

BIBLIOGRAPHIE

- [A] A. AUSLENDER - Optimisation - Méthodes numériques Masson (1976).
- J. ABADIE - Integer and non linear programming. North - Holland, american elsevier.
- [B] G. BOUCHITTE - [1] Maximale monotonie et pseudomonotonie renforcées de l'opérateur de Nemickii associé au sous-différentiel d'une intégrande convexe normale Montpellier (78) - n° 8.
- [2] Approximation de Galerkin des problèmes convexes du calcul des variations dans les espaces de type Sobolev-Orlicz. Montpellier (79) n° 7.
- [3] Approximation interne de problèmes convexes du calcul des variations dans les espaces de type Sobolev-Orlicz : éléments finis et intégration numérique. Montpellier (79) n° 9.
- J. CEA - Optimisation - Théorie et algorithmes Dunod (71).
- B. MARTINET - Algorithmes pour la résolution de problèmes d'optimisation et de minima - Thèse Grenoble (1972).
- J.R. RICE - Approximation des fonctions - Théorie linéaire DUNOD (1969).
- [S] M. SIBONY - Sur l'approximation d'équations et d'inéquations aux dérivées partielles non linéaires de type monotone - Thèse Paris (1969).
- G.STRANG - G. FIX - An analysis of the finite element method - Prentice Hall, Inc.
- [J] C. JOURON - Approximation par la méthode des éléments finis des solutions généralisées du problème des surfaces-minima. Séminaire Ciarlet - Glowinski - Raviart (PARIS 6e ; 1974-1975).
- [L] J.L. LIONS - Cours d'Analyse Numérique (X) - Hermann).

SEMINAIRE D'ANALYSE CONVEXE

Montpellier 1979 , Exposé n° 12

LOIS D'ELASTICITE EN GRANDE DEFORMATION

J.J. MOREAU

O. INTRODUCTION

Le sujet de ce rapport est très classique (cf., par exemple [1], [2], [3]). L'auteur a éprouvé le besoin d'une nouvelle élaboration pour mettre en lumière un réseau d'implications combinant de diverses manières quatre assertions usuelles (les deux premières sont des principes de la mécanique classique, les deux autres des hypothèses faites éventuellement dans les cas d'espèces) :

1° Le principe des efforts intérieurs, appelé aussi troisième loi de Newton bien que, sous sa forme originelle, ladite loi n'en constitue qu'un aspect très rudimentaire. Il est présenté dans [6] comme une systématisation du "principe d'action et de réaction" ; dans [1] il est intitulé "axiome des puissances virtuelles". Son émergence dans le contexte présent est la symétrie du tenseur de contrainte de Cauchy en chaque point du milieu élastique.

Reçu le 21 juin 1979

2° Le principe d'objectivité (ou d'indifférence matérielle) selon lequel la relation contrainte - déformation, en chaque point du milieu élastique, est indépendante du choix d'un repère.

3° L'existence éventuelle d'une fonction énergie élastique pour le type d'évolution considéré (aucune allusion n'est faite dans ce rapport à la thermodynamique : cela n'aurait pu qu'obscurcir le sujet ; telle est aussi, en dépit du titre, l'attitude adoptée dans [8]).

4° L'assertion éventuelle d'isotropie de la relation contrainte-déformation.

Seule cette dernière assertion est subordonnée au choix d'un état de référence du milieu élastique. Comme cette assertion n'apparaît que dans les 3 derniers paragraphes du rapport, il a paru essentiel de développer les 7 premiers dans le cadre suivant : on abandonne la pratique usuelle définissant toute position éventuelle du milieu continu, relativement au repère choisi, par le champ des déplacements que ses diverses particules présentent lorsque le milieu atteint cette position en partant d'une certaine position de référence. Cette pratique revient à indexer chaque particule par les coordonnées de la position qu'elle a dans ledit état de référence. Dans les problèmes d'espace, la référence à une telle position privilégiée s'impose souvent comme le mode de calcul le plus simple mais, au niveau de préoccupation qui est ici le nôtre, elle obscurcit gravement le sujet. L'écriture d'équations de la statique ou de la dynamique du milieu en utilisant l'indexage en question amène en effet à faire usage de la structure euclidienne de l'espace au sein duquel la configuration de référence constitue un plongement du milieu

(par exemple si l'on invoque des opérateurs "divergence" ou "gradient" relatifs à cet espace) et, consciemment ou non, à transporter sur le milieu lui-même ladite structure. C'est ce qu'on fait par exemple lorsqu'on prétend décrire l'état local de déformation du milieu au moyen du tenseur de Green-Lagrange ; le tenseur d'Almansi-Euler, au contraire, est exempt de ce vice ([1] concilie la terminologie traditionnelle avec une vue correcte de la situation en présentant les deux tenseurs en question comme associés non pas à une configuration du milieu mais à son évolution entre deux instants spécifiés).

Le milieu matériel, ensemble Λ dont les éléments sont appelés particules, est donc seulement muni d'une structure de variété C_1 - différentiable, sans métrique. Sont déclarés admissibles les positions (conformément à la terminologie actuelle, nous dirons plutôt placements) du milieu, par rapport au repère $\mathcal{R}$, qui consistent en des C_1 - difféomorphismes de la variété Λ dans l'espace affine euclidien $\mathcal{R}$. Ces assertions constituent les axiomes géométriques de la théorie des milieux continus du premier ordre. Tel était déjà le point de vue de l'auteur dans [11] (communication résumant un mémoire de D.E.S. de 1945, consacré à la cinématique des fluides) ; tel est aussi le choix de W. NOLL [4] et celui de P. ROUGEE [5]. Ce dernier, pour l'axiomatisation de tout chapitre de physique, préconise l'usage de structures mathématiques les plus pauvres possibles, plutôt que d'employer des structures surabondantes, accompagnées de ces "principes d'invariance" dont les physiciens sont friands. L'auteur estime pour sa part que l'étape à structures surabondantes et principes d'invariance représente une phase heuristique dans l'élaboration des théories physiques : c'est

sans doute la phase la plus vivante et l'enthousiasme pour les principes d'invariance s'explique par là.

A toute particule $\lambda \in \Lambda$ s'associe l'espace vectoriel T_λ , tangent en ce point à la variété Λ et son dual T_λ^* , espace cotangent. A l'espace euclidien affine que constitue le repère $\mathcal{R}$ s'associe par ailleurs son espace vectoriel V , euclidien, identifié à son dual. De là divers "tenseurs du second ordre" qui, selon les cas, seront des applications linéaires de T_λ dans T_λ^* , de T_λ^* dans T_λ , de V dans V (toutes susceptibles d'être "symétriques", c'est-à-dire autoadjointes) ou bien encore des applications linéaires de T_λ dans V , de V dans T_λ^* , etc... (pour lesquelles l'assertion de symétrie n'a pas de sens). Naturellement, dès que des bases seront choisies dans les espaces vectoriels concernés, ces applications linéaires seront représentées par des matrices et on rejoindra l'écriture des exposés traditionnels. Du point de vue pédagogique, au niveau d'un enseignement de second cycle d'Université ou d'Ecole d'Ingénieurs l'auteur croit qu'il sera plus sage d'en rester à cette présentation matricielle, malgré son opacité axiomatique.

Les résultats les plus originaux du présent rapport apparaissent dans les paragraphes terminaux, consacrés à l'isotropie matérielle. Y trouve notamment sa place une caractérisation donnée par C. VALLEE [10] pour les lois d'élasticité isotropes possédant une fonction énergie. La démonstration donnée par cet auteur était un peu courte, et nous la commentons ci-après p.54. Il nous a semblé utile de consacrer une longue Annexe du présent rapport à la différentiation des fonctions réelles isotropes sur l'espace $\mathcal{L}_S$ des endomorphismes autoadjoints d'un espace vec-

toriel euclidien. Notre intérêt pour cette question a été directement suscité par le travail de VALLEE.

L'Annexe mathématique en question n'est nullement exhaustive ; on n'y trouve notamment pas trace du théorème de Rivlin et Ericksen selon lequel une application $\mathfrak{E}$ de $\mathcal{L}_S$ dans lui-même est isotrope si et seulement si elle a la forme

$$\mathfrak{E}(S) = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i(S) S^i$$

où les $\eta_i(S)$ sont des fonctions scalaires isotropes de $S \in \mathcal{L}_S$ (on en trouvera une démonstration dans [7]).

On notera que, partout dans ce rapport, le concept d'isotropie est pris dans son sens faible d'invariance par le groupe orthogonal direct : il se trouve en effet que, si la dimension n est impaire cette hypothèse faible suffit pour les implications souhaitées.

Observer enfin que ce rapport devra être complété par des développements parallèles concernant les milieux élastiques incompressibles.

1. NOTATIONS

Tous les espaces vectoriels considérés sont réels et de dimension finie. Si V et W sont deux tels espaces, on note $\mathcal{L}(V, W)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de V dans W . Le dual de cet espace vectoriel sera identifié à $\mathcal{L}(W, V)$, grâce à la forme bilinéaire définie pour tout $A \in \mathcal{L}(V, W)$ et tout $B \in \mathcal{L}(W, V)$ par

$$(1.1) \quad \langle A, B \rangle = \text{tr } AB = \text{tr } BA.$$

Si V et W sont de même dimension et orientés, on note $\mathcal{L}_+(V, W)$ l'ensemble des applications linéaires strictement positives (donc inversibles) de V dans W .

On note V^* et W^* les duaux respectifs de V et W ; les formes bilinéaires correspondant aux diverses dualités sont toutes notées $\langle \cdot, \cdot \rangle$; pour tout $A \in \mathcal{L}(V, W)$, l'adjoint A^* est un élément de $\mathcal{L}(W^*, V^*)$.

Pour $A \in \mathcal{L}(V, V^*)$, l'adjoint A^* est un élément de $\mathcal{L}(V^{**}, V^*) = \mathcal{L}(V, V^*)$; alors on note $\mathcal{L}_s(V, V^*)$ l'ensemble des $A \in \mathcal{L}(V, V^*)$ qui sont autoadjoints (on dit aussi symétriques). C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V, V^*)$. Un $A \in \mathcal{L}(V, V^*)$ est dans $\mathcal{L}_s(V, V^*)$ si et seulement si la forme bilinéaire définie pour tout x et tout y dans V par

$$(x, y) \mapsto \langle x, Ay \rangle = \langle y, A^* x \rangle$$

est symétrique. On note $\mathcal{L}_s^{++}(V, V^*)$ le sous-ensemble (conique convexe ouvert) de $\mathcal{L}_s(V, V^*)$ constitué par les A autoadjoints définis positifs, ce qui signifie que la forme quadratique $x \mapsto \langle x, Ax \rangle$ est définie positive sur V .

Si l'espace vectoriel V est muni d'un produit scalaire euclidien (noté $\cdot, \cdot$), on identifie V et V^* , d'où la définition de $\mathcal{L}_s(V, V)$ et $\mathcal{L}_s^{++}(V, V)$. [Dans ce cas où $V = V^*$, ne pas confondre la forme bilinéaire (symétrique et régulière) $\langle A, B \rangle = \text{tr } AB$ avec le produit scalaire euclidien dont est classiquement muni $\mathcal{L}(V, V)$, à savoir $A : B = \text{tr } A^* B$ (mais les deux coïncident, bien sûr, si A et B sont dans $\mathcal{L}_s(V, V)$).]

2. GEOMETRIE

Un repère $\mathcal{R}$ est choisi pour toute la suite. Conformément à l'axiomatique usuelle de la cinématique classique, $\mathcal{R}$ est un espace affine euclidien de dimension n (dans la majorité des applications $n = 3$, mais il est utile parfois de faire $n = 2$). Soit V l'espace vectoriel euclidien associé, toujours identifié à son dual.

Le milieu continu considéré est un ensemble Λ dont les éléments sont appelés particules.

Un placement p de Λ dans $\mathcal{R}$ est une application injective $p : \Lambda \rightarrow \mathcal{R}$.

HYPOTHESE H_1 . On se restreint dans toute la suite à une classe de placements possédant la propriété suivante : quels que soient p et p' dans cette classe, les images $p(\Lambda)$ et $p'(\Lambda)$ sont des sous-variétés C_1 - différentiables de $\mathcal{R}$ et le "dé-placement" $p' \circ p^{-1}$ est un C_1 - difféomorphisme de $p(\Lambda)$ sur $p'(\Lambda)$.

Cette hypothèse est banalement équivalente à ceci :

Il existe sur l'ensemble Λ une structure de variété C_1 - différentiable telle que tous les placements considérés sont des C_1 - difféomorphismes de Λ dans $\mathcal{R}$. Désormais Λ sera muni de cette structure, dont la dimension est au plus n . On ne suppose pas dès l'abord que cette dimension soit exactement n ; on va donc obtenir quelques résultats s'appliquant en particulier à un milieu continu à une ou deux dimensions (ligne ou surface matérielle).

Soit T_λ l'espace vectoriel tangent au point λ de Λ ; on note $F_\lambda : T_\lambda \rightarrow V$ l'application linéaire tangente à p au point λ

(injective d'après l'hypothèse).

On appellera métrique du milieu Λ dans le placement p , ou simplement métrique du placement p , l'information permettant, pour tout arc de courbe différentiable C dans Λ , le calcul de la longueur euclidienne de l'image $p(C)$.

Si $r \mapsto \lambda(r)$, $r \in [r_1, r_2]$, est une représentation paramétrique de C , le vecteur dérivée $\frac{d\lambda}{dr}$ est, pour chaque r , un élément de $T_{\lambda(r)}$ et

$$\frac{d}{dr} p(\lambda(r)) = F_{\lambda(r)} \frac{d\lambda}{dr}.$$

La longueur euclidienne de $p(C)$ s'écrit

$$\int_{r_1}^{r_2} \left| \frac{d}{dr} p(\lambda(r)) \right| dr.$$

Puisque V est identifié à son dual, la transposée de $F_{\lambda} \in \mathcal{L}(T_{\lambda}, V)$ est un élément F_{λ}^* de $\mathcal{L}(V, T_{\lambda}^*)$, T_{λ}^* désignant l'espace cotangent à Λ au point λ . Alors

$$(2.1) \quad \left| \frac{d}{dr} p(\lambda(r)) \right|^2 = (F_{\lambda} \frac{d\lambda}{dr}) \cdot (F_{\lambda} \frac{d\lambda}{dr}) = \langle F_{\lambda}^* F_{\lambda} \frac{d\lambda}{dr}, \frac{d\lambda}{dr} \rangle$$

où on note $\cdot$ le produit scalaire euclidien de V . On note

$$(2.2) \quad F_{\lambda}^* F_{\lambda} = C_{\lambda} : T_{\lambda} \rightarrow T_{\lambda}^*.$$

On dira que C_{λ} est le tenseur métrique du placement p au point λ de Λ ; c'est un élément de $\mathcal{L}(T_{\lambda}, T_{\lambda}^*)$ autoadjoint défini positif.

Si p et p^* sont deux placements de Λ , F_{λ} et F_{λ}^* leurs applications linéaires tangentes, il ressort de (2.1) que la condition

$$(2.3) \quad \forall \lambda \in \Lambda : F_{\lambda}^* F_{\lambda} = F_{\lambda}^* F_{\lambda}$$

est nécessaire et suffisante pour que toute courbe C de Λ ait des images $p(C)$ et $p^*(C)$ de même longueur. Cette condition est donc

nécessaire et suffisante pour que le déplacement $p^* \circ p^{-1}$ soit une isométrie de $p(\Lambda)$ sur $p^*(\Lambda)$.

Cas d'un milieu de dimension maximale

Si $\dim \Lambda = n$ les $F_{\lambda} \in \mathcal{L}(T_{\lambda}, V)$ sont bijectives. On fait alors une hypothèse supplémentaire :

HYPOTHESE H_2 : Si $\dim \Lambda = n$, on se restreint dans toute la suite à une classe de placements possédant la propriété suivante : quels que soient p et p^* dans cette classe, les isomorphismes $F_{\lambda}^* F_{\lambda}^{-1} : V \rightarrow V$ sont de déterminants positifs.

Cette hypothèse équivaut banalement à ceci : il existe une orientation de l'espace affine $\mathbb{R}$ et une orientation de la variété Λ telles que tous les placements considérés soient des difféomorphismes positifs⁽¹⁾. Les espaces vectoriels V et T_{λ} seront munis des orientations associées et alors

$$\forall \lambda \in \Lambda : F_{\lambda} \in \mathcal{L}_+(T_{\lambda}, V).$$

Reprenons dans ce cas la condition (2.3), c'est-à-dire, en notant $C_{\lambda}^* = F_{\lambda}^* F_{\lambda}^*$,

$$(2.4) \quad \forall \lambda \in \Lambda : C_{\lambda}^* = C_{\lambda}.$$

Elle est nécessaire et suffisante pour que $p^* \circ p^{-1}$ soit une isométrie positive de $p(\Lambda)$ sur $p^*(\Lambda)$; vu que la dimension est maximale, cela équivaut à l'existence pour chaque composante connexe de Λ d'une isométrie directe j de $\mathbb{R}$ telle que, en restriction à cette composante

(1) Naturellement on peut changer simultanément ces deux orientations en leurs opposées : en traduisant sous cette forme l'Hypothèse H_2 nous sommes donc en contradiction avec notre parti d'éviter les structures surabondantes ; la simplicité nous paraît justifier ce recul.

connexe, on ait $p' = \mathcal{J}_* p$.

De même l'égalité $C_\lambda^i = C_\lambda$ pour un $\lambda \in \Lambda$ équivaut à l'existence d'une isométrie vectorielle directe R de l'espace vectoriel euclidien V telle que $F_\lambda^i = R F_\lambda$; si (2.4) a lieu, R est indépendant de λ dans chaque composante connexe de Λ .

3. CINEMATIQUE

Un mouvement de Λ par rapport au repère R est une chaîne de placements $t \mapsto p_t$, indexée par le réel $t \in I$ (I : intervalle de temps). On écrira indifféremment $p_t(\lambda)$ ou $p(t, \lambda)$ pour l'image ou position de la particule λ dans le placement p_t .

Si la dérivée partielle $\frac{\partial p}{\partial t}(t, \lambda) \in V$ existe, ce vecteur, noté $\dot{p}_t(\lambda)$ ou $\dot{p}(t, \lambda)$, constitue la vitesse de la particule λ relativement à R à l'instant t .

De son côté, l'application linéaire tangente à p_t au point λ , soit $F(t, \lambda) \in \mathcal{L}(T_\lambda, V)$, constitue la dérivée partielle $\frac{\partial p}{\partial \lambda}(t, \lambda)$. Si l'application $t \mapsto F(t, \lambda)$ de I dans $\mathcal{L}(T_\lambda, V)$ possède une dérivée on pourra noter cette dérivée $\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial \lambda}$. De même si l'application $\lambda \mapsto \dot{p}(t, \lambda)$ de Λ dans V possède une application linéaire tangente, on pourra noter $\frac{\partial^2 p}{\partial \lambda \partial t}$ cet élément de $\mathcal{L}(T_\lambda, V)$. Usuellement $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$ commutent: la condition suffisante classique est que les applications $(t, \lambda) \mapsto \frac{\partial^2 p}{\partial \lambda \partial t}$ et $(t, \lambda) \mapsto \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial \lambda}$ (à valeurs dans un fibré évident) soient continues au point considéré. On suppose dans toute la suite:

HYPOTHESE H_3 . Pour tout $t \in I$ et tout $\lambda \in \Lambda$ les dérivées $\frac{\partial F}{\partial t}$ et $\frac{\partial \dot{p}}{\partial \lambda}$ existent et sont égales; on notera $\dot{F}(t, \lambda) \in \mathcal{L}(T_\lambda, V)$ leur valeur

commune:

$$(3.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} F(t, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \dot{p}(t, \lambda) = \dot{F}(t, \lambda).$$

Par ailleurs, si $t \in I$ et $x \in R$ sont tels que $x \in p_t(\Lambda)$ on définit

$$u(t, x) = \dot{p}_t(p_t^{-1}(x)).$$

Le champ vectoriel

$$u_t = \dot{p}_t \circ p_t^{-1} : p_t(\Lambda) \rightarrow V$$

est le champ eulérien des vitesses du milieu continu, relativement à R , à l'instant t .

Limitons-nous d'abord au cas où la dimension de Λ a la valeur maximale n . Le tenseur gradient G de ce champ vectoriel au point $x \in p_t(\Lambda)$, soit

$$G = \frac{\partial u_t}{\partial x} \in \mathcal{L}(V, V)$$

peut, vu (3.1), s'exprimer sous la forme

$$(3.2) \quad G = \frac{\partial \dot{p}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \dot{F} F^{-1}.$$

Pour une particule choisie $\lambda \in \Lambda$, soit ℓ un élément de T_λ indépendant de t . Son image par l'application tangente à p_t , soit

$$a(t) = F(t, \lambda) \ell$$

est un élément de V dépendant de t , ou vecteur mobile dans V , qu'on déclare être transporté par le milieu continu (on est naturellement amené à le visualiser pour chaque $t \in I$ comme un vecteur lié, en l'attachant au point $p_t(\lambda)$ de R). La dérivée de ce vecteur mobile peut s'exprimer par

$$(3.3) \quad \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt} (F\ell) = \dot{F}\ell = \dot{F} F^{-1} a = G a.$$

La connaissance de G ou F , reliés par (3.2), permet de calculer la dérivée par rapport à t de la longueur de tout arc de courbe $p_t(C) \subset \mathbb{R}$, où C désigne, comme au paragraphe 2, un arc de courbe de Λ (i.e. une ligne matérielle). On définit C par une représentation paramétrique $r = \lambda(r)$, $r \in [r_1, r_2]$; on note $\frac{d\lambda}{dr} = \lambda'$, élément de $T_{\lambda(r)}$ indépendant de t ; alors

$$(3.4) \quad \frac{d}{dt} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{F\lambda' \cdot F\lambda'} dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\frac{d}{dt} (F\lambda' \cdot F\lambda')}{2 \sqrt{F\lambda' \cdot F\lambda'}} dr.$$

Tout réside alors dans le calcul de $\frac{d}{dt} (F\lambda' \cdot F\lambda')$ ou, plus généralement, si l et m sont deux éléments indépendants de t dans T_λ (λ particule déterminée du milieu continu), le calcul de

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} (Fl \cdot Fm) &= \dot{Fl} \cdot Fm + Fl \cdot \dot{Fm} \\ &= \langle F^* \dot{Fl}, m \rangle + \langle F^* F\dot{l}, m \rangle \\ &= 2 \langle \text{sym } F^* \dot{F} l, m \rangle \end{aligned}$$

où on note

$$\text{sym } F^* \dot{F} = \frac{1}{2} (F^* \dot{F} + F^* \dot{F}) \in \mathcal{L}_s(T_\lambda, T_\lambda).$$

D'autres expressions équivalentes à (3.5) seront utiles dans la suite. Comme en (2.2) on pose, pour chaque $\lambda \in \Lambda$,

$$C = F^* F \in \mathcal{L}_s(T_\lambda, T_\lambda),$$

tenseur métrique du placement p_t considéré, au point $\lambda \in \Lambda$, ce qui donne

$$Fl \cdot Fm = \langle Cl, m \rangle.$$

Pour un mouvement du milieu continu, C est un élément de $\mathcal{L}_s(T_\lambda, T_\lambda)$ variable avec t : il possède une dérivée $\dot{C}$ si et seulement si pour tout l et tout m , éléments constants de T_λ , la dérivée ci-dessous existe:

$$(3.6) \quad \langle \dot{C}l, m \rangle = \frac{d}{dt} \langle Cl, m \rangle = \frac{d}{dt} (Fl \cdot Fm).$$

Par rapprochement avec (3.4) on voit donc que

$$(3.7) \quad \dot{C} = 2 \text{sym } F^* \dot{F} \in \mathcal{L}_s(T_\lambda, T_\lambda)$$

(calcul direct: $C = F^* F \Rightarrow \dot{C} = \dot{F}^* F + F^* \dot{F}$).

Une autre expression de $\dot{C}$ est importante; en notant $a = F\dot{l}$ et $b = Fm$ (c'est-à-dire les positions de l et m dans V à l'instant considéré) et en utilisant (3.3), on a

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} (Fl \cdot Fm) &= (Ga) \cdot b + a \cdot (Gb) \\ &= 2 (Da) \cdot b = 2a \cdot (Db) \end{aligned}$$

où on note

$$(3.9) \quad D = \text{sym } G = \frac{1}{2} (G + G^*)$$

L'élément $D \in \mathcal{L}_s(V, V)$, partie symétrique du gradient du

champ eulérien des vitesses u , est usuellement écrit

$$(3.10) \quad D = \text{def } u.$$

En rapprochant de (3.6) on a, quels que soient l et m dans T_λ ,

$$\langle \dot{C}l, m \rangle = (2 D Fl) \cdot Fm = 2 \langle F^* D Fl, m \rangle,$$

d'où

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \dot{C} &= 2 F^* D F = F^* (G + G^*) F \\ &= 2 \text{sym } F^* G F = 2 \text{sym } F^* G^* F. \end{aligned}$$

Une des utilités de D est de permettre l'expression de la dérivée (3.4) sous forme d'une intégrale curviligne étendue à la courbe $p_t(C) \subset \mathbb{R}$; pour la valeur considérée de t , l'abscisse curviligne s du point $p_t(\lambda(r))$ sur la courbe, comptée dans le sens des r croissants, est en correspondance différentiable avec r et

$$\frac{ds}{dr} = \sqrt{F\lambda' \cdot F\lambda'}$$

$$F\lambda' = \frac{d}{dr} p_t(\lambda(r)) = \frac{dx}{dr} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dr} = \alpha \frac{ds}{dr},$$

en notant α le vecteur unité tangent au point $x = p_t(\lambda(r))$ de la courbe

$$(3.12) \quad \int_{r_1}^{r_2} \frac{\frac{d}{dt} (F\lambda', F\lambda')}{2 \sqrt{F\lambda', F\lambda'}} dr = \int_{s_1}^{s_2} \frac{2 D\alpha \cdot \alpha \left(\frac{ds}{dr}\right)^2}{2 \frac{ds}{dr}} \frac{dr}{ds} ds$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} D\alpha \cdot \alpha ds$$

Vu la symétrie on peut d'ailleurs, dans cette formule, écrire G à la place de D .

REMARQUE. Pour alléger, on s'est limité dans ce qui précède au cas seul utile pour la suite, où la dimension de Λ est maximale, c'est-à-dire égale à la dimension n de $\mathcal{R}$. Il y a très peu à modifier si $\dim \Lambda < \dim \mathcal{R}$, par exemple si $n = 3$ avec, pour milieu continu, une surface matérielle (membrane) ce qui fait $\dim \Lambda = 2$.

Dans ce cas, le domaine de définition $p_t(\Lambda)$ du champ eulérien des vitesses $x \mapsto u(t, x)$ est une sous-variété stricte de $\mathcal{R}$. L'espace vectoriel tangent $\mathcal{T}_x$ au point x de cette sous-variété est identifié à un sous-espace de V ; il est muni de la métrique euclidienne induite par V et, par là, identifié à son dual. L'application linéaire F tangente à l'application $\lambda \mapsto p(t, \lambda) = x$ envoie bijectivement T_λ sur $\mathcal{T}_x$. Considérée comme un élément de $\mathcal{L}(T_\lambda, \mathcal{T}_x)$ elle sera notée $\mathcal{F}$. Autrement dit, si on note I l'injection naturelle de $\mathcal{T}_x$ dans V , on a

$$(3.13) \quad F = I \mathcal{F}.$$

L'adjointe $I^* \in \mathcal{L}(V, \mathcal{T}_x)$ est, classiquement, l'application projection orthogonale

$$(3.14) \quad P : x \mapsto \text{proj}(x, \mathcal{T}_x).$$

Donc, d'après (3.13)

$$F^* = \mathcal{F}^* P.$$

Le gradient G de u au point $x = p(t, \lambda)$ est un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{T}_x, V)$; au lieu de (3.2) on a

$$(3.15) \quad G = \dot{F} \mathcal{F}^{-1},$$

mais toujours $\frac{da}{dt} = Ga$ (observer que puisque $x = p(t, \lambda)$, l'espace $\mathcal{T}_x$ dépend de t ; il ne peut donc pas être question de définir le symbole $\dot{\mathcal{F}}$). De (3.5) à (3.7) les résultats sont inchangés, mais, au lieu de (3.8), il faut écrire

$$(3.16) \quad \frac{d}{dt} (F\lambda, Fm) = (P Ga) \cdot b + a \cdot (P G\lambda)$$

$$= [(P G + G^* P^*) a] \cdot b = 2 (Da) \cdot b = 2 a \cdot (Db)$$

où on pose, cette fois,

$$D = \text{sym } P G = \frac{1}{2} (P G + G^* I) \in \mathcal{L}_s(\mathcal{T}_x, \mathcal{T}_x).$$

En rapprochant de (3.6), on a, au lieu de (3.11),

$$\langle C\lambda, m \rangle = 2 (D \mathcal{F}\lambda) \cdot \mathcal{F}m = 2 \langle \mathcal{F}^* D \mathcal{F}\lambda, m \rangle$$

donc

$$\dot{C} = 2 \mathcal{F}^* D \mathcal{F} = \mathcal{F}^* (P G + G^* I) \mathcal{F}$$

$$= F^* G \mathcal{F} + \mathcal{F}^* G^* F = 2 \text{sym } F^* G \mathcal{F}.$$

4. STHENIQUE

L'auteur [6] a autrefois proposé d'intituler sthénique le chapitre de la mécanique ayant pour objet l'axiomatisation et le mode d'emploi du concept de force, avec ses généralisations. Le statut donné alors audit concept est celui d'un "mot" du langage grâce auquel des informations émanant d'autres chapitres de la physique sont introduites comme données d'un problème de mécanique, c'est-à-dire d'un problème concernant le mouvement d'un système matériel. Il s'agit donc d'un "concept

de communication" entre la mécanique et d'autres chapitres de la physique (exemple en d'autres domaines : le concept de quantité de chaleur) ; une idéale physique unitaire, c'est-à-dire non divisée en chapitres, pourrait se passer de tels concepts.

Il est aujourd'hui largement reconnu que les forces de la mécanique élémentaires, simplement consistant en des vecteurs liés, ne parviennent pas dans tous les cas à remplir ce rôle. Le mot effort est souvent employé (cf. P. Germain, [1]) pour désigner les objets plus généraux à invoquer. Dans le livre cité [6], nous avons aussi proposé d'utiliser à cette fin le terme de dyname.

Décrire un dyname, ou effort, c'est définir sa puissance pour tous les états de vitesse du système matériel auquel le dyname est appliqué ou, tout au moins, pour une classe de tels états de vitesse, déclarés admissibles pour le dyname considéré. Limitons-nous à des systèmes dont tout état de vitesse, par rapport au repère R choisi, est représentable par un champ eulérien $x \mapsto u(x)$, défini sur la partie $p(\Lambda)$ de R que le système Λ occupe dans le placement p considéré. Par axiome, l'ensemble des $u : p(\Lambda) \rightarrow V$ admissibles pour un certain dyname G est un sous-espace vectoriel $U(G)$ de $V^{p(\Lambda)}$ et la puissance de G est une fonctionnelle linéaire sur $U(G)$

$$u \mapsto P(G, u) .$$

Par exemple, la définition dans cet esprit d'une famille de k forces au sens élémentaire, de grandeurs vectorielles $f_1, f_2, \dots, f_k \in V$, appliquées respectivement à k particules dont les positions sont $x_1, x_2, \dots, x_k$, consiste en ceci : L'espace vectoriel $U(G)$ est constitué par des champs de vitesse $x \mapsto u(x)$ définis, au moins, en chacun

des k points $x_1, x_2, \dots, x_k$ et par définition

$$P(u) = \sum_{i=1}^k f_i \cdot u(x_i) .$$

Il va s'agir dans toute la suite du dyname des "efforts intérieurs" d'un milieu continu Λ avec $\dim \Lambda = \dim R = 3$. On se restreint au cas le plus usuel d'un milieu du premier ordre, c'est-à-dire vérifiant les hypothèses H_1, H_2, H_3 . Alors, pour tout mouvement admissible, le champ eulérien des vitesses $x \mapsto u(x)$ est C_1 -différentiable sur $p_t(\Lambda)$.

On fait de plus ici l'hypothèse que le dyname intérieur est localisable, dans le sens suivant :

1° Est définie sur le milieu Λ une mesure ≥ 0 , notée $d\mu$, indépendante du temps (en dynamique, ce sera la mesure masse ; mais le concept de masse n'a aucun rôle à jouer ici).

2° Pour toute partie μ -intégrable de Λ -notons-la δ - la puissance du dyname intérieur de cette partie s'exprime sous la forme d'intégrale

$$(4.1) \quad P_{\text{int}} = \int_{\delta} \pi(\lambda) d\mu(\lambda)$$

où la fonction $\pi \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Lambda, d\mu ; \mathbb{R})$ est appelée densité de puissance par rapport à la mesure $d\mu$.

L'axiome de linéarité de la puissance formulé plus haut exige que, pour chaque placement p du milieu, et pour chaque λ , la valeur $\pi(\lambda)$ soit une fonctionnelle linéaire du champ eulérien u .

Dans l'assertion de localisabilité nous incluons en outre :

3° $\pi(\lambda)$ s'exprime à partir des éléments locaux de u au point $x = p(\lambda)$, c'est-à-dire puisque l'espace des u est celui des fonctions

C_1 - différentiables sur $p(\Lambda)$

$$\pi(\lambda) = \ell_\lambda(u(x), \text{grad } u(x))$$

avec $\ell_\lambda : V \times \mathcal{L}(V, V) \rightarrow \mathbb{R}$, linéaire.

Comme précédemment, on note $\text{grad } u(x) = G$; en utilisant le produit scalaire euclidien de V , on peut exprimer ℓ_λ sous la forme

$$\ell_\lambda(u, G) = f \cdot u - \text{tr } \Sigma G,$$

avec $f \in V$ et $\Sigma \in \mathcal{L}(V, V)$ dépendant de λ .

Selon un des principes de la mécanique classique qu'on peut appeler "principe des efforts intérieurs" (il est présenté dans [6] comme la systématisation la plus générale du "principe d'action et de réaction"; dans [1] il est intitulé "axiome des puissances virtuelles") la puissance (4.1) doit, quelle que soit la partie intégrable Φ , être nulle pour tout champ de vitesse u rigide, c'est-à-dire de la forme

$$u(x) = u(0) + A x$$

avec $A \in \mathcal{L}(V, V)$ antiadjoint. Cela équivaut immédiatement aux deux conditions suivantes

$$(4.2) \quad f = 0$$

$$(4.3) \quad \Sigma \in \mathcal{L}_s(V, V).$$

La définition de Σ est visiblement subordonnée au choix de la mesure $d\mu$. On tourne classiquement cet inconvénient de la manière suivante : puisque le placement p est supposé spécifié, l'intégrale (4.1) peut se récrire par changement de variable

$$(4.4) \quad P_{\text{int}} = \int_{p(\Phi)} \pi(p^{-1}(x)) \rho(x) dx,$$

où dx désigne la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$ et ρ la fonction densité par rapport à dx de la mesure image de $d\mu$ par p si une telle densité existe (lorsque $d\mu$ est proprement la mesure masse du milieu

continu, on sait que $\rho(x)$ s'appelle la masse spécifique ou masse volumique du milieu au point $x \in \mathbb{R}$ dans le placement p considéré).

On pose alors

$$(4.5) \quad \rho(x) \Sigma(p^{-1}(x)) = \sigma(x) \in \mathcal{L}(V, V)$$

appelé tenseur contrainte de Cauchy au point $x \in p(\Lambda)$. Alors

$-\text{tr } \sigma(x) G(x)$ est la densité volumique de puissance intérieure au point x .

Si l'on revient à l'expression de P_{int} par une intégrale étendue à Φ , on écrira, vu (3.2)

$$(4.6) \quad \begin{aligned} P_{\text{int}} &= - \int_{\Phi} \text{tr } \Sigma G d\mu = - \int_{\Phi} \text{tr } \Sigma \dot{F} F^{-1} d\mu \\ &= - \int_{\Phi} \text{tr } F^{-1} \Sigma \dot{F} d\mu \end{aligned}$$

d'où l'intérêt, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, de l'élément

$$(4.7) \quad \tau = F^{-1} \Sigma = \frac{1}{\rho} F^{-1} \sigma \in \mathcal{L}(V, T_\lambda)$$

Il y a avantage à décrire les efforts intérieurs au moyen d'un objet appartenant à la géométrie de la variété différentiable Λ ; posons

$$(4.8) \quad \theta = F^{-1} \Sigma F^{*-1} = \frac{1}{\rho} F^{-1} \sigma F^{*-1} \in \mathcal{L}(T_\lambda^*, T_\lambda)$$

ce que Rougée [5] appelle tenseur intrinsèque des contraintes au point λ de Λ . Alors

$$(4.9) \quad \tau = F^{-1} \Sigma = \theta F^*$$

$$(4.10) \quad P_{\text{int}} = - \int_{\Phi} \text{tr } \theta F^* \dot{F} d\mu.$$

Les écritures (4.4) à (4.9) n'invoquent pas la symétrie de Σ et σ , fournie en (4.3) par le "principe des efforts intérieurs". On voit sur (4.8) que cette symétrie équivaut à celle de $\theta \in \mathcal{L}(T_\lambda^*, T_\lambda)$. Moyennant cette symétrie, (4.4) devient

$$(4.11) \quad P_{\text{int}} = - \int_{p(\xi)} \text{tr } \sigma D \, dx$$

où, comme au paragraphe 3,

$$D = \frac{1}{2} (G + G^*)$$

tandis que (4.10) devient, vu (3.7),

$$(4.12) \quad \begin{aligned} P_{\text{int}} &= - \frac{1}{2} \int_{\xi} \text{tr } \theta (F^* \dot{F} + \dot{F}^* F) \, d\mu \\ &= - \frac{1}{2} \int_{\xi} \text{tr } \theta \dot{C} \, d\mu \end{aligned}$$

On retrouve par (4.11) ou par (4.12) que, si le "principe des efforts intérieurs" est vérifié, la puissance P_{int} de tout fragment μ - intégrable de Λ est indépendante du choix du repère R utilisé pour décrire le mouvement.

5. LOIS D'ELASTICITE

On appelle ainsi une relation

$$\sigma = f(F)$$

exprimant la contrainte de Cauchy $\sigma \in \mathcal{L}(V, V)$ comme fonction de $F \in \mathcal{L}_+(T_\lambda, V)$. Naturellement, cette relation est à formuler pour chaque particule λ du milieu continu.

Aussi bien alors, $\tau \in \mathcal{L}(V, T_\lambda)$ et $\theta \in \mathcal{L}(T_\lambda^*, T_\lambda)$ sont des fonctions de F . En effet, une fois la mesure $d\mu$ définie sur la variété Λ , ρ est une fonction de F et on définit, vu (4.7) et (4.8),

$$(5.2) \quad \tau = g(F) = \frac{1}{\rho(F)} F^{-1} f(F)$$

$$(5.3) \quad \theta = h(F) = \frac{1}{\rho(F)} F^{-1} f(F) F^{*-1}$$

Pour tout mouvement de notre milieu continu par rapport au repère choisi R , la puissance des efforts intérieurs de ξ s'écrit d'après (4.6)

$$(5.4) \quad P_{\text{int}} = - \int_{\xi} \text{tr } g(F) \dot{F} \, d\mu$$

On dit que la loi d'élasticité possède une fonction énergie (ou encore que c'est une loi hyperélastique) si, pour tout mouvement $t \mapsto p(t, \cdot)$, $t \in [t_1, t_2]$ et toute partie intégrable ξ , le travail intérieur

$$[W_{\text{int}}(\xi)]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P_{\text{int}}(\xi) \, dt$$

ne dépend que du placement initial et du placement final. Cela équivaut à l'existence d'une fonctionnelle du placement, soit $p \mapsto W(\xi, p) \in \mathbb{R}$ telle que le travail ci-dessus soit égal à $W(\xi, p(t_1, \cdot)) - W(\xi, p(t_2, \cdot))$ c'est-à-dire, sous réserve de la continuité usuelle,

$$(5.5) \quad P_{\text{int}}(\xi) = - \frac{d}{dt} W(\xi, p(t, \cdot))$$

La fonctionnelle $p \mapsto W(\xi, p)$ est appelée énergie élastique du fragment ξ .

Il suffit pour cela (nous ne discuterons pas ici la nécessité) qu'il existe, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, une fonction $F \mapsto w(F) \in \mathbb{R}$ telle que

$$(5.6) \quad g(F) = \text{grad } w(F)$$

où le gradient (de Fréchet) est entendu au sens de la dualité naturelle entre $\mathcal{L}(V, T_\lambda)$ et $\mathcal{L}(T_\lambda, V)$ c'est-à-dire au sens de la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie au § 1. Dans ce cas, en effet, (5.4) devient

$$\begin{aligned} P_{\text{int}}(\xi) &= - \int_{\xi} \text{tr } \text{grad } w(F) \frac{dF}{dt} \, d\mu \\ &= - \int_{\xi} \frac{d}{dt} w(F(t)) \, d\mu = - \frac{d}{dt} \int_{\xi} w(F(t)) \, d\mu \end{aligned}$$

Ce qui précède ne suppose pas que σ possède la symétrie impliquée par le principe des efforts intérieurs ; la puissance ou le travail écrits ci-dessus doivent donc a priori dépendre du choix du repère R .

6. LE PRINCIPE D'OBJECTIVITE

Selon ce principe, la loi reliant l'état de contrainte dans le milieu à son placement doit être indépendante du choix du repère. De façon équivalente si p et p' sont deux placements de Λ dans le repère R tels que $p' \circ p^{-1}$ soit une isométrie J (directe, vu l'hypothèse H_2), l'état de contrainte du milieu doit être le même.

Si $p' = J \circ p$, on a, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, la relation suivante entre les applications linéaires tangentes F'_λ et F_λ , éléments de $\mathcal{L}_+(T_\lambda, V)$

$$F' = R F$$

où $R \in \mathcal{G}_+(V)$ est l'isométrie vectorielle associée à J .

Dans la géométrie propre du milieu continu, indépendante de tout placement, l'état de contrainte est décrit par le tenseur intrinsèque des contraintes $\theta \in \mathcal{L}(T_\lambda^*, T_\lambda)$. La loi d'élasticité écrite au paragraphe précédent est donc conforme au principe d'objectivité si et seulement si, pour chaque $\lambda \in \Lambda$ la fonction $h : F \mapsto \theta$ vérifie

$$(6.1) \quad \forall R \in \mathcal{G}_+(V), \forall F \in \mathcal{L}_+(T, V) : h(R F) = h(F) .$$

THEOREME 1. Une loi d'élasticité possède la propriété d'objectivité (6.1) si et seulement si elle possède l'une des propriétés équivalentes suivantes :

i) La fonction $f : F \mapsto \sigma$ vérifie

$$(6.2) \quad \forall R \in \mathcal{G}_+(V), \forall F \in \mathcal{L}_+(T, V) : f(R F) = R f(F) R^{-1} .$$

ii) La fonction $g : F \mapsto \tau$ vérifie

$$(6.3) \quad \forall R \in \mathcal{G}_+(V), \forall F \in \mathcal{L}_+(T, V) : g(R F) = g(F) R^{-1} .$$

iii) Si on note $\mathcal{L}_S^{++}(T, T^*)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(T, T^*)$ auto-adjoints définis positifs, il existe une unique application

$$H : \mathcal{L}_S^{++}(T, T^*) \rightarrow \mathcal{L}(T^*, T) \text{ telle que}$$

$$(6.4) \quad \forall F \in \mathcal{L}_+(T, V) : h(F) = H(F^* F) .$$

Preuve. Puisque toute isométrie préserve les volumes, on a, quel que soit λ ,

$$\rho(R F) = \rho(F) .$$

L'équivalence de (6.1) à i) et à ii) résulte alors immédiatement de (5.3) et (5.2).

Par ailleurs la relation binaire

$$\exists R \in \mathcal{G}_+ : F' = R F$$

constitue une relation d'équivalence dans l'ensemble $\mathcal{L}_+(T, V)$. La propriété (6.1) équivaut à dire que h est constante sur chacune des classes d'équivalence. On a vu au paragraphe 2 que F et F' appartiennent à une même classe si et seulement si

$$F^* F = F'^* F' .$$

Donc la propriété (6.1) équivaut à l'existence de H assurant (6.4).

L'application H est définie de manière unique sur l'ensemble des

$C = F^* F$ avec F décrivant $\mathcal{L}_+(T, V)$. On a vu que $C \in \mathcal{L}_S^{++}(T, T^*)$.

Réciproquement si on appelle C un élément quelconque de $\mathcal{L}_S^{++}(T, T^*)$, le produit scalaire

$$X \cdot Y = \langle X, C Y \rangle$$

définit sur T une structure d'espace vectoriel euclidien ; à cette structure correspond classiquement une identification de T avec T^* , laquelle n'est autre que l'application C . Choisissons une isométrie K de cet espace euclidien T sur l'espace euclidien V ; élémentairement $K^* = K^{-1}$, donc $K^* K = \text{id} = C$. L'isométrie K peut d'ailleurs être choisie dans $\mathcal{L}_+^+(T, V)$; en posant $F = K$ on a bien $C = F^* F$.

7. ENERGIE , OBJECTIVITE ET SYMETRIE

THEOREME 2. Soit une loi d'élasticité possédant une fonction énergie ; c'est-à-dire qu'il existe $w : \mathcal{L}(T, V) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la loi s'écrive

$$\tau = g(F) = \text{grad } w(F) .$$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

i) La fonction w vérifie

$$(7.1) \quad \forall R \in \mathcal{O}_+(V), \forall F \in \mathcal{L}_+(T, V) : w(R F) = w(F) .$$

ii) Il existe $v : \mathcal{L}_s^{++}(T, T^*) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$(7.2) \quad \forall F \in \mathcal{L}_+(T, V) : w(F) = v(F^* F) .$$

iii) La loi vérifie le principe des efforts intérieurs (cf. paragraphe 4) c'est-à-dire que, pour tout $F \in \mathcal{L}_+(T, V)$, l'élément $F g(F)$ appartient à $\mathcal{L}_s(V, V)$ (ou, de façon équivalente $\sigma = \frac{1}{2} F \tau \in \mathcal{L}_s(V, V)$, resp. $\theta = \tau F^{*-1} \in \mathcal{L}_s(T^*, T)$).

iv) La loi est objective, c'est-à-dire possède les propriétés énoncées au Théorème 1.

Preuve. L'équivalence de i) et ii) s'obtient par le même raisonnement qu'à la fin du paragraphe précédent.

Montrons maintenant que i) $\Leftrightarrow$ iii). Les applications $F \mapsto R F$ de $\mathcal{L}_+(T, V)$ dans lui-même constituent, pour R décrivant $\mathcal{O}_+(V)$ un groupe de transformations de l'ensemble $\mathcal{L}_+(T, V)$. L'assertion i) signifie que la fonction numérique w est constante sur chaque orbite de ce groupe. Comme ces orbites sont connexes par arc, il faut et il suffit pour cela que, pour tout F , l'élément $\tau = \text{grad } w(F) \in \mathcal{L}(V, T)$ soit orthogonal à l'espace tangent de l'orbite de F . Or l'application $R \mapsto R F$ de $\mathcal{O}_+$ dans $\mathcal{L}_+(T, V)$ a pour application linéaire tangente au point I

$$dR \mapsto dR F$$

où dR décrit l'espace vectoriel tangent à $\mathcal{O}_+$ au point I , c'est-à-dire $\mathcal{L}_a$ (cf. Annexe, § A. 3). L'espace tangent à l'orbite de F au point F est l'image de $\mathcal{L}_a$ par cette application linéaire ; l'orthogonalité en vue s'écrit donc

$$\forall \Omega \in \mathcal{L}_a : \text{tr } \Omega F \tau = 0$$

ce qui signifie que $F \tau$, élément de $\mathcal{L}(V, V)$, est orthogonal à $\mathcal{L}_a$; autrement dit $F \tau \in \mathcal{L}_s(V, V)$, ce qui est l'assertion iii). On note en outre que $F \tau \in \mathcal{L}_s(V, V)$ équivaut à $F^{-1} F \tau F^{-1*} \in \mathcal{L}_s(T^*, T)$, c'est-à-dire $\theta \in \mathcal{L}_s(T^*, T)$.

Montrons que i) $\Rightarrow$ iv). Soit R fixé dans $\mathcal{O}_+(V)$; en différentiant (7.1), il vient, pour tout $F \in \mathcal{L}_+(T, V)$,

$$\forall \delta F \in \mathcal{L}(T, V) : \text{tr } g(R F) R \delta F = \text{tr } g(F) \delta F$$

donc

$$\forall \delta F \in \mathcal{L}(T, V) : \text{tr } [g(R F) R - g(F)] \delta F = 0$$

ce qui établit (6.3).

Pour prouver qu'inversement $iv) \Rightarrow i)$, supposons (6.3); le calcul ci-dessus montre qu'alors, pour $R \in \mathcal{O}^+(V)$ fixé, les fonctions $F \mapsto w(F)$ et $F \mapsto w(RF)$ ont même gradient en chaque point $F \in \mathcal{S}_+(T, V)$. Donc si Γ désigne une partie de $\mathcal{S}_+(T, V)$ connexe par arc, on a

$$(7.3) \quad \forall F \in \Gamma : w(RF) - w(F) = K(R)$$

avec $K : \mathcal{O}_+(V) \rightarrow \mathbb{R}$ évidemment continue. En laissant de côté le cas banal où R est l'identité, appelons ω le sous-groupe de $\mathcal{O}_+(V)$ constitué par les rotations de même axe que R . On peut prendre pour Γ l'ensemble des rF , $r \in \omega$; si on écrit (7.3) en remplaçant F par $R^2F, R^4F, \dots, R^{2n}F$ et si on ajoute membre à membre, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N} : K(R^{2n}) = n K(R)$$

Comme l'identité est un point d'accumulation des R^{2n} dans ω et que $K(\text{id}) = 0$, on en conclut $K(R) = 0$, ce qui termine la démonstration (voir un argument de même type au § 6. A de l'Annexe).

REMARQUE. Certaines des implications formulées dans le théorème précédent ont un analogue global évident : Supposons, pour une portion $\mathcal{P}$ du milieu, l'existence d'une fonctionnelle énergie élastique $p \mapsto W(p)$ (cf. paragraphe 5). Le principe d'objectivité exige que cette fonctionnelle soit indépendante du choix du repère $\mathcal{R}$ ou, ce qui revient au même, que pour toute isométrie directe I de l'espace affine euclidien $\mathcal{R}$, on ait $W(I \circ p) = W(p)$. Il vient alors, par (5.5) que $P_{\text{int}}(\mathcal{P})$ est nulle pour tout mouvement rigide du système par rapport à $\mathcal{R}$: c'est justement ce que donne le principe des efforts intérieurs. Et on a la réciproque, puisque toute isométrie I de $\mathcal{R}$ est réalisable comme résultat d'un mouvement rigide régulier sur un intervalle $[t_1, t_2]$.

THEOREME 3. Soit une loi d'élasticité objective, c'est-à-dire possédant les propriétés énoncées dans le Théorème 1. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) la loi possède une fonction énergie, c'est-à-dire que $g : F \mapsto \tau$ est un gradient au sens de la dualité naturelle de $\mathcal{L}(T, V)$ et $\mathcal{L}(V, T)$;
- ii) l'application $H : C \mapsto \theta$ prend ses valeurs dans $\mathcal{L}_S(T^*, T)$ et c'est un gradient au sens de la dualité naturelle entre $\mathcal{L}_S(T, T^*)$ et $\mathcal{L}_S(T^*, T)$.

Si ces propriétés sont vérifiées et que

$$(7.4) \quad g(F) = \text{grad } w(F)$$

la fonction $v : \mathcal{S}_S^{++}(T, T^*) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par (7.2) est différentiable et

$$(7.5) \quad H(C) = 2 \text{ grad } v(C) .$$

Preuve. Montrons d'abord que $ii) \Rightarrow i)$; on suppose qu'il existe $v : \mathcal{S}_S^{++}(T, T^*) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $H(C) = 2 \text{ grad } v(C)$. Alors la fonction w définie sur $\mathcal{S}_+(T, V)$ par $w(F) = v(F^* F)$ a pour différentielle

$$\begin{aligned} dw &= \text{tr grad } v(F^* F) (dF^* F + F^* dF) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr } \theta (dF^* F + F^* dF) . \end{aligned}$$

Par hypothèse $\theta \in \mathcal{L}_S(T^*, T)$ donc

$$\text{tr } \theta dF^* F = \text{tr } F^* dF \theta^* = \text{tr } \theta^* F^* dF$$

ce qui fait, puisque $\theta = \theta^*$ et $\theta F^* = \tau$,

$$dw = \text{tr } \theta F^* dF = \text{tr } \tau dF$$

pour tout $dF \in \mathcal{L}(T, V)$; cela prouve que

$$g(F) = \text{grad } w(F) .$$

Réciproquement, supposons i); d'après le Théorème 2, H prend ses valeurs dans $\mathcal{L}_S(T^*, T)$ et on peut définir une fonction v par (7.2); on va montrer que cette fonction est différentiable et assure

(7.5) en s'appuyant sur le lemme suivant, démontré plus loin :

LEMME. L'application surjective $F \mapsto F^* F$ de $\mathcal{L}_+(T, V)$ sur $\mathcal{L}_s^{++}(T, T^*)$ possède un relèvement différentiable, c'est-à-dire qu'il existe

$$\Psi : \mathcal{L}_s^{++}(T, T^*) \rightarrow \mathcal{L}_+(T, V)$$

différentiable et telle que

$$(7.6) \quad \forall C \in \mathcal{L}_s^{++}(T, T^*) : \Psi(C)^* \Psi(C) = C.$$

La fonction v peut alors s'exprimer

$$v(C) = w(\Psi(C))$$

elle est donc différentiable et

$$(7.7) \quad dv(C) = \text{tr grad } w(\Psi(C)) d\Psi(C).$$

En différentiant (7.6) on obtient

$$(7.8) \quad d\Psi^* \Psi + \Psi d\Psi^* = dC.$$

Par ailleurs, le Théorème 2 montre, en prenant $F = \Psi(C)$, que l'élément $\tau = \text{grad } w(\Psi(C))$ vérifie

$$(7.9) \quad \Psi \tau \in \mathcal{L}_s(V, V).$$

Pour abréger, on note Ψ^{-1} l'élément $(\Psi(C))^{-1} \in \mathcal{L}^+(V, T)$ et (7.7) devient, grâce à la symétrie (7.9),

$$\begin{aligned} dv &= \text{tr } \tau d\Psi = \text{tr } \Psi \tau d\Psi \Psi^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \text{tr } \Psi \tau (d\Psi \Psi^{-1} + \Psi^{-1*} d\Psi^*) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr } (\tau d\Psi + \tau \Psi^{-1*} d\Psi^* \Psi) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr } \tau \Psi^{-1*} (\Psi^* d\Psi + d\Psi^* \Psi). \end{aligned}$$

Or, si on prend $F = \Psi(C)$, on a d'après (4.9)

$$H(C) = \theta = \tau F^{*-1} = \tau \Psi^{-1*},$$

donc, vu (7.8)

$$dv = \frac{1}{2} \text{tr } H(C) dC$$

ce qui démontre l'assertion ii) et la relation (7.5).

Il reste à prouver le Lemme. A vrai dire, on n'aurait besoin pour la démonstration ci-dessus, que d'un Ψ défini sur un voisinage de chaque C : son existence pourrait se déduire du théorème du rang (cf., par exemple, [9], Chap. X, n° 3 et chap. XVI, n° 7) en établissant que l'application $F \mapsto F^* F$ est de rang constant sur un tel voisinage. On domine mieux la situation présente en explicitant un Ψ défini sur $\mathcal{L}_s^{++}(T, T^*)$ entier : Choisissons $F_0 \in \mathcal{L}_+(T, V)$ et posons $C_0 = F_0^* F_0 \in \mathcal{L}_s^{++}(T, T^*)$. On fait de T un espace euclidien, noté E_0 , en posant, pour x et y dans T ,

$$x \cdot y = \langle x, C_0 y \rangle = \langle x, F_0^* F_0 y \rangle = F_0 x \cdot F_0 y$$

(où le dernier membre est un produit scalaire dans l'espace euclidien V). On voit que $F_0 : E_0 \rightarrow V$ est une isométrie ; comme d'habitude, on identifie E_0 à son dual, ce qui fait que $E_0 = T = T^*$ et que C_0 devient l'identité, d'où $F_0^* = F_0^{-1}$.

Tout $C \in \mathcal{L}_s^{++}(T, T^*)$ devient ainsi un opérateur autoadjoint défini positif de l'espace euclidien E_0 et, à ce titre, possède une racine carrée $\sqrt{C}$. Posons

$$\Psi(C) = F_0 \sqrt{C},$$

d'où

$$\Psi(C)^* = \sqrt{C} F_0^* = \sqrt{C} F_0^{-1},$$

ce qui donne bien (7.6). Cela démontre le Lemme, puisque l'application $C \mapsto \sqrt{C}$ est partout différentiable sur $\mathcal{L}_s^{++}(E_0)$.

8. ISOTROPIE MATERIELLE

Désormais on privilégie un certain placement, déclaré constituer l'état naturel du milieu continu Λ . Il s'agit toujours d'un milieu de dimension maximale. Comme le placement considéré est injectif de Λ dans l'espace euclidien affine $\mathbb{R}$, ce placement privilégié permet de transporter sur Λ la métrique euclidienne de $\mathbb{R}$. Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, l'espace vectoriel tangent T_λ est de ce fait muni d'une métrique euclidienne et, comme d'habitude, un tel espace est identifié à son dual :

$$(8.1) \quad T_\lambda = T_\lambda^* \text{ euclidien.}$$

Donc, pour tout $F \in \mathcal{L}(T, V)$, on a $F^* \in \mathcal{L}(V, T)$, ce qui donne un sens à l'écriture, jusqu'à présent interdite, $F F^*$, élément de $\mathcal{L}_s^{++}(V, V)$.

On considère une loi d'élasticité, relative à la particule λ du milieu. Pour alléger les discussions on supposera toujours dans la suite qu'une telle loi est objective, c'est-à-dire que, d'après le Théorème 1, elle peut s'écrire

$$(8.2) \quad \theta = H(C)$$

(On pourrait développer la notion d'isotropie sans objectivité : l'écriture serait exactement semblable à celle du paragraphe 6 consacré à l'objectivité sans isotropie, à l'échange près des espaces T et V , des éléments θ et σ , etc...)

Les éléments $C = F^* F \in \mathcal{L}_s^{++}(T, T)$ et $\theta \in \mathcal{L}(T, T)$ appartiennent à la géométrie de la variété Λ . On dit que la loi (8.2) est isotrope si son écriture au moyen d'une base orthonormée directe choisie dans T est indépendante du choix de cette base : cela revient à :

$$(8.3) \quad \forall J \in \mathcal{O}_+(T), \forall C \in \mathcal{L}_s^{++}(T, T) : H(J^{-1} C J) = J^{-1} H(C) J.$$

En introduisant les mêmes éléments qu'au paragraphe 5, on a alors :

THEOREME 4. L'isotropie (8.3) de la loi d'élasticité objective

$H : C \mapsto \theta$ équivaut aux assertions suivantes :

i) L'application $h : F \mapsto \theta$ vérifie

$$(8.4) \quad \forall J \in \mathcal{O}_+(T), \forall F \in \mathcal{L}_+(T, V) : h(F J) = J^{-1} h(F) J.$$

ii) L'application $g : F \mapsto \theta$ vérifie

$$(8.5) \quad \forall J \in \mathcal{O}_+(T), \forall F \in \mathcal{L}_+(T, V) : g(F J) = J^{-1} g(F).$$

iii) L'application $f : F \mapsto \sigma$ vérifie

$$(8.6) \quad \forall J \in \mathcal{O}_+(T), \forall F \in \mathcal{L}_+(T, V) : f(F J) = f(F).$$

iv) Il existe $\mathcal{F} : \mathcal{L}_s^{++}(V, V) \rightarrow \mathcal{L}_s(V, V)$ telle que

$$(8.7) \quad \forall F \in \mathcal{L}_+(T, V) : f(F) = \mathcal{F}(F F^*).$$

Preuve. Supposons (8.3) ; alors puisque $J^* = J^{-1}$

$$h(F J) = H(J^* F^* F J) = J^{-1} H(F^* F) J = J^{-1} h(F) J$$

c'est-à-dire i). Réciproquement, supposons i) ; pour tout

$C \in \mathcal{L}_s^{++}(V, V)$, il existe (non uniquement) $F \in \mathcal{L}_+(T, V)$ tel que $C = F^* F$; les mêmes calculs que ci-dessus donnent alors (8.3).

Les équivalences de i) à ii) et iii) résultent ensuite des définitions de τ et σ , en observant, au sujet de la densité ρ que

$$\rho(F J) = \rho(F).$$

L'équivalence de iii) et iv) résulte de ce que pour tout $B \in \mathcal{L}_s^{++}(V, V)$, il existe (non uniquement) $F \in \mathcal{L}_+(T, V)$ tel que $B = F F^*$ et de ce que, pour F et F' dans $\mathcal{L}_+(T, V)$, on a

$$F F^* = F' F'^* \Leftrightarrow \exists J \in \mathcal{O}_+(T) : F' = F J .$$

THEOREME 5. Soit une loi d'élasticité objective et isotrope (cf. Théorème 4). Si la dimension de V est impaire les éléments θ et $C = F^* F$ de $\mathcal{L}_s(T, T)$ commutent ; les éléments σ et $B = F F^*$ de $\mathcal{L}_s(V, V)$ commutent. L'application $\mathcal{J} : B \mapsto \sigma$ définie par le Théorème 4 est isotrope, c'est-à-dire

$$(8.8) \quad \forall R \in \mathcal{O}_+(V), \forall B \in \mathcal{L}_s^{++}(V, V) : \mathcal{J}(R^{-1} B R) = R^{-1} \mathcal{J}(B) R .$$

L'application $B \mapsto \frac{1}{\rho} \sigma B^{-1} = \frac{1}{\rho(F)} \mathcal{J}(B) B^{-1}$ est universellement isométrique à H , c'est-à-dire que pour tout $M \in \text{iso}_+(T, V)$, on a

$$(8.9) \quad \frac{1}{\rho} \sigma B^{-1} = M H (M^{-1} B M) M^{-1} .$$

Démonstration. La propriété d'isotropie (8.8) résulte de (8.7) et de l'objectivité telle qu'elle s'exprime en (6.2). L'élément $\theta \in \mathcal{L}_s(T, T)$ commute avec C parce que c'est la valeur $H(C)$ de l'application isotrope H ; l'élément $\sigma \in \mathcal{L}_s(V, V)$ commute avec B , parce que c'est la valeur de l'application isotrope $\mathcal{J}$.

Soit enfin $B \in \mathcal{L}_s^{++}(V, V)$ et $\beta = B^{\frac{1}{2}}$; si on prend $F = \beta M \in \mathcal{L}_+(T, V)$ on a $F F^* = B$, d'où, d'après le Théorème 4, une valeur déterminée pour $\sigma = \mathcal{J}(B)$ et pour

$$\rho = \frac{d\mu}{dx} = \frac{d\mu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{\det F} \mu \lambda$$

($d\lambda$ désigne ici l'image sur la variété Λ de la mesure de Lebesgue dans le placement dit naturel). Alors, puisque $M^{-1} = M^*$,

$$H(M^{-1} B M) = H(M^* \beta^2 M) = H(F^* F)$$

est la valeur correspondante de θ . Vu (4.8) on a donc

$$M H (M^{-1} B M) M^{-1} = \beta^{-1} F \theta F^* \beta^{-1} = \beta^{-1} \frac{\sigma}{\rho} \beta^{-1} = \frac{1}{\rho} \sigma B^{-1}$$

puisque $\beta = B^{\frac{1}{2}}$ commute avec σ .

On notera que $\det F = (\det B)^{\frac{1}{2}}$.

9. EXTENSION A DROITE ET A GAUCHE

L'idée classique de décomposition polaire des matrices se retrouve évidemment dans le cadre présent. Comme au paragraphe précédent, T et V sont deux espaces vectoriels euclidiens orientés, de dimension n . On note $\text{iso}_+(T, V)$ l'ensemble des isométries positives de T sur V .

Pour tout $F \in \mathcal{L}_+(T, V)$, il existe, de manière unique, $K \in \text{iso}_+(T, V)$, $\beta \in \mathcal{L}_s^{++}(V, V)$, $\gamma \in \mathcal{L}_s^{++}(T, T)$ tels que

$$(9.1) \quad F = \beta K = K \gamma .$$

L'unicité résulte de ce que ces égalités entraînent

$$(9.2) \quad F F^* = \beta^2 \text{ d'où } \beta = (F F^*)^{\frac{1}{2}}$$

$$(9.3) \quad F^* F = \gamma^2 \text{ d'où } \gamma = (F^* F)^{\frac{1}{2}}$$

$$(9.4) \quad K = \beta^{-1} F = F \gamma^{-1}$$

Et on vérifie par un calcul immédiat que K , β , γ ainsi construits sont bien conformes à l'assertion (que K soit une isométrie s'exprime par $K K^* = I$).

L'intérêt de β et γ est surtout de servir d'intermédiaires dans des démonstrations ; du point de vue pratique, les éléments $\beta^2 = F F^*$, noté B , et $\gamma^2 = F^* F$, noté C , sont plus accessibles au

calcul. On dit usuellement que $\beta \in \mathcal{L}_0^{++}(V, V)$ est l'extension à gauche et que $\gamma \in \mathcal{L}_S^{++}(T, T)$ est l'extension à droite associées à F .

Le calcul précédent montre que

$$(9.5) \quad \gamma = K^* \beta K$$

ou aussi bien

$$\beta = K \gamma K^*$$

(se rappeler que $K^* = K^{-1}$) : β et γ sont isométriques ; de même leurs carrés

$$(9.6) \quad C = K^* B K, \quad B = K C K^*.$$

Voici comment on peut, dans ce contexte, exprimer la propriété d'objectivité (6.1), concernant l'application $h : \mathcal{L}_+(T, V) \rightarrow \mathcal{L}(T, T)$, à savoir

$$\forall R \in \mathcal{O}_+(V), \forall F \in \mathcal{L}_+(T, V) : h(RF) = f(F).$$

On choisit un $K_0 \in \text{iso}_+(T, V)$; pour tout $F \in \mathcal{L}_+(T, V)$, auquel on associe γ et K par (9.1), on écrit

$$\theta = h(F) = h(K\gamma) = h(K K_0^{-1} K_0 \gamma) = h(K_0 \gamma)$$

puisque $K K_0^{-1} \in \mathcal{O}_+(V)$. Vu (9.3) cela donne

$$(9.7) \quad \theta = H(C) = h(K_0 C^{\frac{1}{2}}).$$

Ce type de calcul a déjà été employé, dans les démonstrations des théorèmes 1 et 3.

Symétriquement, on exprime comme suit la propriété d'isotropie (8.6) de la loi d'élasticité $f : \mathcal{L}_+(T, V) \rightarrow \mathcal{L}_S(V, V)$, à savoir

$$\forall J \in \mathcal{O}_+(T), \forall F \in \mathcal{L}_+(T, V) : f(FJ) = f(F).$$

On choisit un $K_0 \in \text{iso}_+(T, V)$ et on écrit

$$\sigma = f(F) = f(\beta K) = f(\beta K_0 K_0^{-1} K) = f(\beta K_0)$$

puisque $K_0^{-1} K \in \mathcal{O}_+(T)$. Donc, vu (9.2) la fonction $\mathcal{F}$ introduite par le théorème 4 peut s'écrire

$$(9.8) \quad \sigma = \mathcal{F}(B) = f(B^{\frac{1}{2}} K_0).$$

10. ENERGIE ISOTROPE

Comme au paragraphe 8, T est euclidien, identifié à son dual.

THEOREME 6. Soit une loi d'élasticité objective possédant une fonction énergie (cf. Théorème 2) ; les assertions suivantes sont équivalentes :

i) La loi est isotrope (cf. Théorème 4).

ii) La fonction w vérifie

$$(10.1) \quad \forall J \in \mathcal{O}_+(T), \forall F \in \mathcal{L}_+(T, V) : w(FJ) = w(F).$$

iii) La fonction v vérifie

$$(10.2) \quad \forall J \in \mathcal{O}_+(T), \forall C \in \mathcal{L}_S^{++}(T, T) : v(J^{-1} C J) = v(C).$$

iv) Il existe $e : \mathcal{L}_S^{++}(V, V) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$(10.3) \quad \forall F \in \mathcal{L}_+(T, V) : v(F^* F) = w(F) = e(F F^*).$$

Preuve. L'équivalence de i) et ii) s'établit comme l'équivalence de i) et iv) dans le Théorème 2, au remplacement près d'une action à gauche de $\mathcal{O}_+(V)$ par une action à droite de $\mathcal{O}_+(T)$.

On a vu en (7.5) que $H = 2 \text{ grad } v$; d'après Annexe, § 6, l'isotropie de H écrite en (8.3) équivaut à l'isotropie de v écrite en iii) ci-dessus.

L'équivalence de ii) et iv) s'établit comme l'équivalence de i) et ii) du Théorème 2.

THEOREME 6. Soit une loi d'élasticité objective et isotrope, possédant une fonction énergie. Alors la fonction scalaire e introduite par le Théorème 5 est isotrope, i.e.

$$(10.4) \quad \forall R \in \mathcal{O}_+(V), \quad \forall B \in \mathcal{L}_S^{++}(V,V) : e(R^{-1} B R) = e(B) .$$

Les fonctions v et e sont universellement isométriques, c'est-à-dire que, pour tout $M \in \text{iso}_+(T,V)$ on a

$$(10.5) \quad \forall C \in \mathcal{L}_S^{++}(T,T) : v(C) = e(M C M^{-1})$$

$$(10.6) \quad \forall B \in \mathcal{L}_S^{++}(V,V) : e(B) = v(M^{-1} B M) .$$

En outre

$$(10.7) \quad \text{grad } e(B) = \frac{1}{2p} \sigma B^{-1} .$$

Démonstration. Soit $C \in \mathcal{L}_S^{++}(T,T)$ et $\gamma = C^{\frac{1}{2}}$. Si $M \in \text{iso}_+(T,V)$ on a $M \gamma \in \mathcal{L}_S^{++}(T,V)$; en prenant $F = M \gamma$, la définition (10.3) de e donne (rappelons que $M^{-1} = M^*$)

$$e(M C M^*) = e(M \gamma \gamma^* M^*) = v(\gamma^* M^* M \gamma) = v(C) .$$

Cela établit (10.5); on en tire immédiatement (10.4) et (10.6).

Enfin, en différentiant (10.6), pour un M fixé, on obtient, vu (7.5)

$$\begin{aligned} d e(B) &= \text{tr grad } v(M^{-1} B M) M^{-1} dB M \\ &= \frac{1}{2} \text{tr } M H(M^{-1} B M) M^{-1} dB \end{aligned}$$

pour tout $dB \in \mathcal{L}_S(V,V)$; (10.7) résulte alors de (8.9).

THEOREME 7. Soit une loi d'élasticité objective et isotrope; les assertions suivantes sont équivalentes :

i) La loi possède une fonction énergie.

ii) L'application $B \mapsto (\det B)^{\frac{1}{2}} \sigma B^{-1}$ de $\mathcal{L}_S^{++}(V,V)$ dans $\mathcal{L}_S(V,V)$ est un gradient.

iii) L'application $\text{Log } B \mapsto (\det B)^{\frac{1}{2}} \sigma$ de $\mathcal{L}_S(V,V)$ dans lui-même, est un gradient.

Démonstration. On a déjà noté au § 8 que, si $d\lambda$ est l'image de la mesure de Lebesgue sur Λ dans le placement de référence, on a

$$(10.8) \quad \frac{1}{p} = \frac{\det F}{\mu_\lambda} = \frac{1}{\mu_\lambda} (\det B)^{\frac{1}{2}} ,$$

où le réel μ_λ est attaché à la particule considérée du milieu élastique, indépendamment de F . L'implication i) $\Rightarrow$ ii) découle donc de

(10.7). Inversement, ii) signifie que l'application $B \mapsto \frac{1}{p} \sigma B^{-1}$ est un gradient; il en est alors de même de l'application H qui lui est isométrique d'après le Théorème 5: cela donne i), d'après le Théorème 3.

Supposons maintenant ii): il existe $\epsilon : \mathcal{L}_S^{++}(V,V) \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$(\det B)^{\frac{1}{2}} \sigma = (\text{grad } \epsilon(B)) B .$$

Pour tout $B \in \mathcal{L}_S^{++}(V,V)$ est défini $S = \text{Log } B$ qui parcourt $\mathcal{L}_S(V,V)$.

D'après Annexe, § A.5, la fonction $S \mapsto \epsilon(\exp S)$ a pour gradient

$$(\text{grad } \epsilon(\exp S)) \exp S = (\det B)^{\frac{1}{2}} \sigma$$

d'où iii). Calcul semblable pour établir que iii) $\Rightarrow$ ii).

REMARQUE 1. L'équivalence i) $\Leftrightarrow$ iii) est, en substance, un théorème présenté par C. VALLEE [10], avec une démonstration un peu elliptique.

REMARQUE 2. Si $S = \text{Log } B$, on a

$$(\det B)^{\frac{1}{2}} = (\det \exp S)^{\frac{1}{2}} = \exp \text{tr } \frac{1}{2} S .$$

Le calcul précédent montre donc que

$$(10.9) \quad \sigma = (\exp \text{tr } \frac{-S}{2}) \text{grad } \varphi(S)$$

où φ désigne la fonction

$$S \mapsto \varphi(S) = \epsilon(\exp S) .$$

Comme (cf. Annexe, equ. (14))

$$\begin{aligned}\text{grad exp tr } \frac{-S}{2} &= \text{grad exp}(-\frac{1}{2} \text{tr } S) \\ &= -\frac{1}{2} \exp(-\frac{1}{2} \text{tr } S) \text{ grad tr } S \\ &= -\frac{1}{2} (\exp \text{tr } \frac{-S}{2}) I\end{aligned}$$

(10.9) s'écrit aussi bien

$$\sigma = \text{grad} ((\exp \text{tr } \frac{-S}{2}) \varphi(S)) + \frac{1}{2} (\exp \text{tr } \frac{-S}{2}) \varphi(S) I .$$

Des exercices de calcul du même genre peuvent être effectués en introduisant le tenseur de Green-Lagrange $\frac{1}{2} (C-I)$ ou le tenseur d'Almansi-Euler $\frac{1}{2} (I-B^{-1})$.

ANNEXE

FONCTIONS ISOTROPES DIFFERENTIABLES SUR $\mathcal{L}_S$

A. 1. AUTOADJOINTS ET ANTIADJOINTS

Dans tout ce qui suit, V est un espace vectoriel euclidien réel de dimension finie n , identifié à son dual. On note abrégativement $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel $\mathcal{L}(V, V)$. Cet espace est mis en dualité séparante avec lui-même par la forme bilinéaire (symétrique mais n'engendrant pas un carré scalaire positif)

$$(1) \quad \langle X, Y \rangle = \text{tr } XY = \text{tr } YX$$

indépendante de la structure euclidienne de V .

L'identification de V à son dual permet d'associer à tout $X \in \mathcal{L}$ son adjoint $X^* \in \mathcal{L}$. On note $\mathcal{L}_S$ (s comme "symétrique") le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}$ constitué par les autoadjoints :

$$\mathcal{L}_S = \{X \in \mathcal{L} : X = X^*\} ,$$

et $\mathcal{L}_A$ le sous-espace vectoriel constitué par les antiadjoints :

$$\mathcal{L}_A = \{X \in \mathcal{L} : X = -X^*\} .$$

Pour tout $X \in \mathcal{L}$ existe la décomposition unique

$$X = S + A , \quad S \in \mathcal{L}_S , \quad A \in \mathcal{L}_A$$

(cela équivaut à $X^* = S - A$, d'où $S = \frac{1}{2}(X + X^*)$ et $A = \frac{1}{2}(X - X^*)$).

Noter que si $S \in \mathcal{L}_S$ et $A \in \mathcal{L}_A$ on trouve $\langle S, A \rangle = 0$ et, plus précisément, chacun des deux sous-espaces $\mathcal{L}_S$ et $\mathcal{L}_A$ de $\mathcal{L}$ est l'orthogonal de l'autre au sens du produit scalaire (1). Il en résulte que pour chacun des espaces $\mathcal{L}_S$ et $\mathcal{L}_A$, la restriction de la forme

bilinéaire (1) met cet espace en dualité séparante avec lui-même.

Ce seront toujours au sens de ces dualités que les notions de gradient ou d'orthogonalité seront entendues dans la suite.

Pour mémoire, notons cependant que, V étant euclidien, il est classique de munir $\mathcal{L}(V, V)$ du produit scalaire euclidien défini pour tout X et tout Y dans $\mathcal{L}(V, V)$ par

$$X : Y = \text{tr } X^* Y = \text{tr } Y^* X$$

c'est-à-dire $\langle X^*, Y \rangle$. Au sens de cette structure euclidienne, $\mathcal{L}_s$ et $\mathcal{L}_a$ sont suppléméraires orthogonaux dans $\mathcal{L}$. Pour X et Y dans $\mathcal{L}_s$ on a évidemment $X : Y = \langle X, Y \rangle$ d'où la même autodualité de $\mathcal{L}_s$ que précédemment ; en particulier le gradient d'une fonction numérique définie sur $\mathcal{L}_s$ peut être indifféremment entendu au sens de l'un ou l'autre des deux produits scalaires. Au contraire, pour X et Y dans $\mathcal{L}_a$, $X : Y = -\langle X, Y \rangle$; mais nous n'aurons pas dans la suite à considérer de gradient pour une fonction définie sur $\mathcal{L}_a$.

A. 2. COMMUTATION DANS $\mathcal{L}_s$

Soient S et S' dans $\mathcal{L}_s$; on vérifie immédiatement que $S S' \in \mathcal{L}_s$ si et seulement si $S S' = S' S$.

Pour tout $S \in \mathcal{L}_s$, nous appellerons commutateur de S le sous-espace vectoriel suivant de $\mathcal{L}_s$:

$$\text{com } S = \{X \in \mathcal{L}_s : S X - X S = 0\}.$$

Dans $\mathcal{L}_s$, la relation binaire " S et S' commutent" est évidemment symétrique et réflexive, mais non transitive. Les sous-espaces $\text{com } S$, $S \in \mathcal{L}_s$, ne réalisent donc pas une partition de $\mathcal{L}_s$ en classes d'équivalence.

Rappelons quelques points très classiques :

Soit $S \in \mathcal{L}_s$; à chaque valeur propre λ (nécessairement réelle) de S correspond l'espace propre E_λ , sous-espace de V dont la dimension est égale à l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de l'équation caractéristique de S . Les E_λ fournissent une décomposition de V en somme directe orthogonale. Si on choisit arbitrairement une base orthonormée dans chacun des E_λ , la réunion des bases ainsi choisies constitue une base orthonormée de V , relativement à laquelle S est représenté par une matrice diagonale. Toute base diagonalisant S peut être obtenue par cette construction. Les n droites engendrées par les vecteurs d'une telle base constituent ce qu'on appellera un n-orthant principal de S . Deux éléments S et S' de $\mathcal{L}_s$ commutent si et seulement si ils possèdent un n-orthant principal commun.

On voit donc que si l'équation caractéristique de S a ses n racines distinctes, S possède un unique n-orthant principal. Dans ce cas un $X \in \mathcal{L}_s$ commute avec S si et seulement si il est représenté sur ce n-orthant par une matrice diagonale ; alors $\dim \text{com } S = n$. La dimension de $\text{com } S$ augmente si S possède des valeurs propres multiples ; cas extrême : $S = \lambda I$ dont le commutateur est $\mathcal{L}_s$ entier, de dimension $\frac{1}{2} n(n+1)$. La continuité des valeurs propres fait que la fonction $S \mapsto \dim \text{com } S$ est semi-continue supérieurement sur $\mathcal{L}_s$.

Ce qui suit donne quelques informations complémentaires sur l'espace $\text{com } S$.

Soit a un élément choisi dans V ; l'application linéaire $x \mapsto (a \cdot x)a$ est un élément de $\mathcal{L}_s$ qu'on notera $a \cdot a$. Alors un

élément non nul a de V est vecteur propre de $S \in \mathcal{L}_S$ si et seulement si $a \otimes a \in \text{com } S$. Cela résulte du critère de commutation donné plus haut, puisqu'une base orthonormée de V diagonalise $a \otimes a$ si et seulement si l'un des vecteurs de cette base est colinéaire à a .

On observe aussi que la base orthonormée $e_1, e_2, \dots, e_n$ de V diagonalise S si et seulement si il existe des réels λ_i tels que

$$S = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \otimes e_i.$$

Par suite $\text{com } S$ est le sous-espace de $\mathcal{L}_S$ engendré par les $e_\alpha \otimes e_\alpha$ où e_α décrit l'ensemble des vecteurs propres (normés, si on veut) de S .

A. 3. LE GROUPE $\mathcal{O}_+(V)$

L'étude des isométries vectorielles positives de V conduit à considérer l'ensemble des $X \in \mathcal{L}$ tels que

$$(2) \quad \begin{aligned} X X^* - I &= 0 \\ \det X &\geq 0 \end{aligned}$$

Il vient immédiatement que pour un tel X on a $\det X = +1$; il est donc inversible et $X^{-1} = X^*$. On en tire que les X en question constituent un sous-groupe de $\mathcal{L}_+(V, V)$ noté $\mathcal{O}_+(V)$ ou simplement $\mathcal{O}_+$ (groupe orthogonal direct de V).

L'ensemble $\mathcal{O}_+$ est une sous-variété différentiable de l'espace vectoriel $\mathcal{L}$.

Pour le montrer il suffit de vérifier que l'application

$$(3) \quad X \mapsto X X^* - I$$

écrite au premier membre de (2) est différentiable en tout point $R \in \mathcal{O}_+$ et de rang indépendant de ce point. De fait

$$d(X X^* - I) = dX X^* + X dX^*,$$

ce qui signifie que l'application linéaire tangente à l'application (3) au point $R \in \mathcal{O}_+$ est

$$dX \mapsto dX R^* + R dX^*.$$

Le noyau de cette application linéaire est l'ensemble des $dX \in \mathcal{L}$ tels que

$$dX R^* = -R dX^*$$

ce qui équivaut à $dX R^* \in \mathcal{L}_a$, c'est-à-dire à

$$(4) \quad \exists \Omega \in \mathcal{L}_a : dX = \Omega R.$$

Comme R est inversible, le noyau en question est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}$ de même dimension que $\mathcal{L}_a$, soit $\frac{1}{2}n(n-1)$, quel que soit $R \in \mathcal{O}_+$: l'espace vectoriel tangent au point R de la sous-variété $\mathcal{O}_+$ de $\mathcal{L}$ est égal à $\mathcal{L}_a R$.

A. 4. ACTION DE $\mathcal{O}_+$ DANS $\mathcal{L}_S$

Pour tout $S \in \mathcal{L}_S$ et tout $R \in \mathcal{O}_+$, il est immédiat que $R^{-1} S R$, c'est-à-dire $R^* S R$, appartient à $\mathcal{L}_S$. De cette manière $\mathcal{O}_+$ opère dans $\mathcal{L}_S$; par définition l'orbite de S est l'ensemble

$$\mathcal{O}_+(S) = \{X \in \mathcal{L}_S : \exists R \in \mathcal{O}_+, X = R^* S R\}.$$

La relation binaire $S' \in \mathcal{O}_+(S)$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{L}_S$, donc les diverses orbites forment une partition de $\mathcal{L}_S$; chacune d'elles est une sous-variété différentiable de cet espace vectoriel. L'orbite de S en effet est l'image de $\mathcal{O}_+$ par l'application

$$R \mapsto R^* S R$$

qui est continûment différentiable de $\mathcal{O}_+$ dans $\mathcal{L}_S$: l'application linéaire tangente au point $S' = R^* S R$ est

$$L_R : dR \mapsto d(R^* S R) = dR^* S R + R^* dS R$$

de $\mathcal{L}_a R$ (espace vectoriel tangent au point R de $\mathcal{O}_+$) dans $\mathcal{L}_S$ et le

rang de cette application est le même pour tout $R \in \mathcal{O}_+(S)$ vu la structure de groupe de $\mathcal{O}_+$. Ce rang dépend de l'orbite considérée ; on peut l'expliciter comme suit : Tout $dR \in \mathcal{L}_a R$ correspond bijectivement à $\Omega \in \mathcal{L}_a$ par

$$dR = \Omega R, \quad \text{d'où}$$

$$L_R(dR) = -R^* \Omega S R + R^* S \Omega R = R^* (S \Omega - \Omega S) R = R^* M_S(\Omega) R,$$

où on note M_S l'application linéaire

$$\Omega \mapsto S \Omega - \Omega S$$

de $\mathcal{L}_a$ dans $\mathcal{L}_s$.

L'espace vectoriel tangent au point S de l'orbite considérée est $M_S(\mathcal{L}_a)$. C'est donc l'orthogonal du noyau de l'application adjointe $M_S^* : \mathcal{L}_s \rightarrow \mathcal{L}_a$ au sens des autodualités de $\mathcal{L}_s$ et $\mathcal{L}_a$ définies au § A. 1. Par définition, pour tout $X \in \mathcal{L}_s$ et tout $Y \in \mathcal{L}_a$,

$$\langle M_S^*(X), Y \rangle = \langle X, M_S(Y) \rangle,$$

c'est-à-dire

$$\text{tr } M_S^*(X)Y = \text{tr } X(SY - YS) = \text{tr } (XS - SX) Y,$$

donc

$$M_S^*(X) = XS - SX.$$

On voit que le noyau de M_S^* est l'espace $\text{com } S$:

THEOREME 1. Pour tout $S \in \mathcal{L}_s$, l'espace vectoriel tangent en ce point à l'orbite de S est l'orthogonal de $\text{com } S$ dans $\mathcal{L}_s$.

A. 5. DIFFERENTIABILITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE ISOTROPE SUR $\mathcal{L}_s$

Soit D une partie de $\mathcal{L}_s$ stable pour $\mathcal{O}_+$, c'est-à-dire une réunion d'orbites. On dit que $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ est isotrope si

$$\forall S \in D, \forall R \in \mathcal{O}_+ : \varphi(S) = \varphi(R^* S R).$$

THEOREME 2. Soit A intérieur à D ; la fonction $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$, supposée isotrope, est différentiable au point A si et seulement si sa restriction $\varphi|_{\text{com } A}$ au commutateur de A est différentiable au point A . Alors le gradient de φ en ce point au sens de l'autodualité de $\mathcal{L}_s$, est un élément de $\text{com } A$, égal au gradient de $\varphi|_{\text{com } A}$ au sens de l'autodualité de $\text{com } A$.

Démonstration. On a vu que l'application $R \mapsto R^* A R$ de $\mathcal{O}_+$ dans l'orbite $\mathcal{O}_+(A)$ est continûment différentiable de rang constant. D'après le théorème du rang, il existe donc une sous-variété $\mathcal{V}$ de $\mathcal{O}_+$, contenant I , telle que la restriction de l'application ci-dessus à $\mathcal{V}$ soit un difféomorphisme de $\mathcal{V}$ sur un voisinage de A dans $\mathcal{O}_+(A)$. L'application suivante de $\mathcal{V} \times \text{com } A$ dans $\mathcal{L}_s$

$$\mathcal{D} : (R, X) \mapsto R^* X R$$

est différentiable : son application linéaire tangente au point (R, X) de $\mathcal{V} \times \text{com } A$ s'écrit

$$(5) \quad (dR, dX) \mapsto d(R^* X R) = dR^* X R + R^* X dR + R^* dX R.$$

Cette application linéaire tangente dépend continûment de R et X ; pour $R = I$ et $X = A$ elle se réduit à

$$(6) \quad (dR, dX) \mapsto dR^* A + A dR + dX$$

où dR décrit l'espace vectoriel tangent à $\mathcal{V}$ au point I et où dX décrit $\text{com } A$. D'après la construction de la sous-variété $\mathcal{V}$ de $\mathcal{O}_+$, le terme $dR^* A + A dR$ décrit l'espace vectoriel tangent au point A de $\mathcal{O}_+(A)$; on a vu que c'est le supplémentaire orthogonal de $\text{com } A$ dans $\mathcal{L}_s$. L'application (6) est donc de rang égal à $\dim \mathcal{L}_s$, c'est-à-dire de rang maximal. Par continuité, le rang de l'application (5) est une fonction s.c.i. de (R, X) ; il existe donc un voisinage de (I, A) dans

$U \times \text{com } A$ sur lequel ce rang conserve la valeur $\dim \mathcal{L}_S$. On en conclut l'existence d'un voisinage de (I, A) dans $U \times \text{com } A$ que l'application δ envoie difféomorphiquement sur un voisinage U de A dans $\mathcal{L}_S$. Alors δ^{-1} est une application différentiable de U dans $U \times \text{com } A$; notons P sa seconde projection, application différentiable de U dans $\text{com } A$. On a $P(A) = A$ et on voit par (6) que l'application linéaire tangente en ce point à P est la projection orthogonale

$$dS \mapsto \text{proj}(dS, \text{com } A).$$

Enfin, la définition de δ fait que

$$(7) \quad \forall S \in U : P(S) \in \mathcal{C}_+(S).$$

Supposons alors A intérieur au domaine D de la fonction isotrope φ ; notons ψ la restriction $\varphi|_{\text{com } A}$. D'après (7)

$$\forall S \in U : \varphi(S) = \psi(P(S)).$$

La différentiabilité de ψ au point A entraîne donc celle de φ ; en outre, si $G \in \text{com } A$ est le gradient de ψ au point A , il résulte de (7) que l'application linéaire tangente à φ au point A est

$$dS \mapsto \langle G, \text{proj } dS \rangle = \langle G, dS \rangle$$

ce qui montre que G est aussi le gradient de φ au sens de l'auto-dualité de $\mathcal{L}_S$.

Inversement, la différentiabilité de φ au point A implique banalement celle de ψ . Pour achever la démonstration du théorème il faut établir que l'isotropie de φ implique $\text{grad } \varphi(A) \in \text{com } A$. De fait, si φ est constant sur l'orbite $\mathcal{C}_+(A)$, l'élément $\text{grad } \varphi(A)$ est dans l'orthogonal de l'espace tangent au point A de l'orbite; on a vu au § 4 que cet orthogonal est précisément $\text{com } A$.

REMARQUE. Le mode de raisonnement ci-dessus fournit en outre : Si D est un ouvert de $\mathcal{L}_S$ stable pour $\mathcal{C}_+$ et si $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$, différentiable, satisfait

$$(8) \quad \forall A \in D : \text{grad } \varphi(A) \in \text{com } A$$

la fonction φ est isotrope. Réciproquement, le théorème ci-dessus affirme que l'isotropie de φ entraîne (8); pour $\dim V$ impaire, on trouvera en A. 8 le résultat plus fort : $\text{com } A \subset \text{com grad } \varphi(A)$.

A. 6. ISOTROPIE DE L'APPLICATION GRADIENT

Soit D une partie de $\mathcal{L}_S$ stable pour $\mathcal{C}_+$; on dit que

$\delta : D \rightarrow \mathcal{L}_S$ est isotrope si

$$(9) \quad \forall S \in D, \forall R \in \mathcal{C}_+ : \delta(R^* S R) = R^* \delta(S) R.$$

THEOREME 3. Soit D un ouvert de $\mathcal{L}_S$ stable pour $\mathcal{C}_+$ et soit $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$, différentiable. Cette fonction scalaire est isotrope si et seulement si l'application $\text{grad } \varphi : D \rightarrow \mathcal{L}_S$ est isotrope.

Preuve. Que l'isotropie de φ entraîne celle de $\text{grad } \varphi$ résulte d'un calcul banal. Inversement, supposons que $\delta = \text{grad } \varphi$ possède la propriété (9). Soit R dans $\mathcal{C}_+$ et soit la fonction numérique définie sur D par

$$S \mapsto \varphi(R^* S R) - \varphi(S).$$

Sa différentielle s'écrit

$$\begin{aligned} & \langle \delta(R^* S R), d(R^* S R) \rangle - \langle \delta(S), dS \rangle \\ &= \text{tr } \delta(R^* S R) R^* dS R - \text{tr } \delta(S) dS = 0. \end{aligned}$$

La fonction en question est donc constante sur toute partie de D connexe par arc, par exemple sur l'orbite $\mathcal{C}_+(S)$. En posant

$$(10) \quad K(R) = \varphi(R^* S R) - \varphi(S)$$

on définit une fonction $K : \mathcal{O}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, continue et possédant la propriété

$$\forall R, R' \in \mathcal{O}_+ : K(R R') = K(R') + K(R) .$$

En effet

$$\begin{aligned} K(R R') &= \varphi(R^* R^* S R R') - \varphi(R^* S R) + \varphi(R^* S R) - \varphi(S) \\ &= K(R') + K(R) \end{aligned}$$

puisque $R^* S R \in \mathcal{O}_+(S)$. Donc K est un homomorphisme continu de $\mathcal{O}_+$ dans le groupe topologique $(\mathbb{R}, +)$; puisque $\mathcal{O}_+$ est compact, l'image $K(\mathcal{O}_+)$ est un sous-groupe compact de $(\mathbb{R}, +)$; cela exige classiquement $K(\mathcal{O}_+) = \{0\}$, d'où l'isotropie de φ par (10).

REMARQUE 1. Alors que l'isotropie de φ entraîne celle de $\text{grad } \varphi$ par un calcul purement local, l'implication réciproque vient d'être établie par l'argument de compacité de $\mathcal{O}_+$, propriété globale. L'exemple plus familier des fonctions numériques isotropes sur un espace vectoriel euclidien fait comprendre ceci : l'isotropie locale de $\varphi = \text{grad } \varphi$, c'est-à-dire l'existence d'un voisinage $\mathcal{U}$ de I dans $\mathcal{O}_+$ tel que

$$\forall R \in \mathcal{U}, \forall S \in \mathcal{I}_S : \varphi(R^* S R) = R^* \varphi(S) R$$

n'implique pas l'isotropie locale de φ . Elle implique simplement que, si $S' = R^* S R$, $R \in \mathcal{U}$, les hypersurfaces de niveau de φ issues de S et S' se déduisent l'une de l'autre par l'action de R ; ces deux hypersurfaces ne sont pas nécessairement confondues.

REMARQUE 2. Si l'ouvert D est étoilé par rapport au zéro de $\mathcal{I}_S$, on peut établir l'isotropie de φ à partir de celle de $\text{grad } \varphi$ par l'argument plus élémentaire que voici, dû à C. Vallée [10] : on introduit une variable réelle $t \in [0, 1]$ et on écrit

$$\begin{aligned} \varphi(S) &= \varphi(0) + \int_0^1 \langle \text{grad } \varphi(ts), d(ts) \rangle \\ &= \varphi(0) + \int_0^1 \text{tr grad } \varphi(ts) S \, dt \end{aligned}$$

(on admet ici que la fonction réelle $t \mapsto \varphi(ts)$ est intégrale de sa dérivée, ce qui dans les cas usuels est assuré). Or on vérifie immédiatement que, si $\text{grad } \varphi$ est isotrope, la quantité sous le signe $\int$ est inaltérée lorsqu'on remplace S par $R^* S R$. Le raisonnement vaut plus généralement si D est étoilé par rapport à un élément S_0 de $\mathcal{I}_S$, isotrope, c'est-à-dire de la forme $S_0 = sI$, $s \in \mathbb{R}$.

A. 7. GROUPE D'ISOMETRIE D'UN ELEMENT DE $\mathcal{I}_S$

Soit $S \in \mathcal{I}_S$; l'ensemble des $R \in \mathcal{O}_+$ tels que $R^* S R = S$ (ce qui équivaut à $R S = S R$) est un sous-groupe de $\mathcal{O}_+$, noté $\mathcal{G}(S)$, que nous appellerons groupe d'isométrie (directe) de S .

Si $\varphi : D \rightarrow \mathcal{I}_S$ est isotrope au sens de (9) on a immédiatement

$$(11) \quad \mathcal{G}(S) \subset \mathcal{G}(\varphi(S)) .$$

En particulier le groupe d'isométrie (directe) d'un élément de $\mathcal{I}_S$ est $\mathcal{O}_+$ tout entier si et seulement si cet élément est de la forme λI , $\lambda \in \mathbb{R}$. Il vient donc que, si φ est isotrope, $\varphi(\lambda I)$ est nécessairement de la forme μI où $\mu \in \mathbb{R}$ est une fonction de λ .

Soit $e \in V$, de norme unité ; on vérifie que l'élément

$$r_e = 2 e \otimes e - I$$

satisfait $r_e = r_e^*$ et $r_e r_e = I$, donc est orthogonal ; mais il n'appartient à $\mathcal{O}_+$ que si $\dim V$ est impair.

Par ailleurs, pour un $S \in \mathcal{L}$, la condition $r_e S = S r_e$ équivaut à $(e \otimes e) S = S(e \otimes e)$ c'est-à-dire (cf. § A. 2.) "e vecteur propre de S".

Donc, si $\dim V$ impair, l'inclusion $g(S) \subset g(S')$ entraîne que tout vecteur propre de S est vecteur propre de S'. On a vu que les $e \otimes e$, pour e décrivant l'ensemble des vecteurs propres de S, engendrent l'espace vectoriel $\text{com } S$; cela donne l'implication :

$$(12) \quad \dim V \text{ impair}, g(S) \subset g(S') \Rightarrow \text{com } S \subset \text{com } S'.$$

En rapprochant de (11) on conclut alors : Si $\dim V$ est impair et $\mathfrak{f} : D \rightarrow \mathcal{L}_S$ isotrope on a

$$(13) \quad \text{com } S \subset \text{com } \mathfrak{f}(S)$$

ce qui entraîne en particulier $S \mathfrak{f}(S) = \mathfrak{f}(S) S$.

Cela ne vaut plus pour $\dim V$ pair; de fait, en prenant $\dim V = 2$, auquel cas le groupe $\mathcal{G}_+$ est abélien, on a tout de suite le contre-exemple (R_0 fixé dans $\mathcal{G}_+$)

$$\mathfrak{f}(S) = R_0 S$$

qui est visiblement une application isotrope; si l'angle de la rotation R_0 n'est pas un multiple de $\frac{\pi}{2}$, S et $R_0 S$ ne commutent pas, en général.

Pour $\dim V$ pair, on peut naturellement reprendre tout ce qui précède en remplaçant $\mathcal{G}_+$ par le groupe orthogonal $\mathcal{O}$ entier.

A. 8. APPLICATIONS SIMPLES DE $\mathcal{L}_S$ DANS LUI-MEME

DEFINITION. Est appelée simple toute application d'une partie de $\mathcal{L}_S$ dans $\mathcal{L}_S$ définie comme suit : est donnée une fonction de variable réelle $f : \text{dom } f \rightarrow \mathbb{R}$; pour tout $x \in \mathcal{L}_S$ dont le spectre $\text{sp } x$ est

contenu dans $\text{dom } f$ on considère les espaces propres $E(\lambda)$, $\lambda \in \text{sp } x$ (lesquels forment une décomposition de V en somme directe orthogonale). Par définition, la valeur en x de l'application est l'élément de $\mathcal{L}_S$ dont la restriction à chaque $E(\lambda)$ est égale à $f(\lambda) I$. Par abus d'écriture, on notera $f(x)$ cet élément de $\mathcal{L}_S$.

Bref, si on utilise dans V une base principale de x, la matrice de x a la forme

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_p \end{bmatrix}$$

et celle de $f(x)$ la forme

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & & 0 \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(\lambda_p) \end{bmatrix}$$

Il est clair que le domaine de cette application

$$D = \{x \in \mathcal{L}_S : \text{sp } x \subset \text{dom } f \subset \mathbb{R}\}$$

est une partie de $\mathcal{L}_S$ stable par $\mathcal{G}_+$ et que l'application est isotrope.

Le domaine D est un ouvert de $\mathcal{L}_S$ si et seulement si $\text{dom } f$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Désormais, on notera également f l'application $x \mapsto f(x)$ de D dans $\mathcal{L}_S$; évidemment $f(D)$ est une partie de $\mathcal{L}_S$ stable par $\mathcal{G}_+$.

THEOREME 4. On suppose $\dim V$ impair; soit φ une fonction réelle isotrope et différentiable au moins au point $f(S)$ de $\mathcal{L}_S$. Si la dérivée f' de la fonction de variable réelle f existe au moins aux

divers points de $\text{sp } S$, l'application $\varphi \circ f : X \mapsto \varphi(f(X))$ est différentiable au point S et son gradient est égal au produit, commutatif, des deux éléments $\text{grad } \varphi(f(S))$ et $f'(S)$ de $\mathcal{L}_S$.

Démonstration. L'application $\varphi \circ f$ est isotrope, donc, d'après le Théorème 2, il suffit d'étudier la différentiabilité au point S de sa restriction à $\text{com } S$. Soit $\delta S \in \text{com } S$; il existe une base de V qui est principale pour S et δS ; relativement à cette base, les matrices de S et δS sont diagonales, d'éléments diagonaux respectifs λ_i et $\delta \lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. La matrice de $f(S)$ est diagonale aussi, de même que celle de $f(S + \delta S)$, d'éléments diagonaux

$$f(\lambda_i + \delta \lambda_i) = f(\lambda_i) + f'(\lambda_i) \delta \lambda_i + o(\delta \lambda_i)$$

d'où l'égalité suivante, à termes dans $\text{com } S$,

$$f(S + \delta S) - f(S) = f'(S) \delta S + o(\|\delta S\|).$$

Les majorations impliquées dans l'écriture $o(\|\delta S\|)$ dépendent du comportement de la fonction de variable réelle f au voisinage des valeurs propres de S , mais non de la base, dépendant a priori de δS , qu'on a dû choisir.

Puisque φ est différentiable, on a

$$\begin{aligned} \varphi(f(S + \delta S)) - \varphi(f(S)) &= \langle \text{grad } \varphi(f(S)), f(S + \delta S) - f(S) \rangle \\ &+ o(\|f(S + \delta S) - f(S)\|) \end{aligned}$$

$$= \text{tr}(\text{grad } \varphi(f(S)) f'(S) \delta S) + o(\|\delta S\|)$$

pour tout $\delta S \in \text{com } S$. Cela montre que $\varphi \circ f$ est différentiable au point S dans $\text{com } S$ donc, d'après le § A. 5, différentiable au point S dans $\mathcal{L}_S$. Pour pouvoir affirmer que le gradient de $\varphi \circ f$ au point S est l'élément $\text{grad } \varphi(f(S)) f'(S)$, il reste à s'assurer que cet élément appartient à $\text{com } S$. De fait, puisque $\dim V$ est impair, on a

d'après le paragraphe A. 7,

$$\text{com } f(S) \subset \text{com } \text{grad } \varphi(f(S))$$

d'où le résultat, en invoquant une base diagonalisant S , donc diagonalisant aussi $f(S)$ et $f'(S)$.

REMARQUE 1. Si la fonction réelle de variable réelle f égale la dérivée d'une fonction F , l'élément $f(S)$ de $\mathcal{L}_S$ est le gradient de la fonction à valeurs réelles

$$S \mapsto \text{tr } F(S).$$

En effet, cette fonction étant isotrope, il suffit de raisonner sur sa restriction à $\text{com } S$, ce qui est immédiat. En particulier $\text{grad } \text{tr } S = I$. Par ailleurs

$$\det \exp S = \exp \text{tr } S$$

d'où

$$(14) \quad \text{grad } \det \exp S = (\exp \text{tr } S) I.$$

REMARQUE 2. Le Théorème 4 est, formellement, ce qui donnerait la règle de différentiation des fonctions composées si l'application $S \mapsto f(S)$ admettait comme application linéaire tangente au point S

$$(15) \quad dS \mapsto f'(S) dS.$$

En effet, si cela était, on écrirait

$$\begin{aligned} (16) \quad d(\varphi \circ f)(S) &= \langle \text{grad } \varphi(f(S)), df(S) \rangle = \langle \text{grad } \varphi(f(S)), f'(S) dS \rangle \\ &= \text{tr } \text{grad } \varphi(f(S)) f'(S) dS \\ &= \langle \text{grad } \varphi(f(S)) f'(S), dS \rangle. \end{aligned}$$

Mais (15) n'est pas en général l'application linéaire tangente à $S \mapsto f(S)$: par exemple, si la fonction de variable réelle f est définie par une série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

on trouve

$$f(S) = a_0 I + \sum_{n=1}^{\infty} a_n S^n$$

et on a, en un point intérieur du domaine de convergence de cette dernière série,

$$df(S) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (dS S \dots S + S dS \dots S + \dots + S S \dots dS) ,$$

série dont le terme général ne se réduit pas, si $dS \not\propto S$, au terme général $a_n S^{n-1} dS$ de la série $f'(S) dS$. C. Vallée (communication orale) nous fait observer que, dans le cas d'une f série entière, le calcul (16) peut être sauvé en notant que, si $G = \text{grad } \Phi(f(S))$,

$$\text{tr } G(dS S \dots S + S dS \dots S + \dots + S S \dots dS) = \text{tr } G n S^{n-1} dS .$$

Ainsi se justifie la démonstration donnée par cet auteur dans [10]

(avec $f(S) = \text{Log } S$ fonction représentée par une série entière en $S-I$, au moins si toutes les valeurs propres de $S-I$ sont de valeur absolue moindre que 1 : on se ramènera à ce cas en multipliant d'abord S par un scalaire convenable).

REFERENCES

- [1] P. GERMAIN, Cours de mécanique des milieux continus, t. 1, Masson Paris, 1973.
- [2] C. TRUESDELL, W. NOLL, The non-linear field theories of mechanics, in (S. FLÜGGE, ed.) Handbuch der Physik, b. III/3, Springer, 1965.
- [3] C.C. WANG, C. TRUESDELL, Introduction to rational elasticity, Nordhoff, London, 1973.
- [4] W. NOLL, A new mathematical theory of simple materials, Arch. Rational Mech. Anal., 48 (1972), 1-50.
- [5] P. ROUGÉE, Formulation lagrangienne intrinsèque en mécanique des milieux continus, à paraître.
- [6] J.J. MOREAU, Mécanique classique, t. I, Masson, Paris, 1968.
- [7] C. TRUESDELL, Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus, Masson, Paris, 1974.
- [8] B.D. COLEMAN, W. NOLL, Material symmetry and thermodynamic inequalities in finite elastic deformations, Arch. Rational Mech. Anal., 15 (1964), 87-111.
- [9] J. DIEUDONNE, Eléments d'Analyse, t. 1 et 3, Gauthier-Villars, Paris.
- [10] C. VALLEE, Lois de comportement élastique isotrope en grandes déformations, Int. J. Engng. Sci. 16 (1978), 451-457
- [11] J.J. MOREAU, Sur la notion de système de références fluide en hydrodynamique, Congrès National de l'Aviation Française, I, 1945, Paris, rapport n° 368, 11 p.