Zum Gesetz der elastischen Dehnungen.

Von

R. Mehmke

in Stuttgart.

Die Grundlage der Elastizitäts- und Festigkeitslehre bildet auch in den neuesten Darstellungen, die ihr zu Teil geworden sind, noch immer der 1660 von Robert Hooke gefundene, 18 Jahre später von ihm veröffentlichte Satz, dass die Kraft, mit der ein elastischer Körper die natürliche Lage seiner Teile wieder herzustellen sucht, dem Betrage proportional sei, um den jene Teile, einerlei ob durch Zug oder durch Druck, daraus entfernt worden waren. Auf einen in seiner Längsrichtung gezogenen oder gedrückten Stab angewendet und durch eine Gleichung ausgedrückt heisst dies:

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \alpha\sigma,$$

wo σ die in dem Stab hervorgerufene (positive bezw. negative) Spannung, ε die zugehörige (positive bezw. negative) Dehnung, E eine für jedes Material konstant vorausgesetzte Grösse, den sogenannten Elastizitätsmodul, $\alpha = 1 : E$ den „Dehnungskoeffizienten“* bezeichnet. Das „Hookesche Gesetz“ oder, wie es auch genannt wird, das Gesetz der Proportionalität zwischen Spannung und Dehnung, oder das lineare Spannungs-Dehnungs-Gesetz, hat zwar zu keiner Zeit unbedingte Anerkennung gefunden; führten doch die, namentlich von seiten der Ingenieure in überaus grosser Zahl angestellten Zug-, Druck- und Biegungsversuche immer wieder — namentlich bei einzelnen für die Technik wichtigen Stoffen, wie Gusseisen, Stein, Holz — mehr oder minder bedeutende, auf keinen Fall zu übersehende Abweichungen vor Augen. Nachdem aber durch die Experimente mehrerer Physiker (Wertheim 1848, Morin 1862, Edlund 1861, 1865, Miller 1882) das Hookesche Gesetz scheinbar bestätigt worden war, drohte es zum Dogma zu werden; hat man es doch sogar schon als selbstverständlich oder aus Gründen allgemeiner Art folgend hingestellt.** Und während die Techniker dasselbe längst einer erneuten Kritik unterzogen hatten, ist dies seitens der Physiker erst 1891 geschehen. In diesem Jahre ist nämlich von J. O. Thompson durch Zugversuche mit 23 m langen Kupfer-, Stahl-, Messing- und Silberdrähten, die er unter F. Kohlrausch im physikalischen Institut der Universität Strassburg ausgeführt hat, nachgewiesen worden, dass auch bei geringen Belastungen das Proportionalitätsgesetz nur eine Annäherung an das wirkliche

* C. Bach, Elastizität und Festigkeit, § 2, 1. Auflage. Stuttgart 1889.

** Siehe z. B.: F. Auerbach in Winkelmanns Handbuch der Physik, Bd. I, S 218, 1891.

Elastizitätsgesetz darstellt.* Thompson zeigt unter anderem, dass die (dem spannungslosen Zustand entsprechenden) wahren Elastizitätsmoduln bis 10 Prozent grösser sein können als die auf dem früher üblichen Wege ermittelten, weshalb er es für notwendig hält, physikalische Konstanten, die von dem Elastizitätsmodul abhängen, neu zu berechnen. Wenn, wie oben erwähnt wurde, die Ergebnisse einiger früheren Beobachter mit dem Hookeschen Gesetze sich scheinbar im Einklang befinden, so erklärt dies Thompson auf sehr glaubhafte Weise dadurch, dass jene Beobachter gewisse Fehlerquellen (Krümmungen und Knicke in den Drähten, elastische Nachwirkung) nicht zu beseitigen verstanden haben. Wir sehen hier den eigentümlichen Fall, dass die Physiker eine Zeit lang den Fortschritt in der Erkenntnis der Wirklichkeit gehemmt und indirekt die Entwickelung eines wichtigen Zweiges der Ingenieurwissenschaften aufgehalten haben. Nach einem Ausspruche, den C. Bach neuerdings gethan hat,** „gestatten die Anforderungen, welche die Technik an den Ingenieur stellt, heute nicht mehr — wenigstens in verschiedenen Fällen der Anwendung — die Beziehung $\varepsilon = \alpha\sigma$, welche nur für eine Minderheit von Stoffen innerhalb gewisser Grenzen als zutreffend erscheint, als allgemeines Gesetz anzusehen und zur Grundlage der gesamten Elastizitäts- und Festigkeitslehre zu machen.“

Es fehlt nicht an Versuchen, an Stelle obiger Gleichung eine dem thatsächlichen Verhalten elastischer Körper besser entsprechende zu setzen und für die Festigkeitslehre nutzbar zu machen, aber keiner scheint in weiteren Kreisen Beachtung gefunden zu haben. Nun hat im Anfange dieses Jahres C. Bach ein allgemeines Gesetz der elastischen Dehnungen veröffentlicht,*** das von einem seiner Schüler, Herrn W. Schüle, aus den Ergebnissen umfangreicher, sich über mehr als ein Jahrzehnt erstreckender Versuche Bachs abgeleitet worden ist. Es lautet:
$$\varepsilon = \alpha\sigma^m;$$
α und m bezeichnen Konstanten, die vom Material abhängen und bei einem und demselben Material für Druck andere Werte haben, als für Zug. Als eine die Form andeutende Benennung dafür schlage ich „Potenzgesetz“ vor.† Der Exponent m liegt in der Regel — bei Gusseisen, Kupfer, Körpern aus Cement u.s.w. — zwischen 1 und 2, seltener,

* Joseph Osgood Thompson, Über das Gesetz der elastischen Dehnung, Wiedemanns Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge Bd. 44, S. 555 bis 576, 1891.

** C. Bach, Abhandlungen und Berichte, S. 294, Stuttgart 1897.

*** Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. 41, S. 248 bis 252, 1897. Übrigens ist, wie ich allerdings erst nachträglich bemerkt habe, das gleiche Gesetz schon früher in Vorschlag gebracht worden, 1729 von Bülffinger und 1822 von Hodgkinson (siehe die später folgende Zusammenstellung).

† Vergl. A. Steinhauser, Die Lehre von der Aufstellung empirischer Formeln, S. 173, 1889.

wie bei Leder, zwischen 0 und 1. Nur bei einer mässigen Zahl der in der Technik verwendeten Stoffe — Schmiedeisen und Stahl gehören zu ihnen — nähert sich m in beträchtlichem Grade dem Grenzwert 1, für den das Potenzgesetz in das Hookesche übergeht.

Das Potenzgesetz besticht durch seine Eleganz und giebt, wie sich zeigen wird, in den wichtigen Fällen des Gusseisens und der Körper aus Cement und Cementmörtel die Versuchsergebnisse besser wieder, als andere empirische Formeln mit nur zwei Konstanten. Es hat zugleich eine für die logarithmische Rechnung bequeme Gestalt und wird sich deshalb für manche Anwendungen vermutlich sehr gut eignen. Wenn man jedoch versucht, auch nur die Lehre von der Biegung gerader Balken diesem Gesetz gemäss umzugestalten, stösst man auf mathematische Schwierigkeiten. Nicht allein treten an Stelle des statischen und des Trägheitsmomentes, mit denen man in der alten Biegungslehre auskam, Integrale, die schon bei ganz einfachen Querschnittformen sich nicht mittels bekannter Funktionen auswerten lassen, es versagen auch bei diesen Integralen, die eine Art höherer Momente bilden, die meisten Methoden zur graphischen und mechanischen Bestimmung von Momenten höherer Ordnung, weil sie nur bei Momenten mit ganzzahliger Ordnung anwendbar sind. Die Aufgabe lässt sich zwar durch Benützung graphischer Hilfsmittel lösen, es schien mir jedoch von Wert, zu untersuchen, ob nicht innerhalb derselben Grenzen, zwischen denen das Potenzgesetz in guter Übereinstimmung mit den Beobachtungen gefunden worden ist, letztere mit hinreichender Genauigkeit durch eines der anderen früher vorgeschlagenen, dem fraglichen Zweck sich leichter anpassenden Gesetze, insbesondere das parabolische, dargestellt werden könnten. Indem ich mir vorbehalte, auf die Folgerungen für die Biegungslehre später einzugehen, beschränke ich mich heute darauf, sämtliche mir bekannt gewordenen Formeln, durch die man die Abhängigkeit der elastischen Dehnung von der Spannung teils allgemein, teils bei einzelnen bestimmten Stoffen hat ausdrücken wollen, zusammenzustellen und die Ergebnisse meiner, zur Prüfung des Potenzgesetzes unternommenen Rechnungen, die ich zu gelegenerer Zeit fortzusetzen gedenke, mitzuteilen.

I. Zusammenstellung der bis jetzt vorgeschlagenen empirischen Formeln zur Darstellung der Abhängigkeit der elastischen Dehnung von der Spannung.

(Ergänzungen vorbehalten.)

Des leichteren Vergleiches wegen sind die Bezeichnungen der verschiedenen Verfasser nicht immer beibehalten und ihre Gleichungen zum Teil umgeformt worden. Wo keine Materialien genannt sind, ist das betreffende Gesetz von seinem Urheber als für eine Vielzahl von solchen oder allgemein giltig gedacht, und zwar, wenn die Angabe der Art der Beanspruchung fehlt, für Zug sowohl als für Druck.

ε = elastische Dehnung oder Zusammendrückung (Stauchung), bezogen auf die Längeneinheit; σ = Spannung bezw. Pressung, bezogen auf die Flächeneinheit des Querschnittes; α, β, γ, a, b, c, d, m vom Material (und in der Regel auch von der Art der Beanspruchung) abhängige Konstanten.

1. Lineares Gesetz: $\varepsilon = \alpha\sigma$. Hooke 1678.
2. Potenzgesetz: $\varepsilon = \alpha\sigma^m$. Bülffinger 1729 (Zug). Hodgkinson 1822. Bach-Schüle 1897.
3. Parabolisches Gesetz: $\sigma = a\varepsilon - b\varepsilon^2$. Hodgkinson 1849 (Gusseisen). Hartig 1893 (Gusseisen, Cement u. Cementmörtel).
4. Hyperbolische Gesetze:

a) $$\varepsilon = \frac{\sigma}{a - b\sigma}.$$

Cox 1850 (Gusseisen). Lang 1896 (Gusseisen, Steine, Mörtel).

b) $$\varepsilon^2 = a\sigma^2 + b\sigma.$$

Wertheim 1847 (organische Gewebe).

5. Kubisch- und biquadratisch-parabolisches Gesetz:

a) $\sigma = a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c\varepsilon^3$. Cox 1850 (Gusseisen).

$\varepsilon = \alpha\sigma + \beta\sigma^2 + \gamma\sigma^3$.

J. O. Thompson 1891 (Metalle, Zug).

b) $\sigma = a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c\varepsilon^3 + d\varepsilon^4$. Hodgkinson 1849 (Gusseisen).

6. Exponentialgesetze:

a) $\sigma = ce^{-\frac{1}{\varepsilon}}$. Riccati 1731.

b) $\varepsilon = e^{m\sigma} - 1$. Imbert 1880 (Kautschuk).

c) $\sigma = c(e^{m\varepsilon} - 1)$.

Hartig 1893 (Leder, Zug; gebrannter roter Thon, Druck).

d) $\varepsilon = \sigma(a + be^{m\sigma})$. Poncelet 1839 (Messing, Zug).

e) $\sigma = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot e^{m\varepsilon}$. Hartig 1893 (Kork, Druck).

Litteratur und Bemerkungen zu vorstehender Zusammenstellung.

1. † Robert Hooke, De potentia restitutiva, London 1678. Die Arbeiten, deren Titel † vorgesetzt ist, sind mir bis jetzt nicht zugänglich gewesen; ich führe dieselben grösstenteils nach folgendem ungemein reichhaltigen Werke an: Isaac Todhunter-Karl Pearson, A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to the present time, vol. I. 1886, vol. II. 1893.

2. De solidorum resistentia specimen G. B. Bulffingeri, Commentarii Academiae Petropolitanae, t. 4, ad annum 1729, p. 164—181. Petropoli 1735. — Eaton Hodgkinson, On the transverse strain, and strength of materials, Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester, Second series, vol. 4, S. 225—289. London 1824 (gelesen 1822). — C. Bach, Allgemeines Gesetz der elastischen Dehnungen, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. 41, S. 248—252, 1897.

3. † E. Hodgkinson, Report of the Commissioners appointed to inquire into the application of iron to railway structures. Appendix A, p. 47—67. London 1849. — E. Hartig, Der Elastizitätsmodul des geraden Stabes als Funktion der spezifischen Beanspruchung, Civilingenieur Bd. 39, S. 113—138, 1893. Derselbe, Das elastische Verhalten der Mörtel und Mörtelbindematerialien, Ebenda S. 425 bis 472. — Im Gegensatz zu Hodgkinson giebt Hartig den Koeffizienten a, b bei Druck dieselben Werte, wie bei Zug.

4. a) Homersham Cox, The deflection of imperfectly elastic beams and the hyperbolic law of elasticity, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, vol. 9, part. 2, p. 177—190, 1851 (gelesen 1850). — G. Lang, Der Schornsteinbau, Heft 2, S. 127, 1896. Lang berücksichtigt auch die Temperatur; er nennt $E = \sigma : \varepsilon$ das Elastizitätsmaß und setzt:

$$E = E_0 - c \cdot t - d \cdot \sigma,$$

wo E_0 das Elastizitätsmaß für den spannungslosen Zustand bei 0° C bezeichnet, c und d Erfahrungszahlen sind. Die Spannungs-Dehnungs-Formel wird dann

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0 - c \cdot t - d \cdot \varepsilon}.$$

Föppl giebt in seiner soeben erschienenen Festigkeitslehre (3. Bd. seiner Vorlesungen über technische Mechanik) auf S. 54 (unter Hinweis auf eine Abhandlung von Lang in der deutschen Bauzeitung, Jahrgang 1897, S. 54) als „Langsche Formel" die Gleichung $E = E_0 - c\sigma$. Er sagt, der Elastizitätsmodul E sei von Lang anscheinend im Sinne von $E = d\sigma / d\varepsilon$ verstanden worden, und leitet dementsprechend durch Integration die Gleichung

$$\varepsilon = \frac{1}{c} \lg \frac{E_0}{E_0 - c\sigma}$$

ab; daneben stellt er auch im Anschluss an die zweite mögliche Definition des Elastizitätsmoduls, $E = \sigma ; \varepsilon$, die Gleichung

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0 - c\sigma}$$

auf (a. a. O. S. 55, Gleichungen 26) und 27). Die erste dieser Gleichungen stimmt inhaltlich mit dem von Hartig bei Leder und rotem Thon gebrauchten Exponentialgesetz (7c der obigen Zusammenstellung) überein. Dass aber Lang nicht dieses Gesetz, sondern das hyperpolische im Auge gehabt hat, geht daraus hervor, dass er in der von Föppl zitierten Abhandlung in einem Beispiel als Bild der Spannungsverteilung eine aus zwei Hyperbelbögen zusammengesetzte Kurve angiebt und zeichnet, und es ist mir dies auch auf meine briefliche Anfrage von Herrn Lang bestätigt worden.

4. b) † G. Wertheim, Mémoire sur l'élasticité et la cohésion des principeaux tissus du corps humain. Annales de Chimie, t. 21, p. 355—414. Paris 1847. A. W. Volkmann († Über die Elastizität der organischen Gewebe, Archiv für Anatomie, Physiologie u. s. w, Bd. 1, S. 293—313, Leipzig 1859) hat gefunden, dass bei Seidenfäden, menschlichem Haar, Arterien, Nerven der Koefficient a positiv ist, bei Muskeln dagegen negativ, in welchem Falle also die Spannungs-Dehnungs-Kurve eine Ellipse wäre.

5. a) Cox a. a. O. (siehe unter 4a). — Joseph Osgood Thompson, Über das Gesetz der elastischen Dehnung, Wiedemanns Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge Bd. 44, S. 555—576, 1891. b) Hodgkinson, siehe unter 3.

6. a) Jacobi Riccati, Verae et germanae virium elasticarum leges ex phaenomenis demonstratae, De Bononiensi Academia Commentarii. t. 1, p. **523**—**544**, Bononiae 1731. — b) † A Imbert, Recherches théoriques et expérimentales sur l'élasticité du caoutchouc, Lyon 1880 (nach Hartig angeführt). — c) Hartig in der unter 3 angeführten Abhandlung „Der Elastizitätsmodul des geraden Stabes...". — d) J. V. Poncelet, Introduction à la mécanique industrielle, physique et expérimentale, 2ème édition, p. 348. Metz 1839.

Zu den in obiger Zusammenstellung gebrauchten Benennungen sei folgendes bemerkt. Nach einer aus dem Jahre 1850 stammenden Angabe von Cox (siehe unter 4a) trug damals schon die Voraussetzung, dass Proportionalität zwischen Spannung und elastischer Dehnung bestehe, in England den Namen „Dr. Hooke's law". Cox hat (a. a. O.) die Namen „parabolic law" und „hyperbolic law" eingeführt, Pearson, der Herausgeber der unter 1 erwähnten History of the theory of elasticity den ähnlich gebildeten „linear law" für das Hookesche Gesetz hinzugefügt. Natürlich sind alle diese „Gesetze" nur Annäherungen an das noch unbekannte (in der Überschrift dieser Mitteilung gemeinte) wahre Elastizitätsgesetz und es wäre deshalb gegen die Ersetzung obiger Namen durch weniger hochtönende gewiss nichts einzuwenden, nur müsste dann gleichzeitig mit den übrigen auch die Bezeichnung „Hookesches Gesetz" fallen, weil letzteres ja den engsten Giltigkeitsbereich hat.

Es ist nicht meine Absicht, hier schon in weitere Erörterungen über die obigen empirischen Formeln einzutreten, dieselben z. B. bezüglich ihrer Brauchbarkeit und der Grenzen ihrer Giltigkeit zu vergleichen, vielmehr betrachte ich diese Mitteilung nur als Vorläuferin einer Reihe weiterer, die nachfolgen sollen. Um Ingenieuren und Mathematikern die Wiederholung längst ausgeführter Untersuchungen zu ersparen, scheint es mir z. B. angezeigt zu sein, die ganz in Vergessenheit geratenen älteren Bestrebungen, Aufgaben der Festigkeitslehre ohne die Hookesche Annahme zu lösen, wieder ans Licht zu ziehen.

II. Beiträge zur Prüfung des Potenzgesetzes.

Für die sämtlichen Beispiele, die C. Bach in der wiederholt angeführten Arbeit (Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure Jahrg. 1897) zur Stützung des Potenzgesetzes heranzieht, habe ich aus den gegebenen Werten von σ und den zugehörigen beobachteten Werten von ε die Konstanten des in der Form

$$\varepsilon = \alpha\sigma + \beta\sigma^2$$

angenommenen parabolischen Gesetzes nach der Methode der kleinsten Quadratsummen bestimmt, für ein Beispiel auch die Konstanten des hyperbolischen und des kubisch-parabolischen Gesetzes. Die hiernach berechneten Werte von ε sind im folgenden mit den beobachteten und denjenigen, die das Potenzgesetz liefert, zusammengestellt, und zwar habe ich die letzteren (von W. Schüle berechneten) Werte einfach der Bachschen Arbeit entnommen. In den mit f überschriebenen Spalten stehen die Fehler (Differenzen aus den beobachteten und berechneten Werten) und am Fuss dieser Spalten die als Maß für die Brauchbarkeit der einzelnen Formeln dienenden mittleren Fehler. Die Spannungen sind in kg/qcm ausgedrückt.

Die Notwendigkeit derartiger Vergleiche, die leider sehr zeitraubende Rechnungen erfordern, leuchtet ein. Cox hat schon 1850 solche angestellt (nämlich zwischen dem parabolischen und dem von ihm vorgeschlagenen hyperbolischen Gesetz an den Ergebnissen der Zug- und Druckversuche mit Gusseisen von Hodgkinson) und Föppl hat sie neuerdings (a. a. O.) für die „Schülesche" und „Langsche" Formel (also das Potenzgesetz und das hyperbolische Gesetz nach der hier gebrauchten Benennung) gefordert.

1. Gusseisen, Druck.

Die ε sind in 1/600 cm ausgedrückt und beziehen sich auf 75 cm Länge:

Potenzformel: $\varepsilon = \frac{75 \cdot 600}{1381700} \sigma^{1,0663}$;

parabolische Formel: $\varepsilon = 0,04661 \cdot \sigma + 0,000004969 \cdot \sigma^2$;

hyperbolische Formel: $\varepsilon = \frac{0,04685 \cdot \sigma}{1 - 0,0000918 \cdot \sigma}$;

kubisch-parabol. Formel: $\varepsilon = 0,04385 \cdot \sigma + 0,0^4 1343 \cdot \sigma^2 - 0,0^8 5970 \cdot \sigma^3$.

σ	ε beob.	ε berechnet							
		Potenzgesetz	f	parab.	f	hyperb.	f	kub.-parab.	f
166	7,60	7,59	0,01	7,87	−0,27	7,90	−0,30	7,65	−0,05
333	15,88	15,94	−0,06	16,07	−0,19	16,09	−0,21	15,89	−0,01
499	24,60	24,54	0,06	24,50	0,10	24,50	0,10	24,54	0,06
666	33,42	33,38	0,04	33,25	0,17	33,23	0,19	33,44	−0,02
832	42,34	42,32	0,02	42,22	0,12	42,20	0,14	42,42	−0,08
998	51,31	51,38	−0,07	51,47	−0,16	51,47	−0,16	51,31	0,00
Mittlere Fehler:			0,06		0,22		0,24		0,057

Die Genauigkeit der Potenzformel ist hier auffallend gross und ungefähr gleich derjenigen der drei Konstanten enthaltenden kubisch-parabolischen Formel. Weil in diesem Beispiel die parabolische und die hyperbolische Formel annähernd gleich genau sind, habe ich letztere in den folgenden Beispielen nicht mehr berücksichtigt. Erst nach Beendigung meiner Rechnungen lernte ich die Vergleiche von Cox kennen, der die hyperbolische Formel 3 bis 4 mal genauer als die parabolische findet. Es bedarf dieser Punkt noch der Aufklärung.

2. Gusseisen, Zug.

Messlänge 15 cm, ε in 1/1000 cm.

Potenzformel: $\varepsilon = \frac{15 \cdot 1000}{1132700} \sigma^{1,395}$;

parabolische Formel: $\varepsilon = 0,01112 \cdot \sigma + 0,00001017 \cdot \sigma^2$.

Spannungsstufe	ε beob.	ε berechnet			
		Potenzgesetz	f	parab.	f
103,52 — 258,80	2,27	2,22	0,05	2,30	−0,03
103,52 — 414,08	5,07	5,07	0,00	5,09	−0,02
103,52 — 569,30	8,33	8,38	−0,05	8,37	−0,04
103,52 — 724,64	12,08	12,08	0,00	12,05	0,03
Mittlere Fehler:			0,05		0,044

Das parabolische und das Potenzgesetz stehen sich hier ziemlich gleich.

3. Körper aus reinem Cement, Druck.

Es ist ε ausgedrückt in 1/600 cm auf die Länge 75 cm.

Formeln:

Körper Ia: $\varepsilon = \frac{75 \cdot 600}{254841} \sigma^{1,0903}$, $\varepsilon = \frac{1,6715}{7,8} \sigma + \frac{0,05214}{7,8^2} \sigma^2$;

„ Ib: $\varepsilon = \frac{75 \cdot 600}{259131} \sigma^{1,0950}$, $\varepsilon = \frac{1,6998}{8,0} \sigma + \frac{0,05136}{8,0^2} \sigma^2$;

„Va u. Vb: $\varepsilon = \frac{75 \cdot 600}{231416} \sigma^{1,0928}$, $\varepsilon = \frac{1,8671}{7,9} \sigma + \frac{0,06008}{7,9^2} \sigma^2$.

Körper Ia.

σ	ε beob.	ε berechnet Potenz-gesetz	f	parab.	f
7,8	1,67	1,66	0,01	1,72	− 0,05
15,7	3,52	3,54	− 0,02	3,55	− 0,03
23,5	5,56	5,53	0,03	5,48	0,08
31,3	7,56	7,55	0,01	7,52	0,04
39,2	9,59	9,63	− 0,04	9,66	− 0,07
Mittlere Fehler:			0,032		0,074

Körper Ib.

σ	ε beob.	ε berechnet Potenz-gesetz	f	parab.	f
8,0	1,70	1,683	0,017	1,751	− 0,051
15,9	3,60	3,593	0,007	3,605	− 0,005
23,9	5,60	5,610	− 0,010	5,562	0,038
31,8	7,62	7,677	− 0,057	7,621	− 0,001
39,8	9,77	9,804	− 0,034	9,783	− 0,013
			0,040		0,038

Körper Va und Vb.

σ	ε beob.	ε berechnet Potenz-gesetz	f	parab.	f
7,9	1,865	1,859	0,006	1,927	− 0,062
15,8	3,945	3,965	− 0,020	3,976	− 0,031
23,7	6,175	6,178	− 0,003	6,142	0,033
31,6	8,485	8,460	0,025	8,430	0,055
39,5	10,795	10,796	− 0,001	10,838	− 0,043
Mittlere Fehler:			0,019		0,060

Die Potenzformel giebt hier durchschnittlich die bessere Annäherung.

4. Körper aus Cementmörtel, Druck.

Federung ε in 1/600 cm auf 75 cm Länge.

Formeln:

Körper IIa, b, c: $\varepsilon = \frac{75 \cdot 600}{355942} \sigma^{1,10984}$, $\varepsilon = \frac{1,3025}{8,1} \sigma + \frac{0,04779}{8,1^2} \sigma^2$;

„ IIIa, b, c: $\varepsilon = \frac{75 \cdot 600}{315239} \sigma^{1,14732}$, $\varepsilon = \frac{1,5769}{8,0} \sigma + \frac{0,07640}{8,0^2} \sigma^2$;

„ IVa, b, c: $\varepsilon = \frac{75 \cdot 600}{229026} \sigma^{1,16871}$, $\varepsilon = \frac{1,6351}{8,1} \sigma + \frac{0,08239}{8,1^2} \sigma^2$.

Körper IIa, b, c (1 Cement, $1^1/_2$ Sand).

σ	ε beob.	ε berechnet Potenz-gesetz	f	parab.	f
8,1	1,297	1,293	0,004	1,350	−0,053
16,2	2,796	2,791	0,005	2,796	±0,000
24,3	4,366	4,377	−0,011	4,338	0,028
32,3	6,023	6,024	−0,001	5,975	0,048
40,4	7,703	7,716	−0,013	7,707	−0,004
	Mittlere Fehler:		0,011		0,044

Körper IIIa, b, c (1 Cement, 3 Sand).

σ	ε beob.	ε berechnet Potenz-gesetz	f	parab.	f
8,0	1,550	1,550	±0,000	1,646	−0,096
16,0	3,457	3,435	0,022	3,459	−0,002
24,1	5,483	5,470	0,013	5,418	0,065
32,1	7,587	7,610	−0,023	7,530	0,057
40,1	9,783	9,831	−0,048	9,795	−0,012
	Mittlere Fehler:		0,034		0,075

Körper IVa, b, c (1 Cement, $4^1/_2$ Sand).

σ	ε beob.	ε berechnet Potenz-gesetz	f	parab.	f
8,1	1,625	1,624	0,001	1,717	−0,092
16,1	5,605	3,573	0,032	3,600	0,005
24,2	5,725	5,813	−0,088	5,647	0,078
32,2	7,875	7,938	−0,063	7,859	0,016
40,3	10,245	10,248	−0,003	10,235	0,010
	Mittlere Fehler:		0,065		0,071

Auch hier giebt die Potenzformel die bessere Annäherung; auffallend ist die absolute und relative Abnahme ihrer Genauigkeit mit der Menge des Sandzusatzes.

5. Körper aus Beton, Druck.

Federung ε ausgedrückt in 1/600 cm auf 75 cm Länge.

Formeln:

Körper XVIa, b, c: $\varepsilon = \frac{75\cdot 600}{217260}\sigma^{1,15662}, \quad \varepsilon = \frac{2,2237}{7,9}\sigma + \frac{0,1433}{7,9^2}\sigma^2;$

„ XVIIa, b, c: $\varepsilon = \frac{75\cdot 600}{367018}\sigma^{1,20677}, \quad \varepsilon = \frac{1,4415}{7,9}\sigma + \frac{0,1294}{7,9^2}\sigma^2.$

Körper XVIa, b, c.

σ	ε beob.	ε berechnet Potenzgesetz	f	parab.	f
7,9	2,287	2,263	0,024	2,367	− 0,080
15,9	5,017	5,045	− 0,028	5,021	− 0,004
23,8	8,013	8,066	− 0,053	7,961	0,052
31,7	11,193	11,250	− 0,057	11,188	0,005
39,6	14,680	14,536	0,144	14,702	− 0,022
	Mittlere Fehler:		0,097		0,057

Körper XVIIa, b, c.

σ	ε beob.	ε berechnet Potenzgesetz	f	parab.	f
7,9	1,487	1,497	− 0,010	1,571	− 0,084
15,8	3,400	3,414	− 0,014	3,400	± 0,000
23,7	5,523	5,570	− 0,047	5,489	0,034
31,6	7,867	7,881	− 0,014	7,836	0,031
39,5	10,410	10,317	0,093	10,441	− 0,031
	Mittlere Fehler:		0,062		0,058

Hier ist die Potenzformel im Nachteil.

6. Granit, Druck und Zug.

a) Druck:

Körp. I: ε in 1/600 cm auf 75 cm; $\varepsilon = \frac{75 \cdot 600}{249540} \sigma^{1,132}$, $\varepsilon = \frac{3,3928}{13,8} \sigma + \frac{0,2167}{13,8^2} \sigma^2$;

„ II: ε in 1/600 cm auf 50 cm; $\varepsilon = \frac{50 \cdot 600}{339750} \sigma^{1,109}$, $\varepsilon = \frac{1,7218}{14,9} \sigma + \frac{0,0911}{14,9^2} \sigma^2$.

Körper I.

σ	ε beob.	ε berechnet Potenzgesetz	f	parab.	f
13,8	3,50	3,50	± 0,00	3,61	− 0,11
27,75	7,76	7,76	± 0,00	7,65	0,11
41,3	12,09	12,17	− 0,08	12,13	− 0,04
	Mittlere Fehler:		0,08		0,16

Körper II.

σ	ε beob.	ε berechnet Potenzgesetz	f	parab.	f
14,9	1,77	1,77	± 0,00	1,81	− 0,04
29,7	3,85	3,79	0,06	3,81	0,04
44,6	5,97	5,96	0,01	5,99	− 0,02
	Mittlere Fehler:		0,06		0,06

b) Zug: Körper III: ε in 1/1200 cm auf 50 cm;

$$\varepsilon = \frac{50 \cdot 1200}{234600} \sigma^{1,374} = \frac{1,4983}{3,50} \sigma + \frac{0,2135}{3,50^2} \sigma^2.$$

σ	ε beob.	ε berechnet			
		Potenzgesetz	f	parab.	f
3,50	1,43	1,43	$\pm$0,00	1,71	−0,28
7,00	3,82	3,71	0,11	3,85	−0,03
14,00	9,61	9,61	$\pm$0,00	9,41	0,20
21,01	16,60	16,78	−0,18	16,68	−0,08
	Mittlere Fehler:		0,15		0,25

7. Kupfer, Zug.

Federnde Ausdehnung ε in 1/1000 cm auf 10 cm.

Formeln: $\varepsilon = \frac{10 \cdot 1000}{2084000} \sigma^{1,093}$, $\varepsilon = \frac{1,3537}{160,75} \sigma + \frac{0,0219}{160,75^2} \sigma^2$.

Spannungsstufe	ε beob	ε berechnet			
		Potenzgesetz	f	parab.	f
160,75 — 321,5	1,40	1,40	$\pm$0,00	1,42	−0,02
160,75 — 482,25	2,89	2,87	0,02	2,88	0,01
160,75 — 643,0	4,39	4,39	$\pm$0,00	4,39	$\pm$0,00
160,75 — 803,75	5,95	5,94	0,01	5,94	0,01
160,75 — 964,6	7,53	7,53	$\pm$0,00	7,54	−0,01
	Mittlere Fehler:		0,013		0,014

8. Leder, Zug.

Federnde Ausdehnung ε in Millimetern auf 780,7 mm Länge.

Formeln: $\varepsilon = \frac{780,7}{415} \sigma^{0,7}$, $\varepsilon = \frac{3,092}{3,88} \sigma - \frac{0,0954}{3,88^2} \sigma^2$.

Spannungsstufe	ε beob.	ε berechnet			
		Potenzgesetz	f	parab.	f
3,88 — 11,65	5,5	5,6	−0,1	5,4	0,1
3,88 — 19,4	10,0	10,1	−0,1	10,1	−0,1
3,88 — 27,2	14,0	14,1	−0,1	14,0	$\pm$0,0
	Mittlere Fehler:		0,17		0,14

In den letzten Beispielen halten einander die parabolische und die Potenzformel beinahe die Wage.

Das Ergebnis dieser Untersuchungen ist, dass bei den betrachteten Materialien und innerhalb der angenommenen Spannungsgrenzen das Potenzgesetz die Beziehung zwischen Spannung und elastischer Dehnung im ganzen genauer zum Ausdruck bringt, als das parabolische. Jedoch genügt, wie mir scheint, auch beim letzteren die Genauigkeit für etwaige

Anwendungen in der Festigkeitslehre. Zwei Bemerkungen sind noch zu machen. Erstens kommen die Versuchsergebnisse von Bach durch die obigen Näherungsgleichungen nicht voll zum Ausdruck, weil jedesmal der Vergleich nur bis zu einer Spannung fortgeführt ist, die ungefähr mit der höchsten, in der Technik bei dem betreffenden Material für zulässig gehaltenen übereinstimmt. Es können z. B., worauf Bach selbst bereits hingewiesen hat (in den schon erwähnten gesammelten Abhandlungen und Berichten, S. 294) die bei manchen von Bach gezeichneten Spannungs-Dehnungs-Kurven auftretenden Wendepunkte durch das Potenzgesetz ihre Erklärung nicht finden; allerdings, wie wir hinzufügen müssen, durch das parabolische, hyperbolische und manches andere Gesetz ebenso wenig. Zweitens fehlt noch die Prüfung in der Nähe des Nullpunkts, wozu in den Ergebnissen der mit sehr kleinen Belastungen vorgenommenen Zugversuche J. O. Thompsons ein vorzügliches Material vorhanden ist, das durch neuere Versuche Bachs, deren Veröffentlichung bevorsteht, eine willkommene Ergänzung erhalten wird. Die angedeuteten Lücken auszufüllen, soll in einem späteren Aufsatze versucht werden.

Konstruktion der Trägheitsaxen eines Dreiecks.

Von Dr. **Otto Richter** in Leipzig.

In der graphischen Statik wird die Hauptträgheitsellipse („Zentralellipse“) eines Dreiecks mit Hilfe konjugierter Durchmesser und Tangenten ermittelt, worauf sich die Hauptträgheitsaxen als Hauptaxen der Ellipse ergeben. Im folgenden ist die Aufgabe gelöst, die Hauptträgheitsaxen eines Dreieckes direkt zu konstruieren. Mit Hilfe der Ellipse:

$$\frac{\xi^2}{\frac{1}{3}(q_1^{\,2}+q_2^{\,2}+q_3^{\,2})}+\frac{\eta^2}{\frac{1}{3}(p_1^{\,2}+p_2^{\,2}+p_3^{\,2})}=1,$$

worin ξ, η die Hauptträgheitsaxen, und p_1, p_2, p_3 die Projektionen der Verbindungslinien des Schwerpunktes mit den Seitenmitten auf die ξ-Axe, q_1, q_2, q_3 auf die η-Axe bedeuten, kann man auf Grund des Satzes von C. Neumann u. Clebsch die Trägheitsaxen für einen beliebigen Punkt finden.*

Bezeichnungen für das folgende: Gegebenes Dreieck A_1, A_2, A_3; Schwerpunkt S; $SA_i = s_i (i = 1, 2, 3)$; das in S auf SA_i errichtete Lot l_i; x, y zwei rechtwinklige Axen durch S, und zwar soll x mit l_1, y mit s_1 zusammenfallen; x_i, y_i Koordinaten von A_i. Dann ist $x_1 = 0$. Ferner sei $y_1 = u$, $x_2 = v$, $y_2 = w$. Hieraus folgt $(\Sigma x_i = \Sigma y_i = 0)$

$$x_3 = -v, \quad y_3 = -u - w.$$

* A. Clebsch, Zur Theorie der Trägheitsmomente etc., Crelles Journal Bd. 57, und R. Mehmke, Über die Bestimmung von Trägheitsmomenten etc., Math. Annal. XXIII.