 \\
\Leftrightarrow & \quad -\frac{\mu\alpha}{6} I_3^{-\frac{4}{3}} - \frac{2\mu(1-\alpha)}{6} I_3^{-\frac{5}{3}} - \frac{\mu(1-\alpha)}{4} I_3^{-\frac{2}{3}} = 0 \quad \forall I_3 = 1 \\
\Leftrightarrow & \quad -2\alpha - 4(1-\alpha) - 3(1-\alpha) = 0 \\
\Leftrightarrow & \quad 5\alpha = 7.
\end{aligned}$$

$\alpha = \frac{7}{5} > 1$ widerspricht der Definition von α mit $0 < \alpha \leq 1$. Daher ist die Mooney-Rivlin-Energie im kompressiblen Fall nicht APS-zulässig.

7.2 Neo-Hooke-Energie

Die inkompressible Neo-Hooke-Energie ist als

$$W(F) = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) \quad (7.4)$$

bekannt und kann direkt aus der Mooney-Rivlin-Energie durch $\alpha = 1$ erhalten werden. Auch die kompressible Erweiterung

$$W(F) = \frac{\mu}{2}(I_1 I_3^{-\frac{1}{3}} - 3) + h(I_3) \quad (7.5)$$

kann durch $\alpha = 1$ aus der Mooney-Rivlin-Energie abgeleitet werden. Deswegen können wir direkt schließen, dass die Neo-Hooke-Energie APS-konvex ist und Bedingung (K1) aber nicht die Bedingung (K2) erfüllt.

Betrachten wir nun den verallgemeinerten Energietyp

$$W(F) = \widehat{W} \left(I_1 I_3^{-\frac{1}{3}} - 3 \right) + h(I_3) \quad (7.6)$$

mit einer konvexen skalaren Funktion $\widehat{W}(x)$ mit globalem Minimum im Ursprung. Da im APS-Fall

$$\frac{I_1}{I_3^{-\frac{1}{3}}} - 3 = \frac{3 + \gamma^2}{1} - 3 = \gamma^2 \quad (7.7)$$

gilt, ist die Energie demnach APS-konvex. Wir wollen die Energie in (K1) und (K2) einsetzen

$$\begin{aligned}
& b \widehat{W}'(I_1 I_3^{-\frac{1}{3}} - 3) I_3^{-\frac{1}{3}} = 0 \quad \forall I_1 \geq 3, I_3 = 1 \quad (\text{K1}) \\
\Leftrightarrow & \quad b \widehat{W}'(x) = 0 \quad \forall x \geq 0,
\end{aligned}$$

$$\widehat{W}''(x) I_3^{-\frac{2}{3}} + \widehat{W}''(x) I_1 \left(-\frac{1}{3} I_3^{-\frac{4}{3}} \right) I_3^{-\frac{1}{3}} + \widehat{W}'(x) \left(-\frac{1}{3} I_3^{-\frac{4}{3}} \right) = 0 \quad \forall x \geq 0, I_3 = 1 \quad (\text{K2})$$

$$\Leftrightarrow \widehat{W}''(x) - \frac{1}{3}(x+3)\widehat{W}''(x) - \frac{1}{3}\widehat{W}'(x) = 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \widehat{W}''(x) + \widehat{W}'(x) = 0 \quad \forall x \geq 0.$$

(K1) kann durch $b = 0$ für jedes $\widehat{W}(I_1)$ erfüllt werden, aber (K2) wird nur von Energien \widehat{W}

erfüllt werden, welche obige Differentialgleichung erfüllen. Die Trennung der Variablen liefert

$$\begin{aligned}
& \frac{\widehat{W}''(x)}{\widehat{W}'(x)} = -\frac{1}{x} \\
\Leftrightarrow & \int \frac{1}{\widehat{W}'(x)} d\widehat{W}' = -\int \frac{1}{x} dx \\
\Leftrightarrow & \ln(\widehat{W}'(x)) = -\ln(x) + c \\
\Leftrightarrow & \widehat{W}'(x) = \frac{c_1}{x} \\
\Rightarrow & \widehat{W}(x) = c_1 \log(x) + c_2.
\end{aligned}$$

Ein Energiefunktional vom Typ

$$W(F) = c_1 \log \left(I_1 I_3^{-\frac{1}{3}} - 3 \right) + h(I_3) \quad (7.8)$$

ist APS-zulässig, jedoch aufgrund des Logarithmus nicht APS-konvex. Das Energiefunktional ist nicht physikalisch sinnvoll, da es bei $F = \mathbf{1}$ eine Singularität hat.

7.3 Blatz-Ko-Energie

Die spezielle Blatz-Ko-Energie aus Horgan [8, eq. (2.3)] mit den Konstanten $f = 1$ und $\nu = \frac{1}{4}$ lautet

$$W(F) = \frac{\mu}{2} \left(I_1 + \frac{2}{\sqrt{I_3}} - 5 \right) \quad (7.9)$$

und ist eine zweite Möglichkeit, die Neo-Hooke-Energie für den kompressiblen Fall zu erweitern, da sich die Blatz-Ko-Energie für inkompressible Verformungen zur inkompressiblen Neo-Hooke-Energie vereinfacht. Durch (3.8) lässt sich

$$W(F)|_{APS} = \frac{\mu}{2} \left(3 + \gamma^2 + \frac{2}{\sqrt{1}} - 5 \right) = \frac{\mu}{2} \gamma^2 \quad (7.10)$$

bilden. Offensichtlich ist auch die Blatz-Ko-Energie APS-Konvex. Die Bedingung (K1) erfüllt sie aufgrund der Unabhängigkeit von I_2

$$\begin{aligned}
& b \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2, I_3) + (b-1) \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2, I_3) = 0 \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3, I_3 = 1 \\
\Leftrightarrow & b \frac{\mu}{2} + (b-1) \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

durch $b = 0$ in trivialer Weise. Auch die letzte Bedingung von Knowles

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} + I_1 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_3} + (I_1 - 1) \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_2} = 0 \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3, I_3 = 1 \\
\Leftrightarrow & 0 = 0
\end{aligned}$$

wird, da $\frac{\partial W}{\partial I_1} = \text{const.}$ ist in trivialer Weise erfüllt. Damit ist die Blatz-Ko-Energie eine Energie die APS-Verformungen sowohl für den inkompressiblen Fall wie auch den kompressiblen Fall zulässt. Diese Energie wurde schon von Knowles [10] als einziges Beispiel für eine Energie, welche im kompressiblen Fall APS-zulässig ist, genannt.

7.4 Mihai-Neff-Energie

Als weiteres Beispiel betrachten wir ein Energiefunktional aus Mihai und Neff [12, eq. (4.13)], dass nicht Rang-1-konvex ist

$$W(F) = \frac{\mu}{2} \left(I_1 I_3^{-\frac{1}{3}} - 3 \right) + \frac{\tilde{\mu}}{4} (I_1 - 3)^2 + \frac{\kappa}{2} \left(I_3^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2 \quad (7.11)$$

mit Materialkonstanten $\mu, \tilde{\mu}$ und $\kappa > 0$.

Durch (3.8) lässt sich

$$W(F)|_{APS} = \frac{\mu}{2} \left((3 + \gamma^2) \cdot 1^{-\frac{1}{3}} - 3 \right) + \frac{\tilde{\mu}}{4} (3 + \gamma^2 - 3)^2 + \frac{\kappa}{2} \left(1^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2 = \frac{\tilde{\mu}}{4} \gamma^4 + \frac{\mu}{2} \gamma^2 \quad (7.12)$$

bestimmen. Die Funktion ist konvex und monoton in γ^2 mit globalem Minimum bei $\gamma = 0$. Durch die Verkettung von $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ ist die Funktion konvex in α, β und somit ist auch dieses Energiefunktional APS-konvex.

Um die beiden anderen Bedingung von Knowles überprüfen zu können, bilden wir

$$\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_3) = \frac{\mu}{2} I_3^{-\frac{1}{3}} + \frac{\tilde{\mu}}{2} (I_1 - 3).$$

Die Bedingung (K1) erfüllt die Mihai-Neff-Energie wieder aufgrund der Unabhängigkeit von I_2

$$\begin{aligned} b \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2, I_3) + (b-1) \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2, I_3) &= 0 \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3, I_3 = 1 \\ \Leftrightarrow b \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_3) + (b-1) \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

durch $b = 0$ in trivialer Weise. Also lässt die Energie unter der Nebenbedingung der Inkompressibilität APS-Verformungen zu. Die letzte Bedingung (K2) lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} + I_1 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_3} + (I_1 - 1) \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_2} &= 0 \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3, I_3 = 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\tilde{\mu}}{2} + 0 - \frac{\mu}{6} I_3^{-\frac{4}{3}} + 0 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3 \tilde{\mu} = \mu. \end{aligned}$$

Ein Material, dass diese Beziehung erfüllt, würde also sogar APS-Verformungen für den allgemeinen kompressiblen Fall zulassen. Da aber über die Materialkonstanten nichts bekannt ist, stellen sich in der Regel keine APS-Verformungen ein.

7.5 Knowles-Energie

Eine weiteres von Knowles aufgestelltes Energiefunktional, ähnlich zu vorherigem Beispiel ist

$$W(F) = \frac{\mu}{2k} \left(\left[1 + \frac{k}{n} \left(I_1 I_3^{-\frac{1}{3}} - 3 \right) \right]^n - 1 \right) + \frac{1}{D_1} \left(I_3^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2 \quad (7.13)$$

mit positiven Materialkonstanten μ, k, D_1 und einem Exponenten $n \in \mathbb{N}$. Für den Fall $n = 1$ und $I_3 = 1$ vereinfacht sich der vordere Summand des Funktional zu $\frac{\mu}{2}(I_1 - 3)$ und ist daher von Neo-Hooke Gestalt. Statt wieder APS-Funktionen einzusetzen, wollen wir APS-Konvexität

diesmal über Bedingung (APS3) zeigen

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dR} \left[R \left(\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2, 1) + \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2, 1) \right) \Big|_{I_1=I_2=3+R^2} \right] > 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{d}{dR} \left[R \left(\frac{\mu}{2k} n \left[1 + \frac{k}{n} \left(I_1^{-\frac{1}{3}} - 3 \right) \right]^{n-1} \frac{k}{n} I_1^{-\frac{1}{3}} + 0 \right) \Big|_{I_1=I_2=3+R^2} \right] > 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{d}{dR} \left[R \left(\frac{\mu}{k} \left[1 + \frac{k}{n} R^2 \right]^{n-1} \right) \right] > 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{\mu}{k} \left[1 + \frac{k}{n} R^2 \right]^{n-1} + R \frac{\mu}{k} (n-1) \left[1 + \frac{k}{n} R^2 \right]^{n-2} \frac{2k}{n} R > 0 \\
\Leftrightarrow & \left[1 + \frac{k}{n} R^2 \right]^{n-1} + \frac{2k(n-1)}{n} \left[1 + \frac{k}{n} R^2 \right]^{n-2} R^2 > 0.
\end{aligned}$$

Da alle Terme positiv sind, ist das gesamte Energiefunktional APS-Konvex.

Die Bedingung (K1) ist wieder durch die Unabhängigkeit von I_2 trivialerweise mit $b = 0$ erfüllt.

Bleibt noch die Bedingung (K2) zu überprüfen. Dafür können wir verwenden, dass wir

$$g(I_1, I_3) := \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2, I_3) = \frac{\mu}{2} \left[1 + \frac{k}{n} \left(I_1 I_3^{-\frac{1}{3}} - 3 \right) \right]^{n-1} I_3^{-\frac{1}{3}}$$

schon berechnet haben. Wir kürzen den Teil in der eckigen Klammer mit ξ ab. Für (K2) werden

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial I_1} &= \frac{\mu}{2} (n-1) \xi^{n-2} \frac{k}{n} I_3^{-\frac{1}{3}} I_3^{-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{\mu}{2} \frac{k(n-1)}{n} \xi^{n-2} I_3^{-\frac{2}{3}}, \\
\frac{\partial g}{\partial I_3} &= \frac{\mu}{2} (n-1) \xi^{n-2} \frac{k}{n} I_1 \left(-\frac{1}{3} \right) I_3^{-\frac{4}{3}} I_3^{-\frac{1}{3}} + \frac{\mu}{2} \xi^{n-1} \left(-\frac{1}{3} \right) I_3^{-\frac{4}{3}} \\
&= \frac{\mu}{2} \left(\frac{k(n-1)}{n} \xi^{n-2} I_3^{-\frac{4}{3}} \left(-\frac{I_1}{3} \right) - \frac{1}{3} \xi^{n-1} I_3^{-\frac{4}{3}} \right)
\end{aligned}$$

benötigt. Bedingung (K2) lautet

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} + I_1 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_3} + (I_1 - 1) \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_2} = 0 \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3, I_3 = 1 \\
\Leftrightarrow & \frac{\partial g}{\partial I_1} + \frac{\partial g}{\partial I_3} = 0 \quad \forall I_1 \geq 3, I_3 = 1 \\
\Leftrightarrow & \frac{\mu}{2} \left(\frac{k(n-1)}{n} \xi^{n-2} - \frac{I_1 k(n-1)}{3n} \xi^{n-2} - \frac{1}{3} \xi^{n-1} \right) = 0 \\
\Leftrightarrow & \xi^{n-2} \left(\frac{k}{n} \frac{n-1}{3} (3 - I_1) - \frac{1}{3} \xi \right) = 0 \\
\Leftrightarrow & \left[1 + \frac{k}{n} (I_1 - 3) \right]^{n-2} \left[1 + \frac{k}{n} \left(1 - \frac{n-1}{3} \right) (I_1 - 3) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Die Gleichung führt schon für $I_1 = 3$ mit $1 = 0$ zu einem Widerspruch.

Insgesamt ist die Knowles-Energie für den inkompressiblen Fall, nicht jedoch für den kompressiblen Fall, APS-zulässig.

7.6 Bazant-Energie

Wir betrachten die nicht Rang-1-konvexe Funktion

$$W(F) = \|B - B^{-1}\|^2. \quad (7.14)$$

Um wieder die Konvexität auf APS-Funktionen überprüfen zu können, muss B^{-1} aus (3.4) berechnet werden:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha^2 & \alpha\beta & -\alpha \\ \alpha\beta & 1 + \beta^2 & -\beta \\ -\alpha & -\beta & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.15)$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} W(F)|_{APS} &= \left\| \begin{pmatrix} -\alpha^2 & -\alpha\beta & 2\alpha \\ -\alpha\beta & -\beta^2 & 2\beta \\ 2\alpha & 2\beta & (\alpha^2 + \beta^2)^2 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= 2(\alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 + 4\alpha^2 + 4\beta^2) \\ &= 2(\gamma^4 + 4\gamma^2). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Die Funktion ist konvex und monoton in $\gamma^2 > 0$ mit globalem Minimum bei $\gamma = 0$. Durch die Verkettung von $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ ist die Funktion konvex in α, β und somit auch dieses Energiefunktional APS-konvex. Um (K1) und (K2) testen zu können, müssen wir eine Schreibweise in den Invarianten finden. Dafür zerlegen wir die Energie in

$$\begin{aligned} \|B - B^{-1}\|^2 &= \langle B - B^{-1}, B - B^{-1} \rangle \\ &= \|B\|^2 - \langle B^{-1}, B \rangle - \langle B, B^{-1} \rangle + \|B^{-1}\|^2 \\ &= \|B\|^2 - \langle B^{-1}B^T, \mathbb{1} \rangle - \langle \mathbb{1}, B^TB^{-1} \rangle + \text{tr}(B^{-2}). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Der Term $\|B\|^2$ lässt sich direkt aus den Eigenwerte bestimmen. Wir berücksichtigen, dass B symmetrisch und somit diagonalisierbar ist

$$\|B\|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \text{tr}(B^2).$$

Man sieht, dass

$$\begin{aligned} I_1^2 - 2I_2 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_2\lambda_3 - 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) \\ &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \|B\|^2 \end{aligned} \quad (7.18)$$

gilt und somit insgesamt

$$\begin{aligned} \|B - B^{-1}\|^2 &= \|B\|^2 - \langle B^{-1}B, \mathbb{1} \rangle - \langle \mathbb{1}, BB^{-1} \rangle + \text{tr}(B^{-2}) \\ &= I_1^2 - 2I_2 - 6 + \text{tr}(B^{-2}) \end{aligned}$$

folgt. Wir verwenden das Cayley-Hamilton Theorem aus Antman, Marsden und Sirovich [1, eq. (11.1.55)]

$$B^3 - \text{tr}(B) B^2 + \text{tr}(\text{Cof}(B)) B - \det(B) \mathbb{1} = 0.$$

Durch Multiplikation mit B^{-1} entstehen die Ausdrücke

$$B^2 - \text{tr}(B) B + \text{tr}(\text{Cof}(B)) \mathbb{1} - \det(B) B^{-1} = 0, \quad (7.19)$$

$$B - \text{tr}(B) \mathbb{1} + \text{tr}(\text{Cof}(B)) B^{-1} - \det(B) B^{-2} = 0. \quad (7.20)$$

Um nach B^{-2} auflösen zu können, wird die erste Gleichung nach B^{-1} aufgelöst und in die zweite Gleichung eingesetzt

$$B - \text{tr}(B) \mathbb{1} + \frac{\text{tr}(\text{Cof}(B))}{\det(B)} [B^2 - \text{tr}(B) B + \text{tr}(\text{Cof}(B)) \mathbb{1}] = \det(B) B^{-2}.$$

Durch Einsetzen der Invarianten (2.8) erhalten wir den Ausdruck

$$B^{-2} = \frac{I_2}{I_3^2} [B^2 - I_1 B + I_2 \mathbb{1}] + \frac{1}{I_3} [B - I_1 \mathbb{1}]. \quad (7.21)$$

Daraus lässt sich nun der gesuchte Ausdruck

$$\begin{aligned} \text{tr}(B^{-2}) &= \frac{I_2}{I_3^2} \text{tr}(B^2) - \frac{I_2 I_1}{I_3^2} \text{tr}(B) + \frac{I_2^2}{I_3^2} \text{tr}(\mathbb{1}) + \frac{1}{I_3} \text{tr}(B) - \frac{I_1}{I_3} \text{tr}(\mathbb{1}) \\ &= \frac{I_2}{I_3^2} (I_1^2 - 2I_2) - \frac{I_1^2 I_2}{I_3^2} + 3 \frac{I_2^2}{I_3^2} + \frac{I_1}{I_3} - 3 \frac{I_1}{I_3} = \frac{I_2^2}{I_3^2} - 2 \frac{I_1}{I_3} \end{aligned} \quad (7.22)$$

bilden. Damit kann die Bazant-Energie in den Invarianten von B ausgedrückt werden

$$W(I_1, I_2, I_3) = I_1^2 + \left(\frac{I_2}{I_3} \right)^2 - 2 \left(\frac{I_1}{I_3} + I_2 + 3 \right). \quad (7.23)$$

Um die Bedingungen (K1) und (K2) überprüfen zu können, werden die beiden Ableitungen

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = 2I_1 - \frac{2}{I_3}, \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = 2 \frac{I_2}{I_3} - 2 \quad (7.24)$$

benötigt. Damit kann nun die Bedingung (K1) überprüft werden

$$\begin{aligned} &b \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2, I_3) + (b-1) \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2, I_3) = 0 \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3, I_3 = 1 \\ \Leftrightarrow & \quad b(2I_1 - 2) + (b-1)(2I_2 - 2) = 0 \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3 \\ \Leftrightarrow & \quad b + b - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad b = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dadurch erfüllt die Bazant-Energie (K1) und ist somit schon für den inkompressiblen Fall APS-zulässig.

Bleibt noch für den kompressiblen Fall Bedingung (K2) zu überprüfen

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} + I_1 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_3} + (I_1 - 1) \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_2} = 0 \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3, I_3 = 1 \\ \Leftrightarrow & \quad 2 + 0 + \frac{2}{I_3^2} + (I_1 - 1) \frac{2}{I_3^2} - 4 \frac{I_2}{I_3^3} - \frac{1}{2} \left(2 \frac{I_2}{I_3^2} - 2 \right) = 0 \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3, I_3 = 1 \\ \Leftrightarrow & \quad 2 + 2 + 2I_1 - 2 - 4I_1 - I_1 + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad -3I_1 + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad I_1 = 1. \end{aligned}$$

Die Bedingung kann für kein $I_1 > 3$ erfüllt werden und somit ist die Bazant-Energie im kompressiblen Fall nicht APS-zulässig.

7.7 Ciarlet-Energie

Energiefunktionale vom Typ

$$W(F) = \frac{c_1}{2} \|F\|^2 + \frac{c_2}{2} \|\text{Cof } F\|^2 + h(\det(F)) \quad (7.25)$$

mit einer skalaren konvexen monotonen Funktion h und zwei positiven Konstanten c_1, c_2 sind direkt nach Konstruktion polykonvex. Aus Lemma (4.5) wissen wir somit direkt, dass solche Energien auch APS-konvex sind. Die Darstellung in den Invarianten lautet durch (2.12)-(2.14)

$$W(F) = \frac{c_1}{2} I_1 + \frac{c_2}{2} I_2 + h(I_3^{\frac{1}{2}}). \quad (7.26)$$

Analog zur Mooney-Rivlin-Energie ist die Bedingung (K1) immer erfüllt. Bedingung (K2) lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} + I_1 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_3} + (I_1 - 1) \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_2} &= 0 \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3, I_3 = 1 \\ \Leftrightarrow & 0 - \frac{c_2}{4} = 0 \\ \Leftrightarrow & c_2 = 0. \end{aligned}$$

Damit ist die Ciarlet-Energie für den Fall $c_2 = 0$ APS-zulässig und hat die Form

$$W(F) = \frac{c_1}{2} I_1 + h(I_3^{\frac{1}{2}}). \quad (7.27)$$

Wie auch schon die Blatz-Ko-Energie ist die APS-zulässige Ciarlet-Energie unabhängig von I_2 . Wir suchen deswegen noch weiter nach einer APS-zulässigen Energie, die auch von I_2 abhängig ist.

7.8 Saint-Venant-Kirchhoff Energie

Wir betrachten die nicht Rang-1-konvexe Funktion

$$W(F) = \frac{\mu}{4} \|C - \mathbb{1}\|^2 + \frac{\lambda}{8} \text{tr}(C - \mathbb{1})^2. \quad (7.28)$$

Aus (3.5) bilden wir

$$C - \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus lassen sich direkt $\text{tr}(C - \mathbb{1})^2$ und $\|C - \mathbb{1}\|^2$ bestimmen

$$\text{tr}(C - \mathbb{1})^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 = \gamma^4 \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} \|C - \mathbb{1}\|^2 &= \alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 + \alpha^2 + \beta^2 \\ &= (\alpha^2 + \beta^2)^2 + 2(\alpha^2 + \beta^2) \\ &= \gamma^4 + 2\gamma^2. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Insgesamt ergibt sich

$$W(F)|_{APS} = \frac{1}{8}(2\mu + \lambda)\gamma^4 + \frac{\mu}{2}\gamma^2.$$

Die Funktion ist konvex und monoton in $\gamma^2 > 0$ mit globalem Minimum bei $\gamma = 0$. Durch die Verkettung von $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ ist die Funktion konvex in α, β und somit auch dieses Energiefunktional APS-konvex.

Um die beiden anderen Bedingungen (K1) und (K2) überprüfen zu können, müssen wir die SVK-Energie in Invarianten von B ausdrücken. Als erster Schritt sollen die Terme erstmal in Abhängigkeit von B ausgedrückt werden. Aus der Polarzerlegung (2.7) wissen wir

$$\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(C), \quad \|B\|^2 = \|C\|^2. \quad (7.31)$$

Die einzelnen Terme der SVK-Energie sind deswegen durch

$$\begin{aligned} \|C - \mathbb{1}\|^2 &= \langle C - \mathbb{1}, C - \mathbb{1} \rangle = \|C\|^2 + 2 \operatorname{tr}(C) + \|\mathbb{1}\|^2, \\ \operatorname{tr}(C - \mathbb{1})^2 &= \operatorname{tr}(C)^2 + 2 \operatorname{tr}(C) \operatorname{tr}(\mathbb{1}) + \operatorname{tr}(\mathbb{1})^2 \end{aligned}$$

für B oder C identisch. Wir fassen also die SVK-Energie auf als

$$W(F) = \frac{\mu}{4} \|B - \mathbb{1}\|^2 + \frac{\lambda}{8} \operatorname{tr}(B - \mathbb{1})^2. \quad (7.32)$$

Wir wollen im nächsten Schritt (7.32) nun in den Invarianten (2.8) von B ausdrücken. Dabei brauchen wir wieder nur die beiden Terme (7.31) in den Invarianten ausdrücken. Es gilt direkt

$$\operatorname{tr}(B) = I_1.$$

Für $\|B\|^2$ berücksichtigen wir, dass B symmetrisch und somit diagonalisierbar ist:

$$\|B\|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2.$$

Man sieht durch explizites Ausmultiplizieren, dass

$$\begin{aligned} I_1^2 - 2I_2 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_2\lambda_3 - 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) \\ &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \|B\|^2 \end{aligned} \quad (7.33)$$

gilt. Die einzelnen Terme der SVK-Energie (7.31) lauten in den Invarianten ausgedrückt

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(B - \mathbb{1})^2 &= (\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(\mathbb{1}))^2 = (I_1 - 3)^2 \\ \|B - \mathbb{1}\|^2 &= \|B\|^2 - 2 \operatorname{tr}(B) + \|\mathbb{1}\|^2 = I_1^2 - 2I_2 - 2I_1 + 3. \end{aligned}$$

Die Saint Venant-Kirchhoff-Energie in den Invarianten von B geschrieben lautet also

$$\begin{aligned} W(I_1, I_2) &= \frac{\mu}{4} (I_1^2 - 2I_1 - 2I_2 + 3) + \frac{\lambda}{8} (I_1 - 3)^2 \\ &= \left(\frac{\mu}{4} + \frac{\lambda}{8} \right) (I_1 - 3)^2 + \frac{\mu}{2} (2I_1 - I_2 - 3). \end{aligned} \quad (7.34)$$

Um (K1) zu überprüfen, bestimmen wir die partiellen Ableitungen nach I_1 und I_2

$$\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2) = \left(\frac{\mu}{3} + \frac{\lambda}{4} \right) (I_1 - 3) + \mu I_1, \quad (7.35)$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2) = -\frac{\mu}{2}. \quad (7.36)$$

Die Ableitung $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ hängt von I_1 ab, während $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ unabhängig von I_1 ist. Also kann (K1)

$$b \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2) + (b - 1) \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2) = 0 \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3$$

nicht erfüllt werden. Bei der SVK-Energie stellen sich also im allgemeinen keine APS-Verformungen ein.

7.9 Fourth-order incompressible elasticity

Die Fourth-order-Energie für inkompressible Materialien lautet

$$W(F) = \mu \operatorname{tr}(E^2) + \frac{\lambda}{2} \operatorname{tr}(E^3) + D \operatorname{tr}(E^2)^2, \quad E = \frac{1}{2}(C - \mathbf{1}) \quad (7.37)$$

mit positiven Materialkonstanten μ, λ, D . Durch (3.5) lässt sich E berechnen

$$E = \frac{1}{2}(C - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter lauten

$$E^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2 & \alpha^3\beta + \alpha\beta^3 + \alpha\beta & \alpha^3 + \alpha\beta^2 \\ \alpha^3\beta + \alpha\beta^3 + \alpha\beta & \alpha^2\beta^2 + \beta^4 + \beta^2 & \alpha^2\beta + \beta^3 \\ \alpha^3 + \alpha\beta^2 & \alpha^2\beta + \beta^3 & \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} E^3_{11} &= \alpha^6 + 2\alpha^4\beta^2 + 2\alpha^4 + \alpha^2\beta^4 + 2\alpha^2\beta^2, \\ E^3_{22} &= \alpha^4\beta^2 + 2\alpha^2\beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^6 + 2\beta^4, \\ E^3_{33} &= \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die einzelnen Terme als

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(E^2) &= \frac{1}{4} (\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2 + \beta^4 + 2\beta^2) \\ &= \frac{1}{4} \gamma^4 + \frac{1}{2} \gamma^2, \\ \operatorname{tr}(E^3) &= \frac{1}{8} (\alpha^6 + 3\alpha^4\beta^2 + 3\alpha^4 + 3\alpha^2\beta^4 + 6\alpha^2\beta^2 + \beta^6 + 3\beta^4) \\ &= \frac{1}{8} \gamma^6 + \frac{3}{8} \gamma^4, \\ \operatorname{tr}(E^2)^2 &= \left(\frac{1}{4} \gamma^4 + \frac{1}{2} \gamma^2 \right)^2 \\ &= \frac{1}{16} \gamma^8 + \frac{1}{4} \gamma^6 + \frac{1}{4} \gamma^4. \end{aligned}$$

Die gesamte Energiefunktion für APS-Funktionen lautet nun

$$W(F)|_{APS} = \frac{D}{16} \gamma^8 + \left(\frac{A}{16} + \frac{D}{4} \right) \gamma^6 + \left(\frac{\mu}{4} + \frac{3A}{16} + \frac{D}{4} \right) \gamma^4 + \frac{\mu}{2} \gamma^2.$$

Die APS-Konvexität ist für alle $\mu, A, D, > 0$ erfüllt. Wir wollen annehmen, dass es Materialien gibt, für die das Energiefunktional APS-konvex ist.

Als nächstes wollen wir uns die Bedingung (K1) anschauen und müssen dafür wieder, wie auch schon bei der SVK-Energie, das Funktional in den Invarianten von B ausdrücken. Den ersten Term können wir aufgrund der Symmetrie von E umschreiben zu

$$\operatorname{tr}(E^2) = \langle E^2, \mathbf{1} \rangle = \langle E, E^T \rangle = \langle E, E \rangle = \|E\|^2 = \frac{1}{4} \|C - \mathbf{1}\|^2. \quad (7.38)$$

Diesen Term kennen wir schon aus dem letzten Beispiel der SVK-Energie und die Darstellung in den Invarianten von B lautet

$$\operatorname{tr}(E^2) = \frac{1}{4} \|B - \mathbf{1}\|^2 = \frac{1}{4} (I_1^2 - 2I_1 - 2I_2 + 3).$$

Auch den dritten Teil können wir so direkt hinschreiben

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(E^2)^2 &= \left(\frac{1}{4} (I_1^2 - 2I_1 - 2I_2 + 3) \right)^2 \\ &= \frac{1}{16} (I_1^4 - 4I_1^3 - 4I_1^2 I_2 + 10I_1^2 - 8I_1 I_2 + 4I_2^2 - 12I_1 - 12I_2 + 9).\end{aligned}$$

Also bleibt nur noch der mittlere Teil $\mathrm{tr}(E^3)$. Dafür wollen wir uns zunächst überlegen, wie wir $\mathrm{tr}(B^3)$ in den Invarianten ausdrücken können. Aus der Diagonalisierbarkeit von B wissen wir

$$\mathrm{tr}(B^3) = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3.$$

Um dieses Polynom in den Invarianten ausdrücken zu können, starten wir bei allen Kombinationen aus Invarianten die zu Termen dritter Ordnung in den Eigenwerten führen

$$\begin{aligned}I_3 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \\ I_1 I_2 &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) \\ &= \lambda_1^2 \lambda_2 + \lambda_1^2 \lambda_3 + \lambda_2^2 \lambda_1 + \lambda_2^2 \lambda_3 + \lambda_3^2 \lambda_1 + \lambda_3^2 \lambda_2 + 3\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \\ I_1^3 &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3 \\ &= \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + 3\lambda_1^2 \lambda_2 + 3\lambda_1^2 \lambda_3 + 3\lambda_2^2 \lambda_1 + 3\lambda_2^2 \lambda_3 + 3\lambda_3^2 \lambda_1 + 3\lambda_3^2 \lambda_2 + 6\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.\end{aligned}$$

Demnach gilt

$$\mathrm{tr}(B^3) = I_1^3 - 3I_1 I_2 + 3I_3. \quad (7.39)$$

Zurück zu

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(E^3) &= \frac{1}{8} \mathrm{tr}((C - \mathbb{1})^3) = \frac{1}{8} \mathrm{tr}(C^3 - 3C^2 + 3C - \mathbb{1}) \\ &= \frac{1}{8} (\mathrm{tr}(C^3) - 3 \mathrm{tr}(C^2) + 3 \mathrm{tr}(C) - \mathrm{tr}(\mathbb{1})) \\ &= \frac{1}{8} (\mathrm{tr}(C^3) - 3\|C\|^2 + 3 \mathrm{tr}(C) - 3).\end{aligned}$$

Wir können wieder C durch B ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(E^3) &= \frac{1}{8} (\mathrm{tr}(B^3) - 3\|B\|^2 + 3 \mathrm{tr}(B) - 3) \\ &= \frac{1}{8} (I_1^3 - 3I_1 I_2 + 3I_3 - 3(I_1^2 - 2I_2) + 3I_1 - 3) \\ &= \frac{1}{8} (I_1^3 - 3I_1^2 - 3I_1 I_2 + 3I_1 + 6I_2 + 3I_3 - 3).\end{aligned}$$

Damit können wir nun das gesamte Funktional in den Invarianten von B ausdrücken

$$\begin{aligned}W(I_1, I_2, I_3) &= \mu \mathrm{tr}(E^2) + \frac{A}{2} \mathrm{tr}(E^3) + D \mathrm{tr}(E^2)^2 \\ &= \mu \frac{1}{4} (I_1^2 - 2I_1 - 2I_2 + 3) + \frac{A}{2} \frac{1}{8} (I_1^3 - 3I_1^2 - 3I_1 I_2 + 3I_1 + 6I_2 + 3I_3 - 3) \\ &\quad + D \frac{1}{16} (I_1^4 - 4I_1^3 - 4I_1^2 I_2 + 10I_1^2 - 8I_1 I_2 + 4I_2^2 - 12I_1 - 12I_2 + 9).\end{aligned} \quad (7.40)$$

Die benötigten Ableitungen um (K1) zu überprüfen lauten

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2) &= \frac{\mu}{2}(I_1 - 1) + \frac{3A}{16}(I_1^2 - 2I_1 - I_2 + 1) + \frac{D}{4}(I_1^3 - 3I_1^2 - 2I_1 I_2 - 2I_2 - 3) \\ \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2) &= \frac{\mu}{2} + \frac{3A}{16}(-I_1 + 2) + \frac{D}{4}(I_1^2 - 2I_1 + 2I_2 - 3).\end{aligned}$$

Ein Blick auf die unterschiedlich hohen Exponenten von $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ und $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ liefert, dass (K1) nicht erfüllbar ist und die Fourth-order-Energie nicht APS-zulässig ist.

7.10 Hencky-Energie

Eine besonders bedeutende Energie der nichtlinearen Elastizitätstheorie ist die quadratische Hencky-Energie

$$W_H(F) = \mu \|\operatorname{dev}(\log V)\|^2 + \frac{\kappa}{2} (\operatorname{tr}(\log V))^2, \quad (7.41)$$

und die sogenannte exp-Hencky-Energie aus Neff, Ghiba und Lankeit [15, eq. (1.1)]

$$\widetilde{W}_{eH}(F) = \frac{\mu}{k} e^{k \|\operatorname{dev}(\log V)\|^2} + \frac{\kappa}{2\hat{k}} e^{\hat{k}(\operatorname{tr}(\log V))^2}. \quad (7.42)$$

Für beide Energien ist es nicht so einfach möglich, direkt eine Darstellung in den Invarianten aufzuschreiben. Deswegen werden wir die APS-Konvexität und die Bedingungen (K1) und (K2) über eine Darstellung in den Eigenwerten von B prüfen.²¹

Der Term

$$\begin{aligned} \|\operatorname{dev}(X)\|^2 &= \left\| X - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(X) \mathbb{1} \right\|^2 \\ &= \|X\|^2 - \frac{2}{3} \operatorname{tr}(X) \langle X, \mathbb{1} \rangle + \left\| \frac{\operatorname{tr}(X)}{3} \mathbb{1} \right\|^2 \\ &= \|X\|^2 - \frac{1}{3} (\operatorname{tr}(X))^2 \end{aligned} \quad (7.43)$$

liefert uns die Darstellung

$$W_H(F) = \frac{\mu}{4} \|\log B\|^2 + \left(\frac{\kappa}{8} - \frac{\mu}{12} \right) (\operatorname{tr}(\log B))^2, \quad (7.44)$$

$$\widetilde{W}_{eH}(F) = \frac{\mu}{k} e^{\frac{k}{4} (\|\log B\|^2 + \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\log B))} + \frac{\kappa}{2\hat{k}} e^{\frac{\hat{k}}{4} (\operatorname{tr}(\log B))^2}. \quad (7.45)$$

Desweiteren verwenden wir, dass aus der Diagonalisierbarkeit von B

$$\log B = Q \log(D_B) Q^T$$

gilt und daraus folgt

$$\operatorname{tr}(\log B) = \log \lambda_1 + \log \lambda_2 + \log \lambda_3 = \log(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) = \log(\det B). \quad (7.46)$$

Da bei inkompressiblen Verformungen wie der APS-Verformung $\det(B) = 1$ gilt, vereinfachen sich beide Energien zu

$$W_H(F)|_{\text{ink}} = \frac{\mu}{4} \|\log B\|^2, \quad (7.47)$$

$$\widetilde{W}_{eH}(F)|_{\text{ink}} = \frac{\mu}{k} e^{\frac{k}{4} \|\log B\|^2} + \frac{\kappa}{2\hat{k}}. \quad (7.48)$$

Mit

$$\|\log B\|^2 = \sum_{i=1}^3 (\log \lambda_i)^2$$

ist eine Darstellung in den Eigenwerten von B gefunden.

²¹Die Darstellung in B ist direkt aus $\log(V) = \log\left((V^2)^{1/2}\right) = \frac{1}{2} \log(B)$ gegeben.

7.10.1 APS-Konvexität

Die Eigenwerte von B wurden im einleitenden Kapitel über APS-Funktionen berechnet, sie lauten

$$\lambda = \frac{1}{2}(2 + \gamma^2 + \gamma\sqrt{\gamma^2 + 4}), \quad (3.12)$$

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda_3 = 1. \quad (3.13)$$

Damit fassen wir die bekannte APS-Nebenbedingung

$$\forall I_1 = I_2 \geq 3, \quad I_3 = 1$$

nun durch

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda_3 = 1, \quad \forall \lambda \geq 1 \quad (7.49)$$

auf. Daraus lässt sich die Darstellung der Energie noch weiter vereinfachen

$$\begin{aligned} W_H(F)|_{APS} &= \frac{\mu}{4} \left(\log(\lambda)^2 + \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \log(1)^2 \right) \\ &= \frac{\mu}{2} \log(\lambda)^2 \\ &= \frac{\mu}{2} \log\left(\frac{1}{2}(2 + \gamma^2 + \gamma\sqrt{\gamma^2 + 4})\right)^2, \\ \widetilde{W}_{eH}(F)|_{APS} &= \frac{\mu}{k} e^{\frac{k}{4}(\log(\lambda)^2 + \log(\frac{1}{\lambda})^2 + \log(1)^2)} + \frac{\kappa}{2\hat{k}} \\ &= \frac{\mu}{k} e^{\frac{k}{2} \log(\lambda)^2} + \frac{\kappa}{2\hat{k}} \\ &= \frac{\mu}{k} e^{\frac{k}{2} \log\left(\frac{1}{2}(2 + \gamma^2 + \gamma\sqrt{\gamma^2 + 4})\right)^2} + \frac{\kappa}{2\hat{k}}. \end{aligned}$$

Die Konvexität soll hier anhand der beiden nachfolgenden Abbildungen veranschaulicht werden. Die Hencky-Energie ist nur für kleine $\gamma = \|u(x_1, x_2)\|^2$ konvex.

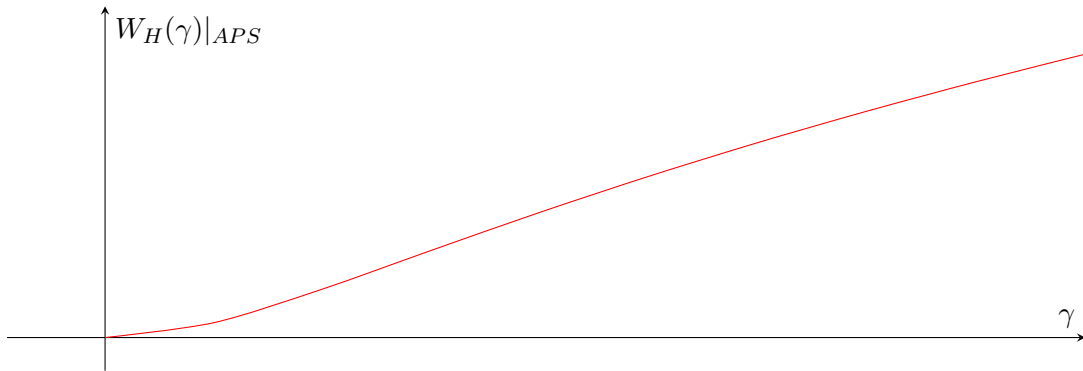


Abbildung 17: Die Hencky-Energie für APS-Verformungen mit $\gamma = \|\nabla u(x_1, x_2)\|^2$ ist nicht konvex in γ und daher nicht APS-konvex.

Dadurch kann die Hencky-Energie nicht APS-konvex sein. Hingegen ist die exp-Hencky-Energie global konvex und monoton in γ^2 .

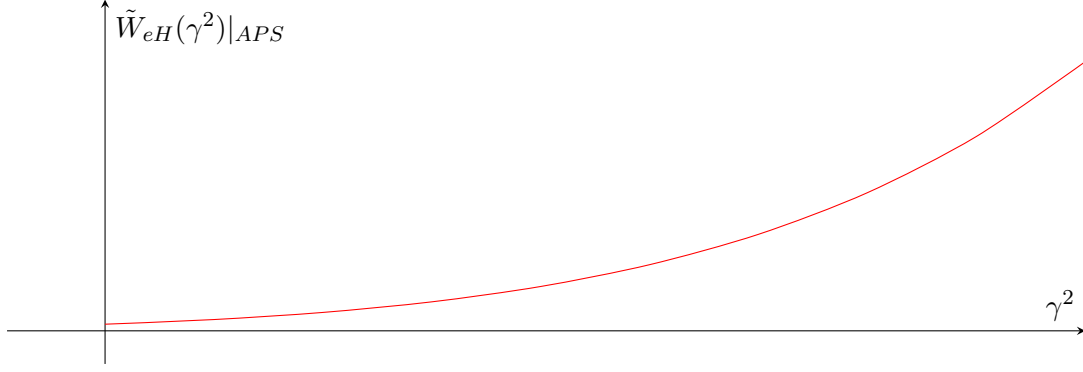


Abbildung 18: Die exp-Hencky-Energie für APS-Verformungen mit $\gamma^2 = \|\nabla u(x_1, x_2)\|^2$ ist konvex in γ^2 und daher APS-konvex.

Damit ist die exp-Hencky-Energie APS-konvex.

7.10.2 Erste Energiebedingung

Um die (exp-)Hencky-Energie auf die Bedingung (K1) zu prüfen, benötigen wir Ableitungen nach I_1 und I_2 , ohne dabei eine Darstellung der Energien in den Invarianten zu kennen. Die Eigenwerte und die Invarianten hängen über

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ I_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \\ I_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \end{aligned}$$

zusammen. Eine Darstellung der Eigenwerte aus den Invarianten kann nur aufwendig hingeschrieben werden. Dies benötigen wir aber auch gar nicht, sondern nur die Ableitungen der Eigenwerte nach den Invarianten, damit wir

$$\frac{\partial W}{\partial I_k}(\lambda_1(I_1, I_2, I_3), \lambda_2(I_1, I_2, I_3), \lambda_3(I_1, I_2, I_3)) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial I_k}(I_1, I_2, I_3) \quad (7.50)$$

berechnen können. Es gilt nach Thiel [17, eq. (2.13.32)]

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial I_k}(I_1, \dots, I_n) = \frac{(-1)^{k+1} \lambda_i^{n-k}}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (\lambda_i - \lambda_j)} \quad \forall I_1, \dots, I_n \text{ mit } \lambda_i \neq \lambda_j, \quad \forall i \neq j. \quad (7.51)$$

Für den dreidimensionalen Fall lauten die Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1}{\partial I_1} &= \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}, & \frac{\partial \lambda_1}{\partial I_2} &= \frac{-\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}, & \frac{\partial \lambda_1}{\partial I_3} &= \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}, \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial I_1} &= \frac{\lambda_2^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}, & \frac{\partial \lambda_2}{\partial I_2} &= \frac{-\lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}, & \frac{\partial \lambda_2}{\partial I_3} &= \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}, \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial I_1} &= \frac{\lambda_3^2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}, & \frac{\partial \lambda_3}{\partial I_2} &= \frac{-\lambda_3}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}, & \frac{\partial \lambda_3}{\partial I_3} &= \frac{1}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}. \end{aligned}$$

Wir wollen uns die Rechnungen vereinfachen, da immer ein Term $\text{tr}(\log B) = \log(\det B)$ vorkommt, welcher nachher beim APS-Einsetzen wegfällt. Deswegen gilt

$$\left[\frac{\partial W_H}{\partial I_k}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right]_{APS} = \left[\frac{\partial}{\partial I_k} \frac{\mu}{4} (\log(\lambda_1)^2 + \log(\lambda_2)^2 + \log(\lambda_3)^2) \right]_{\lambda_1=\lambda, \lambda_2=\frac{1}{\lambda}, \lambda_3=1}.$$

Durch explizites Einsetzen und Vereinfachen erkennt man, dass

$$\left[\frac{\partial W_H}{\partial I_1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right]_{APS} = \frac{\mu}{2} \log(\lambda) \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} = \left[\frac{\partial W}{\partial I_2}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right]_{APS} \quad (7.52)$$

gilt. Die Bedingung (K1) lautet durch (7.49) in den Eigenwerten ausgedrückt

$$\exists b \in \mathbb{R} : \quad b \frac{\partial W}{\partial I_1}(\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1) + (b-1) \frac{\partial W}{\partial I_2}(\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1) = 0, \quad \forall \lambda \geq 1. \quad (K1)$$

Für die Hencky-Energie ist (K1) durch $b = \frac{1}{2}$ erfüllt.

Bei der exp-Hencky-Energie gehen wir analog vor. Es gilt durch APS die Vereinfachung

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \widetilde{W}_{eH}}{\partial I_k}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right]_{APS} &= \left[\frac{\partial}{\partial I_k} \frac{\mu}{k} e^{\frac{k}{4}(\log(\lambda_1)^2 + \log(\lambda_2)^2 + \log(\lambda_3)^2)} \right]_{\lambda_1=\lambda, \lambda_2=\frac{1}{\lambda}, \lambda_3=1} \\ &= \left[e^{\frac{k}{4}(\log(\lambda_1)^2 + \log(\lambda_2)^2 + \log(\lambda_3)^2)} \left(\frac{\partial}{\partial I_k} \frac{\mu}{4} (\log(\lambda_1)^2 + \log(\lambda_2)^2 + \log(\lambda_3)^2) \right) \right]_{\lambda_1=\lambda, \lambda_2=\frac{1}{\lambda}, \lambda_3=1} \\ &= \frac{\mu}{k} e^{\frac{k}{2} \log(\lambda)^2} \left[\frac{\partial W_H}{\partial I_k}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right]_{APS}. \end{aligned}$$

Daraus folgt wieder

$$\left[\frac{\partial \widetilde{W}_{eH}}{\partial I_1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right]_{APS} = \left[\frac{\partial \widetilde{W}_{eH}}{\partial I_2}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right]_{APS}$$

und somit erfüllt auch die exp-Hencky-Energie die Bedingung (K1) mit $b = \frac{1}{2}$.

Beide Energien sind somit für die inkompressible Betrachtung APS-zulässig.

7.10.3 Zweite Energiebedingung

Um die zweite Bedingung (K2) überprüfen zu können, werden Ableitungen nach den Invarianten zweiter Ordnung benötigt. Die Rechnungen lassen sich ähnlich wie bei der ersten Energiebedingung durch geschicktes Identifizieren wegfallender Terme vereinfachen. Trotzdem bleiben die Rechnungen per Hand aufwendig und sollen deswegen hier übersprungen werden. Gegeben sind

$$W_H(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{\mu}{4} (\log(\lambda_1)^2 + \log(\lambda_2)^2 + \log(\lambda_3)^2) + \left(\frac{\mu}{12} + \frac{\kappa}{8} \right) (\log(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3))^2, \quad (7.53)$$

$$\widetilde{W}_{eH}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{\mu}{k} e^{\frac{k}{4}((\log(\lambda_1)^2 + \log(\lambda_2)^2 + \log(\lambda_3)^2) + \frac{1}{3}(\log(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3))^2)} + \frac{\kappa}{2k} e^{\frac{k}{4}(\log(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3))^2}. \quad (7.54)$$

Die Gleichung (K2) mit (7.49) in den Eigenwerten ausgedrückt lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_3} + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1) \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_2} &= 0, \\ \text{für } \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda_3 = 1, \quad \forall \lambda \geq 1. & \end{aligned} \quad (K2)$$

Für die Hencky-Energie lautet (K2) soweit vereinfacht wie möglich

$$\frac{3\mu}{4} \log(\lambda) \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} = 0, \quad \forall \lambda \geq 1.$$

Diese Beziehung kann aber nur für $\lambda = 1$ erfüllt werden.²² Damit ist die Hencky-Energie in der kompressiblen Theorie nicht APS-zulässig.

Für die exp-Hencky-Energie lautet (K2) soweit vereinfacht wie möglich

$$\frac{3\mu}{4} e^{\frac{\lambda}{2} \log(\lambda)^2} \log(\lambda) \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} = 0, \quad \forall \lambda \geq 1.$$

Diese Beziehung kann auch wieder nur für $\lambda = 1$ erfüllt werden. Damit ist die exp-Hencky-Energie in der kompressiblen Theorie nicht APS-zulässig.

7.11 Zug-Druck-Symmetrie

Wir konnten nun schon bei mehreren Energien die Bedingung (K1) durch $b = \frac{1}{2}$ erfüllen. Es stellt sich die Vermutung, dass ein Zusammenhang zwischen (K1) mit $b = \frac{1}{2}$ und der sogenannten **Zug-Druck-Symmetrie**

$$W(F) = W(F^{-1}) \tag{7.55}$$

existiert, welche sowohl die Bazant-Energie wie auch die (exp)-Henky-Energie²³ erfüllen. Dafür wollen wir uns zunächst ein weiteres Beispiel konstruieren. Betrachten wir den polykonvexen²⁴ Term

$$W(F) = \frac{\|F\|^3}{\det(F)}.$$

Zusätzlich wollen wir aus polykonvexen Term $\|F\|^3$ eine Zug-Druck-symmetrische Energie konstruieren, indem wir die Shield-Transformation verwenden

$$W^*(F) = \det(F) W(F^{-1}), \tag{7.56}$$

die besagt, dass $W^*(F)$ polykonvex ist, wenn das ursprüngliche $W(F)$ polykonvex ist, siehe dafür Carroll und Rooney [3]. Starten wir also bei

$$W(F) = \|F\|^3 \quad \Rightarrow \quad W(F^{-1}) = \det(F) \|F^{-1}\|^3.$$

Damit kann der Ausdruck $W(F) = \det(F) \|F^{-1}\|^3$ mit der Shield-Transformation aus dem polykonvexen Term $\|F\|^3$ produziert werden und ist somit auch polykonvex.

Unser Energiefunktional soll

$$W(F) = \frac{\|F\|^3}{\det(F)} + \det(F) \|F^{-1}\|^3 \tag{7.57}$$

lauten und den Namen Martin-Neff-Energie bekommen. Durch Konstruktion ist sie isotrop, polykonvex und aus der Beziehung $\det(F) = \frac{1}{\det(F^{-1})}$ auch Zug-Druck-symmetrisch. Aus der Polykonvexität folgt direkt die APS-Konvexität und wir wollen direkt (K1) zeigen.

Um eine Darstellung in den Invarianten zu finden, wollen wir

$$\|F\|^2 = \langle F, F \rangle = \langle F F^T, \mathbb{1} \rangle = \text{tr}(B), \tag{7.58}$$

$$\|F^{-1}\|^2 = \langle F^{-1}, F^{-1} \rangle = \langle F^{-1} F^{-T}, \mathbb{1} \rangle = \text{tr}(B^{-1}) \tag{7.59}$$

²² $\lambda = 1$ führte zu $\gamma = 0 \Rightarrow u(x_1, x_2) = \text{const.}$

²³Bei der Bazant-Energie folgt dies aus der Symmetrie in B und B^{-1} , bei der (exp)-Henky-Energie ist dafür die Beziehung $\log(\lambda^{-1})^2 = (-\log(\lambda))^2 = \log(\lambda)^2$ verantwortlich.

²⁴Der Term ist polykonvex, da die Funktion $(x, y) \mapsto \frac{x^3}{y}$ konvex für $x \in \mathbb{R}, y > 0$ ist.

verwenden. Damit lassen sich direkt alle bis auf einen Term in den Invarianten ausdrücken

$$W(F) = \frac{I_1^{\frac{3}{2}}}{I_3^{\frac{1}{2}}} + I_3^{\frac{1}{2}} \operatorname{tr}(B^{-1})^{\frac{3}{2}}.$$

Der letzte Term $\operatorname{tr}(B^{-1})$ lautet $\frac{I_2}{I_3}$ und wird im Folgenden noch als I'_1 eingeführt und hergeleitet. Die Darstellung in den Invarianten lautet nun

$$W(I_1, I_2, I_3) = \sqrt{\frac{I_1^3}{I_3} + \frac{\sqrt{I_2^3}}{I_3}}. \quad (7.60)$$

Die beiden benötigten Ableitungen lauten

$$\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2, I_3) = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{I_1}{I_3}}, \quad \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2, I_3) = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{I_2}}{I_3}. \quad (7.61)$$

Für den APS-Fall ($I_1 = I_2, I_3 = 1$) sind beide Ableitung identisch und Bedingung (K1) ist wieder durch $b = \frac{1}{2}$ erfüllt und diese Energie ist somit APS-zulässig für den inkompressiblen Fall. Es soll auch gleich (K2) überprüft werden.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} + I_1 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_3} + (I_1 - 1) \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_2} = 0, \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3, I_3 = 1 \\ \Leftrightarrow & \quad \frac{3}{4\sqrt{I_1 I_3}} + 0 - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{I_1}{I_3^3}} + (I_1 - 1) \frac{3}{4\sqrt{I_1 I_3}} - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{I_2}}{I_3^2} - \frac{3}{4} \frac{\sqrt{I_2}}{I_3} = 0, \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3, I_3 = 1 \\ \Leftrightarrow & \quad \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{I_1}} - \sqrt{I_1} + \frac{I_1 - 1}{\sqrt{I_1}} - 2\sqrt{I_1} - \sqrt{I_1} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad -3\sqrt{I_1} = 0. \end{aligned}$$

Damit ist (K2) nicht erfüllt und unsere Energie in der kompressiblen Elastizitätstheorie nicht APS-zulässig.

Wir benennen

$$I'_1 = I_1(B^{-1}), \quad I'_2 = I_2(B^{-1}), \quad I'_3 = I_3(B^{-1})$$

und können diese direkt über die Invarianten von B ausdrücken.

$$\begin{aligned} I'_1 &= \operatorname{tr}(B^{-1}) = \operatorname{tr}\left(\frac{\det(B)}{\det(B)} B^{-1}\right) = \frac{1}{\det(B)} \operatorname{tr}(\det(B) B^{-T}) \\ &= \frac{\operatorname{tr}(\operatorname{Cof}(B))}{\det(B)} = \frac{I_2}{I_3}, \end{aligned} \quad (7.62)$$

$$\begin{aligned} I'_2 &= \operatorname{tr}(\operatorname{Cof}(B^{-1})) = \operatorname{tr}(\det(B^{-1}) (B^{-1})^{-T}) = \det(B^{-1}) \operatorname{tr}(B^T) \\ &= \frac{\operatorname{tr}(B)}{\det(B)} = \frac{I_1}{I_3}, \end{aligned} \quad (7.63)$$

$$I'_3 = \det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)} = \frac{1}{I_3}. \quad (7.64)$$

Lemma 7.1. *Ein isotropes Zug-Druck-symmetrische Energiefunktional $W(F)$ ist in der inkompressiblen Elastizitätstheorie symmetrisch unter Vertauschen der beiden Invarianten I_1 und I_2 , das heißt es gilt*

$$W(I_1, I_2, 1) = W(I_2, I_1, 1), \quad \forall I_1, I_2. \quad (7.65)$$

Beweis. Aufgrund der Isotropie lässt sich $W(F)$ in den Invarianten von B schreiben, wir definieren

$$W(F) = W(I_1, I_2, I_3), \quad W(F^{-1}) = W(I'_1, I'_2, I'_3).$$

Aus der Zug-Druck-Symmetrie (7.55) folgt

$$W(I_1, I_2, I_3) = W(I'_1, I'_2, I'_3) = W\left(\frac{I_2}{I_3}, \frac{I_1}{I_3}, \frac{1}{I_3}\right).$$

Für den inkompressiblen Fall gilt $I_3 = 1$ und daraus folgt

$$W(I_1, I_2, 1) = W\left(\frac{I_2}{1}, \frac{I_1}{1}, \frac{1}{1}\right) = W(I_2, I_1, 1). \quad \blacksquare$$

Damit ist eine weitere hinreichende Bedingung für (K1) gefunden.

Satz 7.2. *Ein isotropes Energiefunktional, dass in seiner Darstellung in den Invarianten die symmetrische Beziehung*

$$W(I_1, I_2, 1) = W(I_2, I_1, 1), \quad \forall I_1, I_2 \in \mathbb{R} \quad (7.66)$$

erfüllt, löst die Bedingung (K1) automatisch mit $b = \frac{1}{2}$.

Beweis. Die Bedingung (K1) mit $b = \frac{1}{2}$ lautet

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2, I_3) + \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2, I_3) &= 0, & \forall I_1 = I_2 \geq 3, I_3 = 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2, 1) &= \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2, 1), & \forall I_1 = I_2 \geq 3. \end{aligned}$$

Damit muss folgende Aussage bewiesen werden

$$W(I_1, I_2, 1) = W(I_2, I_1, 1) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2, 1) = \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2, 1) \quad \forall I_1 = I_2.$$

Aus der Symmetrie folgt, dass

$$\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2, 1) = \left[\frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2, 1) \right]_{I_1 \leftrightarrow I_2}$$

gilt. Damit ist das Vertauschen von I_1 und I_2 nach dem Ableiten gemeint. Für den APS-Fall gilt nun

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2, 1) = \left[\frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2, 1) \right]_{I_1 \leftrightarrow I_2} \right]_{I_1 = I_2} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2, 1) = \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2, 1), & \quad \forall I_1 = I_2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

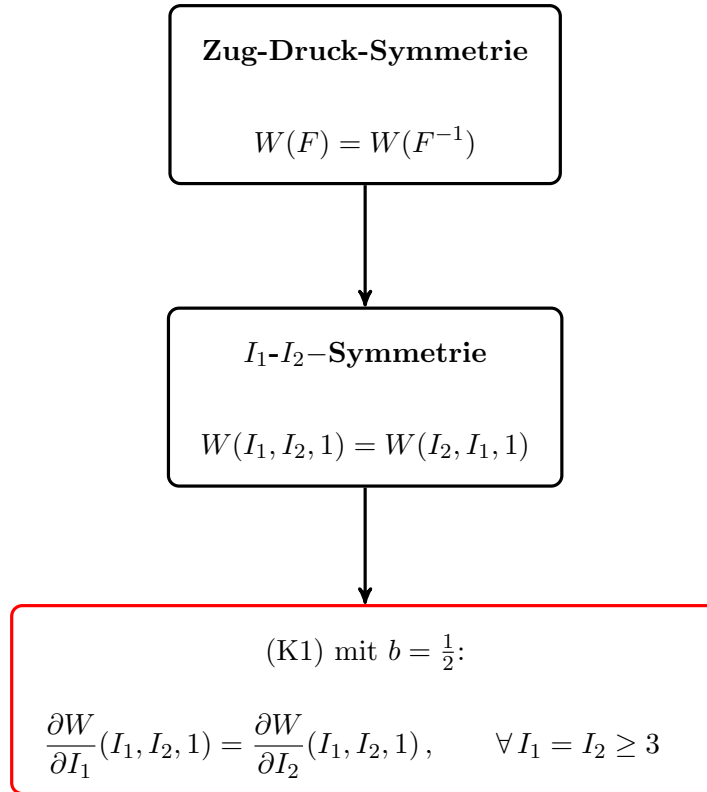


Abbildung 19: Schaubild für den Zusammenhang von Zug-Druck-Symmetrie und (K1).

7.12 Modell-Energie

Bis jetzt waren die einzigen Energien, die die Bedingung (K2) erfüllen, unabhängig von I_2 . Wir wollen deswegen hier noch ein weiteres Energiefunktional konstruieren, welches die APS-Konvexität und beide Bedingungen (K2) und (K2) erfüllt. Der einfachste Ansatz dafür ist

$$W(F) = f(I_1 - 3) + g(I_2 - 3) + h(I_3). \quad (7.67)$$

Dabei sollen die drei Terme $I_1 - 3, I_2 - 3$ dabei helfen, die skalaren Funktionen f, g und h möglichst einfach zu halten.²⁵

Die Bedingung (K2) lautet nun

$$f''(x) + (x - 1)g''(x) - \frac{1}{2}g'(x) = 0, \quad \forall x \geq 0. \quad (7.68)$$

Wir zerlegen die Differentialgleichung in folgende zwei Gleichungen

$$f''(x) = g''(x), \quad \forall x \geq 0, \quad (7.69)$$

$$xg''(x) = \frac{1}{2}g'(x), \quad \forall x \geq 0. \quad (7.70)$$

Wenn man jetzt dazu noch Bedingung (K1) für $b = \frac{1}{2}$ betrachtet um eine Zug-Druck-symmetrische Energie zu konstruieren, gilt

$$f'(x) = g'(x), \quad \forall x \geq 0. \quad (7.71)$$

²⁵Ein physikalisch sinnvolles Energiefunktional hat bei $F = \mathbb{1} \Rightarrow I_1 = I_2 = 3, I_3 = 1$ ein globales Minimum.

Man erkennt, dass durch den Ansatz

$$f(x) = g(x) \quad (7.72)$$

direkt zwei der drei Gleichungen verschwinden. Unsere Modell-Energie hat demnach die Form

$$W(F) = f(I_1 - 3) + f(I_2 - 3) + h(I_3) \quad (7.73)$$

und muss die Gleichung

$$x f''(x) = \frac{1}{2} f'(x), \quad \forall x \geq 0 \quad (7.70)$$

erfüllen. Letztere Gleichung kann durch Trennung der Variablen gelöst werden.

$$\begin{aligned} & \frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{1}{2x} \\ \Leftrightarrow & \int \frac{1}{f'(x)} db = \int \frac{1}{2x} dx \\ \Leftrightarrow & \ln(f'(x)) = \frac{1}{2} \ln(x) + c \\ \Leftrightarrow & f'(x) = c_1 \sqrt{x} \\ \Rightarrow & f(x) = \frac{2c_1}{3} x^{3/2} + c_2. \end{aligned}$$

Die Konstante c_2 kann weggelassen werden, da $h(I_3)$ noch nicht bestimmt ist. Unsere Modell-Energie hat somit die Form

$$W(F) = c_1 \left((I_1 - 3)^{\frac{3}{2}} + (I_2 - 3)^{\frac{3}{2}} \right) + h(I_3). \quad (7.74)$$

Wir wollen das Energiefunktional derart weiter modifizieren, dass weitere physikalisch sinnvolle Bedingungen erfüllt werden. Das Funktional soll spannungsfrei in der Referenzkonfiguration sein. Dafür muss

$$[DW(F)]_{F=\mathbb{1}} = 0 \quad (7.75)$$

gelten. Die Darstellung von $DW(F)$ in den Invarianten von B kennen wir schon als

$$DW(F) = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} F + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 \mathbb{1} - B) F + 2 I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} F^{-T}. \quad (5.58)$$

Die Auswertung von (7.75) liefert die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \left[2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbb{1} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} (3\mathbb{1} - \mathbb{1}) \mathbb{1} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbb{1} \right]_{I_1=I_2=3, I_3=1} \\ \Leftrightarrow 0 &= \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \right]_{I_1=I_2=3, I_3=1}. \end{aligned} \quad (7.76)$$

Das Einsetzen unserer Modell-Energie liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{3c_1}{2} (I_1 - 3)^{\frac{1}{2}} + 3c_1 (I_2 - 3)^{\frac{1}{2}} + h'(I_3) \right]_{I_1=I_2=3, I_3=1} \\ \Leftrightarrow 0 &= h'(1). \end{aligned} \quad (7.77)$$

Damit sind wir bei der Wahl von $h(I_3)$ noch nicht sonderlich eingeschränkt. Ein möglicher Term, der auch schon bei anderen Energiefunktionalen auftrat, ist

$$c(I_3) = \left(I_3^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2, \quad (7.78)$$

welcher schon in der Mihai-Neff- und Knowles-Energie vorkommt. Dieser Term ist konvex in $\sqrt{I_3} = \det(F)$, sodass unsere Modell-Energie

$$W(F) = c_1 \left((I_1 - 3)^{\frac{3}{2}} + (I_2 - 3)^{\frac{3}{2}} \right) + c_2 \left(I_3^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \quad (7.79)$$

zusätzlich noch polykonvex ist. Insgesamt haben wir eine Modell-Energie konstruiert, welche

- in nichttrivialer Weise von allen drei Invarianten I_1, I_2 und I_3 abhängt,
- polykonvex und daher insbesondere auch APS-konvex ist,
- die Bedingung (K1) mit $b = \frac{1}{2}$ löst,
- zusätzlich auch (K2) erfüllt und deswegen APS-zulässig ist,
- spannungsfrei in der Referenzkonfiguration $F = \mathbb{1}$ ist.

Eine weitere wichtige physikalische Eigenschaft ist die, dass sich das Energiefunktional für kleine Verformungen so verhält, wie von der linearen Elastizitätstheorie vorhergesagt wird. Der Exponent $\frac{3}{2}$ erfüllt dies jedoch nicht.

Wir wollen noch einen zweiten Versuch starten, indem wir die schon bekannte Mooney-Rivlin-Energie für den kompressiblen Fall zu

$$W(F) = f(I_1 I_3^{-\frac{1}{3}} - 3) + g(I_2 I_3^{-\frac{2}{3}} - 3) + h(I_3) \quad (7.80)$$

verallgemeinern.²⁶ Es soll wieder Zug-Druck-Symmetrie gelten und deswegen der Ansatz

$$W(F) = f(I_1 I_3^{-\frac{1}{3}} - 3) + f(I_2 I_3^{-\frac{2}{3}} - 3) + h(I_3) \quad (7.81)$$

gewählt werden. Die ersten Ableitungen nach I_1 und I_2 lauten

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = f'(I_1 I_3^{-\frac{1}{3}} - 3) I_3^{-\frac{1}{3}} \quad (7.82)$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = f'(I_2 I_3^{-\frac{2}{3}} - 3) I_3^{-\frac{2}{3}}. \quad (7.83)$$

Damit soll jetzt direkt (K2) aufgestellt werden. Wir führen im APS-Fall

$$x = I_1 I_3^{-\frac{1}{3}} - 3 = I_2 I_3^{-\frac{2}{3}} - 3$$

²⁶Die Verallgemeinerung der Neo-Hooke-Energie ohne ein $g(x) = 0$ wurde schon gemacht.

ein und die Bedingung (K2) lautet dann

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} + I_1 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_3} + (I_1 - 1) \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_2} = 0 \quad \forall I_1 = I_2 \geq 3, I_3 = 1 \\
\Leftrightarrow & f''(x) I_3^{-\frac{2}{3}} + f''(x) I_1 \left(-\frac{1}{3} I_3^{-\frac{4}{3}} \right) I_3^{-\frac{1}{3}} + f'(x) \left(-\frac{1}{3} I_3^{-\frac{4}{3}} \right) + (I_1 - 2) f''(x) I_3^{-\frac{4}{3}} \\
& + f''(x) I_2 \left(-\frac{2}{3} I_3^{-\frac{5}{3}} \right) I_3^{-\frac{2}{3}} + f'(x) \left(-\frac{2}{3} I_3^{-\frac{5}{3}} \right) - \frac{1}{2} f'(I_2 I_3^{-\frac{1}{3}} - 3) I_3^{-\frac{2}{3}} = 0 \quad \forall x \geq 0, I_3 = 1 \\
\Leftrightarrow & f''(x) - \frac{x+3}{3} (x+3) f''(x) - \frac{1}{3} f'(x) + (x+2) f''(x) \\
& - \frac{2}{3} (x+3) f''(x) - \frac{2}{3} f'(x) - \frac{1}{2} f'(x) = 0 \quad \forall x \geq 0 \\
\Leftrightarrow & -\frac{3}{2} f'(x) = 0 \quad \forall x \geq 0 \\
\Leftrightarrow & f(x) = c_1.
\end{aligned}$$

Also kann mit Ansatz (7.80) kein Funktional außer der konstanten Lösung $f(x) = c_1$ gefunden werden, welches die Bedingung (K2) erfüllt.

7.13 Übersicht

Zur Übersicht eine kurze Tabelle aller Beispiele

Name	Schreibweise	Rang-1-konvex	APS-konvex	K1 inkompress.	K2 kompressibel
Neo-Hooke	$W(F) = \frac{\mu}{2}(I_1 I_3^{-\frac{1}{3}} - 3) + h(I_3)$	Ja	Ja	$b = 0$	Nein
Mooney-Rivlin	$W(F) = \frac{\mu}{2} \left(\alpha (I_1 I_3^{-\frac{1}{3}} - 3) + (1 - \alpha)(I_2 I_3^{-\frac{2}{3}} - 3) \right) + h(I_3)$	Ja	Ja	$b = 1 - \alpha$	Nein
Blatz-Ko	$W(F) = \frac{\mu}{2} \left(I_1 + \frac{2}{\sqrt{I_3}} - 5 \right)$	Ja	Ja	$b = 0$	Ja
Mihai-Neff	$W(F) = \frac{\mu}{2} \left(I_1 I_3^{-\frac{1}{3}} - 3 \right) + \frac{\mu}{4} (I_1 - 3)^2 + \frac{\kappa}{2} \left(I_3^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2$	Nein	Ja	$b = 0$	$\tilde{\mu} = \frac{\mu}{3}$
Knowles	$W(F) = \frac{\mu}{2b} \left(\left[1 + \frac{b}{n} \left(I_1 I_3^{-\frac{1}{3}} - 3 \right) \right]^n - 1 \right) + \frac{1}{D_1} \left(I_3^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2$?	Ja	$b = 0$	Nein
Bazant	$W(F) = \ B - B^{-1}\ ^2$	Nein	Ja	$b = \frac{1}{2}$	Nein
Ciarlet	$W(F) = \frac{c_1}{2} \ F\ ^2 + \frac{c_2}{2} \ \text{Cof} F\ ^2 + h(\det(F))$	Ja	Ja	$b = \frac{c_2}{c_1 + c_2}$	$c_2 = 0$
SVK	$W(F) = \frac{\mu}{4} \ C - \mathbb{1}\ ^2 + \frac{\lambda}{8} \text{tr}(C - \mathbb{1})^2$	Nein	Ja	Nein	-
4. Order	$W(F) = \mu \text{tr}(E^2) + \frac{A}{2} \text{tr}(E^3) + D \text{tr}(E^2)^2$	Nein	Ja	Nein	-
Hencky	$W(F) = \mu \ \text{dev}(\log V)\ ^2 + \frac{\kappa}{2} (\text{tr}(\log V))^2$	Nein	Nein	$b = \frac{1}{2}$	Nein
exp-Hencky	$W(F) = \frac{\mu}{k} e^k \ \text{dev}(\log V)\ ^2 + \frac{\kappa}{2k} e^{k(\text{tr}(\log V))^2}$	Nein	Ja	$b = \frac{1}{2}$	Nein
Martin-Neff	$W(F) = \frac{\ F\ ^3}{\det(F)} + \det(F) \ F^{-1}\ ^3$	Ja	Ja	$b = \frac{1}{2}$	Nein
Modell	$W(F) = c_1 \left((I_1 - 3)^{\frac{3}{2}} + (I_2 - 3)^{\frac{3}{2}} \right) + c_2 \left(I_3^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2$ keine Näherung an die lineare Elastizitätstheorie in $\mathbb{1}$.	Ja	Ja	$b = \frac{1}{2}$	Ja

8 Diskussion

In dieser Arbeit konnten die beiden von Knowles aufgestellten Bedingungen (K1) und (K2) aus den Euler-Lagrange-Gleichungen des Energiefunktionals $W(F)$ hergeleitet werden. Dabei wurde der Zeitpunkt erläutert, ab wann APS-Verformungen eingesetzt werden müssen (vor oder nach der Minimierung), um Bedingungen für die APS-Zulässigkeit zu erhalten. Dieses Verständnis hilft, den Unterschied zwischen Knowles (Vorwärts-Minimierung) und Gao (Rückwärts-Minimierung) Arbeiten zu verstehen.

Die geforderte Elliptizitätsbedingung bei Knowles [10, eq. (19)] konnte durch die neu eingeführte APS-Konvexität identifiziert werden und somit in einen Zusammenhang mit den Begriffen der Polykonvexität und Rang-1-Konvexität gesetzt werden. Da letztere Bedingung aus mathematischer Sicht wünschenswert ist, schränkt die APS-Konvexität die Klasse der Energiefunktionale nicht weiter ein. Das Prüfen von Energiefunktionale auf APS-Konvexität lässt erkennen, dass auch wichtige Funktionale, welche nicht Rang-1-konvex sind, die Bedingung der APS-Konvexität erfüllen.

Zusätzlich wurde aufgezeigt, dass (K1) wider Erwarten von fast allen Energiefunktionalen erfüllt wird und es konnte bewiesen werden, dass dies aus der physikalische sinnvollen Zug-Druck-Symmetrie impliziert wird.

Die Verallgemeinerung auf die kompressiblen APS-Zulässigkeit (K2) scheint für die nichtlineare Elastizitätstheorie eine meist nicht erfüllbare Forderung zu sein. Es gibt keine bekannte Energie, welche von I_2 abhängig ist und die Bedingung (K2) erfüllt. Es kann vermutet werden, dass es kein von I_2 abhängiges Energiefunktional gibt, welches physikalisch sinnvolle Bedingungen²⁷ erfüllt und APS-zulässig ist.

²⁷Zug-Druck-Symmetrie, spannungsfreie Referenzkonfiguration und Konsistenz zur linearen Theorie.

Literatur

- [1] S. S. Antman, J. E. Marsden und L. Sirovich. *Nonlinear Problems of Elasticity*. 2. Aufl. New York: Springer, 2005.
- [2] J. M. Ball. „Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity“. *Archive for rational mechanics and Analysis* 63.4 (1976), S. 337–403.
- [3] M. Carroll und F. Rooney. „Implications of Shield’s inverse deformation theorem for compressible finite elasticity“. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 56.6 (2005), S. 1048–1060.
- [4] D. Y. Gao. „Remarks on Anti-Plane Shear Problem and Ellipticity Condition in Finite Elasticity“. *arXiv preprint arXiv:1507.08748* (2015).
- [5] D. Y. Gao. „Duality in G. Saccomandi’s Challenge on Analytical Solutions to Anti-plane Shear Problem in Finite Elasticity“. *arXiv preprint arXiv:1511.03374* (2015).
- [6] J. M. Hill. „Generalized shear deformations for isotropic incompressible hyperelastic materials“. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics* 20.02 (1977), S. 129–141.
- [7] C. Horgan. „Anti-plane shear deformations in linear and nonlinear solid mechanics“. *SIAM review* 37.1 (1995), S. 53–81.
- [8] C. Horgan. „Remarks on ellipticity for the generalized Blatz-Ko constitutive model for a compressible nonlinearly elastic solid“. *Journal of elasticity* 42.2 (1996), S. 165–176.
- [9] J. K. Knowles. „On finite anti-plane shear for incompressible elastic materials“. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics* 19.04 (1976), S. 400–415.
- [10] J. K. Knowles. „A note on anti-plane shear for compressible materials in finite elastostatics“. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics* 20.01 (1977), S. 1–7.
- [11] J. K. Knowles. „The finite anti-plane shear field near the tip of a crack for a class of incompressible elastic solids“. *International Journal of Fracture* 13.5 (1977), S. 611–639.
- [12] L. A. Mihai und P. Neff. „Hyperelastic bodies under homogeneous Cauchy stress induced by non-homogeneous finite deformations“. *arXiv preprint arXiv:1608.05040* (2016).
- [13] I. Münch und P. Neff. „Rotational invariance conditions in elasticity, gradient elasticity and its connection to isotropy“. *Mathematics and Mechanics of Solids* (2016), S. 1081286516666134.
- [14] P. Neff. „Variationsrechnung und Soboloevräume“. Essen, 2015.
- [15] P. Neff, I.-D. Ghiba und J. Lankeit. „The exponentiated Hencky-logarithmic strain energy. Part I: constitutive issues and rank-one convexity“. *Journal of Elasticity* 121.2 (2015), S. 143–234.
- [16] E. Pucci und G. Saccomandi. „The Anti-Plane Shear Problem in Nonlinear Elasticity Revisited“. *Journal of Elasticity* 113.2 (2013), S. 167–177.
- [17] C. Thiel. „Neue Matrix-Ungleichungen und Anwendungen auf konstitutive Beziehungen in der nichtlinearen Elastizitätstheorie“. Diss. Essen: University Duisburg-Essen, 2016.