

Satz von Picard-Lindelöf

1.3 Der fundamentale Existenz- und Eindeutigkeitsatz

Wir haben in den Übungen gesehen, ganze Klassen von AWP, wie

$$\begin{cases} y'(t) = a \cdot y(t) + s(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} y''(t) = a \cdot y'(t) + b \cdot y(t) + s(t) \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

mit $a, b, t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $s, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ haben eine eindeutige Lösung. Betrachten wir erst einmal nur DGLs erster Ordnung, fragen wir uns, hat das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

grundsätzlich immer eine eindeutige Lösung? Nein! Schauen wir uns $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}$ mit $y(0) = 0$ an. Leicht ist zu sehen, dass sowohl $y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, als auch

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-a)^2 & \text{für } x \geq a \\ 0 & \text{für } x < a \end{cases}$$

für jedes $a \geq 0$ eine Lösung darstellt, denn es gilt sowohl $y(a) = 0$, als auch

$$y'(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-a) = \sqrt{\frac{1}{4}(x-a)^2} & \text{für } x > a \\ 0 & \text{für } x < a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}(a+h-a)^2 - \frac{1}{4}(a-a)^2}{h} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}h = 0 & \text{für } x = a. \end{cases}$$

Nehmen wir ein anderes AWP. Was ist z. B. mit $y'(t) = y(t)^2$ mit $y(0) = 1$? Hier ist $y(t) = \frac{1}{1-t} \quad \forall t < 1$ eine Lösung. Die Lösung existiert nicht auf ganz $\mathbb{R}$. Ist sie auf $(-\infty, 0)$ überhaupt eindeutig?

Um diese Frage einfach zu klären, erarbeiten wir uns zunächst einen Satz, dessen Anwendung ein mächtiges Werkzeug ist und die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen auf ein prägnantes Kriterium zurückführt.

dass x ein Fixpunkt ist. Erinnern wir uns:

$$x_n \text{ ist eine Cauchyfolge} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

Betrachten wir z. B.

$$\|x_8 - x_5\| = \|x_8 - x_7 + x_7 - x_6 + x_6 - x_5\| \leq \|x_8 - x_7\| + \|x_7 - x_6\| + \|x_6 - x_5\|$$

und

$$\begin{aligned} \|x_8 - x_7\| &= \|f(x_7) - f(x_6)\| \\ &\leq L \cdot \|x_7 - x_6\| = L \cdot \|f(x_6) - f(x_5)\| \\ &\leq L^2 \cdot \|x_6 - x_5\| = L \cdot \|f(x_5) - f(x_4)\| \\ &\vdots \\ &\leq L^7 \cdot \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

So können wir die Differenz von x_m und x_n auf die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder zurückführen und diese wegen $\|x_k - x_{k-1}\| \leq L^{k-1} \cdot \|x_1 - x_0\|$ (Beweis leicht per Induktion) auf die Differenz von x_1 und x_0 zurückführen. Insgesamt ergibt sich für o. B. d. A. $m > n$

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &= \left\| \sum_{k=n+1}^m (x_k - x_{k-1}) \right\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k - x_{k-1}\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m L^{k-1} \|x_1 - x_0\| \\ &= \|x_1 - x_0\| \cdot \left(\sum_{k=1}^m L^{k-1} - \sum_{k=1}^n L^{k-1} \right) \\ &= \|x_1 - x_0\| \cdot \left(\frac{1 - L^m}{1 - L} - \frac{1 - L^n}{1 - L} \right) \\ &= \|x_1 - x_0\| \cdot \frac{L^n - L^m}{1 - L} \\ &\leq \|x_1 - x_0\| \cdot \frac{L^n}{1 - L} \end{aligned}$$

Dies bedeutet, da $\|x_1 - x_0\| \cdot \frac{L^n}{1-L} < \varepsilon$ äquivalent zu $L^n \leq \frac{1-L}{\|x_1 - x_0\|} \cdot \varepsilon$ ist und dies (wegen $0 \leq L < 1$) äquivalent zu $n > \frac{\log(\varepsilon(1-L)\|x_1 - x_0\|^{-1})}{\log L}$, können wir z. B. wählen

$$n_0 := \left\lceil \frac{\log(\varepsilon(1-L)\|x_1 - x_0\|^{-1})}{\log L} \right\rceil + 1$$

wählen. So folgt aus $m \geq n \geq n_0$ dann $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$, also ist x_n eine Cauchyfolge.

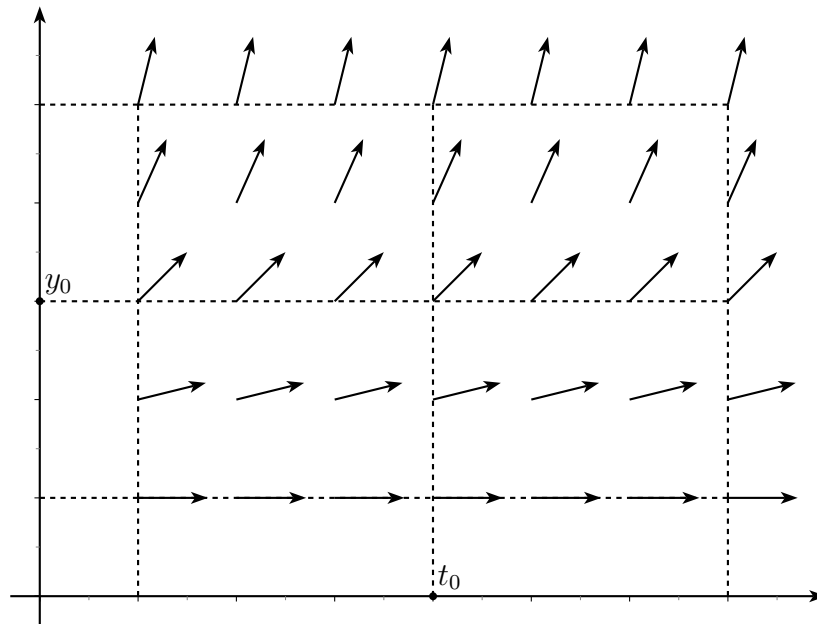
Eindeutigkeit eines Fixpunktes $x \in M$:

Seien x und $\tilde{x}$ Fixpunkte mit $x \neq \tilde{x}$. Es gilt $f(x) = x$ und $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$, aber auch $\|x - \tilde{x}\| = \|f(x) - f(\tilde{x})\| \leq L \cdot \|x - \tilde{x}\|$, somit $1 \leq L$, ein Widerspruch zu $L \in [0, 1)$. $\square$

Nun widmen wir uns

1.3.2 Satz von Picard-Lindelöf

Kommen wir nochmal auf unser Beispiel $y'(t) = y(t)^2$, $y(0) = 1$ zurück. Wir können uns zur Visualisierung auf einem Rechteck um den Anfangswert Richtungspfeile für $f(t, y)$ in ein Diagramm, ein Richtungsfeld, einzeichnen.



Eine Lösung „verläuft“ entlang der Pfeile, der Graph wird nie steiler sein als das Maximum aller Pfeilsteigungen. Diesen Gedanken greifen wir nun auf.

Satz Seien $J_0, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $t_0 \in J_0$, $y(t) \in J$ für alle $t \in J$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dazu sei ein AWP

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

mit $t_0 \in J_0$, $y_0 \in J$ und eine stetige Funktion $f: J_0 \times J \rightarrow J$ gegeben. f sei sogar im zweiten Argument Lipschitz-stetig, das heißt es existiert ein $L > 0$ mit

$$\|f(t, \tilde{y}) - f(t, \hat{y})\|_2 \leq L \cdot \|\tilde{y} - \hat{y}\|_2 \quad \forall t \in J_0, \tilde{y}, \hat{y} \in J.$$

Definieren wir das Rechteck

$$R := [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

und sei

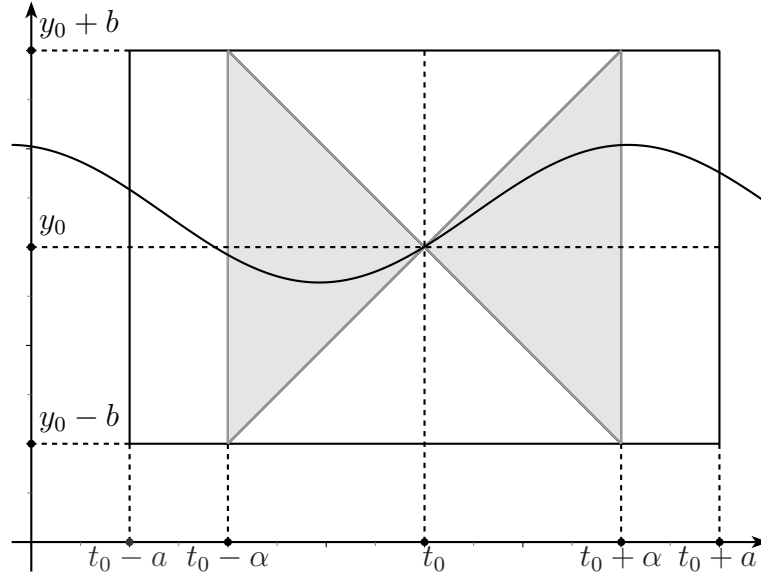
$$M := \max \{ \|f(t, y)\| \mid (t, y) \in R \}$$

und

$$\alpha := \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} .$$

Dann hat das AWP $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ eine Lösung, die auf ganz J_0 eindeutig ist.

Beweis. Eine Skizze liefert uns



Wir können erkennen, ist $\|f(t, y)\|$ durch M beschränkt, verläuft eine Lösung wegen $\|y'(t)\| \leq M$ innerhalb des grau hinterlegten trichterförmigen Bereichs, eben weil

$$y(t) - Mh \leq y(t_0 + h) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+h} y'(\tau) d\tau \leq y(t_0) + Mh$$

gilt. Nun betrachten wir die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Rechteck als

$$\mathcal{A} := \{\varphi; \varphi: [t_0 - a; t_0 + a] \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b]\}$$

und zeigen, dass es innerhalb des Rechtecks (hierbei schränken wir noch ein wenig ein) genau eine Funktion y gibt, die das AWP löst, anschließend vervollständigen wir diese Lösung soweit dies geht auf ganz J_0 .

Zunächst definieren wir die Abbildung Φ , die jeweils ein Element aus $\mathcal{A}$ (also jeweils eine Funktion auf dem Rechteck) auf ein Element aus $\mathcal{A}$ abbildet:

$$\Phi: \varphi \mapsto \left\{ t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \right\} .$$

Es ist $\Phi(\varphi) \in [y_0 - b, y_0 + b]$ wegen

$$\begin{aligned} \|\Phi(\varphi)(t) - y_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq \left\| \int_{t_0}^t M \cdot 1 d\tau \right\| = M \cdot |t - t_0| \leq M \cdot \alpha \leq b \quad \forall t \in J_0 . \end{aligned}$$

So ist Φ auf ganz $\mathcal{A}$ definiert, also wohldefiniert.

Wofür ist Φ nun gut?

Behauptung: y ist Fixpunkt von $\Phi \Leftrightarrow y$ ist Lösung des AWP

Beweis.

„ $\Leftarrow$ “:

$$\begin{aligned}\Phi(y)(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) \, d\tau \\ &= y_0 + \int_{t_0}^t y'(\tau) \, d\tau = y_0 + y(t) - y(t_0) = y(t)\end{aligned}$$

„ $\Rightarrow$ “:

$$\begin{aligned}\Phi(y) &= y \\ \Leftrightarrow y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) \, d\tau \\ \Rightarrow \begin{cases} y'(t) = \frac{d}{dt} \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) \, d\tau \right) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}\end{aligned}$$

//

Wir wissen also:

Hat nun Φ einen eindeutigen Fixpunkt, so hat das AWP eine eindeutige Lösung.

Behauptung: Φ hat auf

$$\{\varphi; \varphi: [t_0 - \xi, t_0 + \xi] \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq \mathcal{A}\}$$

einen eindeutigen Fixpunkt

Beweis.

Φ ist Selbstabbildung.

Wir müssen nur noch zeigen, dass Φ eine Lipschitz-stetige Abbildung mit Lipschitz-Konstante $K \in [0, 1)$ ist, dann folgt die Existenz und Eindeutigkeit mit dem Banach'schen Fixpunktsatz.

Zu zeigen also

$$\|\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)\|_\infty \leq K \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty$$

auf $[t_0 - \xi, t_0 + \xi] \subseteq [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Bemerkung:

Dass wir die Konvergenz nicht auf $\mathcal{A}$, sondern auf einer Einschränkung zeigen, wird sich im Laufe des Folgenden aufklären. Wir verwenden nun Normen auf drei verschiedenen Ebenen:

Der durch die Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ induzierte Abstand zweier Funktionen als größten Abstand bezüglich der Norm der Funktionswerte $\|\cdot\|_2$ (hier aus $J \subseteq \mathbb{R}$, allgemein aus

$J \subseteq \mathbb{R}^n$) an einer beliebigen Stelle $t \in J_0$. Der Abstand zweier Zeitpunkte wird mit der Betragsnorm gemessen. Es ist

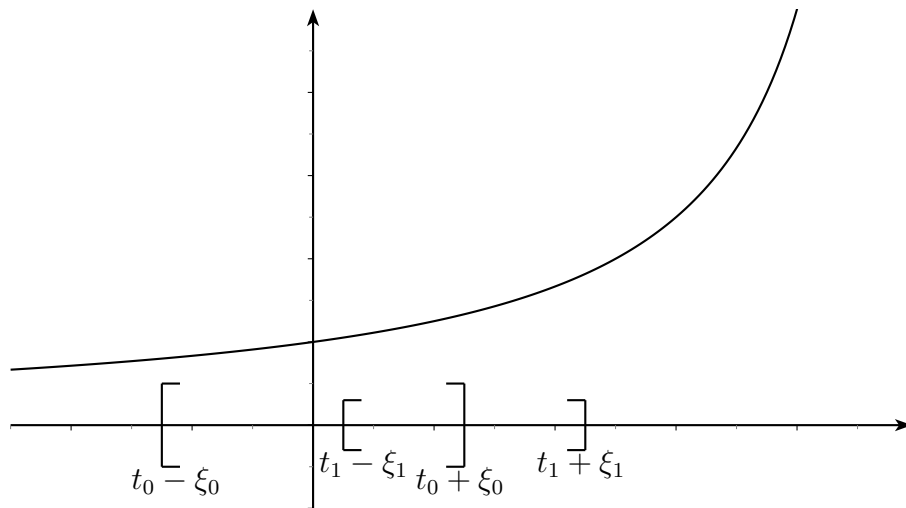
$$\begin{aligned}
\|\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)\|_\infty &= \sup_{t \in [t_0 - \xi, t_0 + \xi]} \left\| y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) \, d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, \psi(\tau)) \, d\tau \right\|_2 \\
&= \sup_{t \in [t_0 - \xi, t_0 + \xi]} \left\| \int_{t_0}^t (f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))) \, d\tau \right\|_2 \\
&\leq \sup_{t \in [t_0 - \xi, t_0 + \xi]} \|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\|_2 \cdot \sup_{t \in [t_0 - \xi, t_0 + \xi]} \left\| \int_{t_0}^t d\tau \right\| \\
&\leq L \cdot \sup_{t \in [t_0 - \xi, t_0 + \xi]} \|\varphi(t) - \psi(t)\|_2 \cdot \xi \\
&\leq L\xi \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty .
\end{aligned}$$

Für $0 \leq L\xi < 1$, also $0 \leq \xi < \min \left\{ \alpha, \frac{1}{L} \right\}$ ist nun Φ eine Lipschitz-stetige Selbstabbildung. //

Starten wir mit unserer Argumentation bei t_0 :

Es gibt ξ_0 , sodass die Lösung auf $[t_0 - \xi_0, t_0 + \xi_0]$ existiert und eindeutig ist. Für $t_1 := t_0 + \xi_0$ existiert wieder ξ_1 , sodass die Lösung auf $[t_1 - \xi_1, t_1 + \xi_1]$ existiert und eindeutig ist. Solange y stetig ist, können wir das „Argumentationsintervall“ zusammenstückeln.

So zeigt sich z.B. für $y'(t) = y(t)^2$, $y(0) = 1$ die eindeutige Lösung $y(t) = \frac{1}{1-t}$ auf $t \in (-\infty, 1)$, d. h. das Intervall ist nicht zwingend abgeschlossen.



□

Jedes Differentialgleichungssystem mit Differentialgleichungen endlicher Ordnung lässt sich als $y'(t) = f(t, y(t))$ mit $t \in J_0 \subset \mathbb{R}$, $y(t) \in J \subset \mathbb{R}^n$ schreiben.

Als Beispiel haben wir bereits lineare DGLs zweiter Ordnung

$$x''(t) = ax'(t) + bx(t) + s(t)$$

gesehen. Angedeutet war schon hier durch den Anfangswert $v(t_0) = x'(t_0)$, dass wir $x'(t)$ durch $v(t)$ ausdrücken können und somit zwei DGLs

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = av(t) + bx(t) + s(t) \end{cases}$$

erhalten. Haben wir nun ein solches System von Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) \\ x_2'(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) \end{aligned}$$

gegeben, so lässt sich durch $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n = J$ und $f(t, x) := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) \in \mathbb{R}^n$

eine mehrdimensionale DGL $x'(t) = f(t, x(t))$ gewinnen. Für obiges Beispiel erhalten wir nebenbei

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Korollar *Der Satz lässt sich genauso gut für $J \subset \mathbb{R}^n$ formulieren, unsere Definition für R wird zu $R := [t_0 - a, t_0 + a] \times \{y; \|y - y_0\| \leq b\}$, und wir verlieren die Anschauung, ansonsten führen wir den Beweis identisch zur obigen eindimensionalen Variante.*