Verzerrungstensor, Verzerrungsdeviator und Spannungstensor bei endlichen Formänderungen

Von H. Richter, Z. angew. Math. Mech. Bd. 29 Nr.3 März 1949

neu gesetzt in LaTeX von Kai Graban*, Robert Martin* und Patrizio Neff*

Zusammenfassung

Es werden Postulate aufgestellt, denen bei der Bildung des Verzerrungstensors, des Verzerrungsdeviators und des Spannungstensors zu genügen ist, und hieraus die allgemeine Gestalt dieser Tensoren in beliebigen Koordinaten abgeleitet. Als einfachste Definition des Verzerrungstensors erscheint die gemischt-variante logarithmische Deformationsmatrix, wo der Deviator in üblicher Weise gebildet werden kann, und wo die Invarianten des letzteren die Beanspruchung invariant charakterisieren. Bei entsprechender Definition des Spannungstensors bleibt die Gestalt des allgemeinen Elastizitätsgesetzes invariant gegen Koordinatentransformation.

Postulates are laid down that have to be satisfied on forming the distortion tensor, the distortion deviator, and the stress tensor, and thus the general form of these tensors are deduced in arbitrary co-ordinates. The combined-variant logarithmical deformation matrix proves the simplest definition of the distortion tensor. The deviator may be formed in the usual manner, and the invariants of it characterize the strain in an invariant way. If the tension tensor is defined accordingly, the form of the general law of elasticity continues to be invariant to co-ordinate transformations.

On établit des postulats pour la formation du tenseur de déformation, du déviateur de déformation et du tenseur de tension. La forme générale de ces tenseurs en coordonnées arbitraires en est déduite. La matrice logarithmique (mixte-variante) de déformation fournit la plus simple définition du tenseur de déformation. Le déviateur peut être formé comme de coutume et ses invariantes caractérisent la sollicitation d'une maniére invariante. Le tenseur de tension étant défini conformément, la forme de la loi générale d'élasticité reste invariante dans toute transformation de coordonnées.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Bezeichnungen und Hilfssätze **2**
- 2.1 Bezeichnungen . . . 2
- 2.2 Hilfssätze . . . 2

3 Der Verzerrungstensor **3**
- 3.1 Postulate . . . 3
- 3.2 Die Realisierung der Postulate in kartesischen Koordinaten . . . 3
- 3.3 Erweiterung auf krummlinige Koordinaten . . . 4
  - 3.3.1 Fall des ungemischten Tensors . . . 5
  - 3.3.2 Fall des gemischten Tensors . . . 6
- 3.4 Berechnung der Volumdehnung v . . . 6
- 3.5 Beziehung zum gewöhnlichen Verzerrungstensor . . . 6

4 Der Verzerrungsdeviator **7**
- 4.1 Postulate . . . 7
- 4.2 Die Realisierung der Postulate . . . 7
- 4.3 Die Verzerrungsinvarianten . . . 8

5 Der Spannungstensor **9**
- 5.1 Postulate . . . 9
- 5.2 Die Realisierung der Postulate . . . 9
- 5.3 Die Arbeitsleistung bei infinitesimaler Verzerrung . . . 10
- 5.4 Invarianz des Elastizitätsgesetzes . . . 10

6 Review **11**

7 Symbolverzeichnis **12**

*Fakultät für Mathematik, Universität Duisburg-Essen

1 Einleitung

In der Theorie endlicher elastischer oder plastischer Verformungen geht man im allgemeinen von demjenigen Verzerrungstensor aus, der für allgemeine Koordinaten durch Bildung der Differenz der Quadrate der Linienelemente im deformierten und im Ausgangszustand entsteht [1]. Die Verwendung gerade dieser Charakterisierung des Verzerrungszustandes ist natürlich nicht zwingend vorgeschrieben. Im Gegenteil erscheint bei einer genaueren Analyse, die im folgenden durchgeführt werden soll, gerade diese übliche Definition des Verzerrungstensors nicht als diejenige, die dem Problem der Untersuchung endlicher Verzerrungen besonders gut angepaßt ist. So führt bereits die Aufgabe, aus dem üblichen Verzerrungstensor einen Deviator abzuleiten, der in Absonderung der Volumänderung nur die Gestaltänderung charakterisiert, zu eigenartigen Schwierigkeiten und Mehrdeutigkeiten [1]. Der tiefere Grund hierfür liegt wohl darin, daß man sich bei der Behandlung der endlichen Formänderungen zu stark an das Vorbild der infinitesimalen Verzerrungen gehalten hat, bei denen man eine beliebige Deformation durch additive Aufspaltung in den symmetrischen und den schiefsymmetrischen Anteil in eine reine Streckung und eine reine Drehung zerlegen kann. Bei endlichen Verformungen ist diese additive Aufspaltung jedoch nicht mehr möglich; an ihre Stelle tritt eine multiplikative Zerlegung der allgemeinen Deformation in eine Drehung und eine Streckung, wobei diese Faktoren nicht mehr kommutativ sind. Jeder Versuch, Definitionen durch additive Zerspaltung zu bilden, muß daher auf grundsätzliche Schwierigkeiten stoßen.

Wir wollen nun in dieser Arbeit so vorgehen, daß wir — gewissermaßen axiomatisch — an die zu bildenden Definitionen von vornherein gewisse Forderungen stellen, die uns als zweckmäßig erscheinen, und dann zeigen, wie aus diesen Forderungen sich bestimmte Möglichkeiten für diese Definitionen als besonders naheliegend ergeben.

2 Bezeichnungen und Hilfssätze

2.1 Bezeichnungen

1. Mit großen lateinischen Buchstaben A, B, ... bezeichnen wir dreireihige quadratische Matrizen[1]. $a_{ik} = (A)_{ik}$ ist das Element in der i-ten Zeile und der k-ten Spalte. $\det A$ ist die Determinante von A. $\mathrm{tr}(A)$ ist die Spur von A, also die Summe der Elemente der Hauptdiagonale. A^T ist die an der Hauptdiagonale Gespiegelte von A. $\mathbb{1}$ ist die Einheitsmatrix. A^{-1} ist die Inverse zu A.
2. Kleine lateinische Buchstaben x, y, ... bedeuten Vektoren: $x = (x_1, x_2, x_3)$; $x \cdot y$ ist das innere Produkt. $x \times y$ ist das äußere Produkt.
3. $A\,x$ entsteht durch Anwendung von A auf x: $(A\,x)_i = \sum\limits_k a_{ik}\,x_k$.
4. Produkte $B\,A$ sind von rechts nach links zu lesen: $(B\,A)\,x = B\,(A\,x)$.
5. Ist $f(x) = \sum b_n \cdot x^n$, so ist unter Voraussetzung der Konvergenz: $f(A) = \sum b_n\,A^n$;
   $df(A) = f(A + dA) - f(A)$, was mit $f'(A)\,dA$ nur bei $A \cdot dA = dA \cdot A$ übereinstimmt[2].

2.2 Hilfssätze

(2.1) $\mathrm{tr}(A_1\,A_2 \cdots A_n)$ bleibt bei zyklischer Vertauschung der Faktoren ungeändert.

(2.2) Alle Invarianten von A gegen affine Transformation $A \to B\,A\,B^{-1}$ sind Funktionen der drei Invarianten $j = \mathrm{tr}(A)$, $k = \mathrm{tr}(A^2)$ und $l = \mathrm{tr}(A^3)$. Die charakteristische Gleichung von A ist:

$$x^3 - j \cdot x^2 + \frac{1}{2}\,(j^2 - k)\,x - (\frac{1}{3}\,l - \frac{1}{2}\,j\,k + \frac{1}{6}\,j^3) = 0\,.$$

(2.3) Es ist $f(B\,A\,B^{-1}) = B\,f(A)\,B^{-1}$.

(2.4) Hat A positiv reelle Eigenwerte, so ist $\log A$ definiert. Es ist $\mathrm{tr}(\log A) = \log(\det A)$.

(2.5) Es ist $\mathrm{tr}(B\,df(A)) = \mathrm{tr}(B\,f'(A)\,dA)$, falls $B\,A = A\,B$, jedoch nicht notwendig $B \cdot dA = dA \cdot B$ ist.

(2.6) In kartesischen Koordinaten ist eine reine Streckung S symmetrisch mit positiven Eigenwerten.

(2.7) In kartesischen Koordinaten gilt für eine euklidische Transformation R: $\quad R\,R^T = \mathbb{1}$.

(2.8) Ein beliebiges A mit $\det A \neq 0$ läßt sich eindeutig darstellen in der Form $A = S \cdot R$, d.h. als euklidische Transformation mit nachfolgender reiner Streckung. Bei $\det A > 0$ ist R eine direkte Transformation, also eine reine euklidische Drehung.

(2.9) Es ist $x \cdot A\,y = y \cdot A^T x\,.$

(2.10) Es sei $y = M\,x$ eine Koordinatentransformation, bei der A in A^* übergeht. A ist ein

zweifach kontravarianter Tensor, falls $A^* = M\,A\,M^T \cdot (\det M)^n$,
zweifach kovarianter Tensor, falls $A^* = (M^{-1})^T A\,M^{-1} \cdot (\det M)^n$,
kontravariant-kovarianter Tensor, falls $A^* = M\,A\,M^{-1} \cdot (\det M)^n$,
kovariant-kontravarianter Tensor, falls $A^* = (M^{-1})^T A\,M^T \cdot (\det M)^n$ ist.

[1] Ob eine Matrix ein Tensor ist, ist an (2.10) zu sehen.
[2] Vgl. jedoch (2.5).

Bei $n = 0$ ist A ein eigentlicher Tensor; bei $n \neq 0$ eine tensorielle Dichte. (Die Übereinstimmung dieser etwas weniger geläufigen Darstellung der Tensoreigenschaft mit der üblichen ergibt sich unmittelbar, wenn man symbolisch $(A)_{ik} = x_i\, y_k$ setzt, wo x und y kontravariante oder kovariante Vektoren sind).

(2.11) Es sei $x' = M\,x$ und $y' = M\,y$; dann ist $x' \times y' = \det M \cdot (M^{-1})^T (x \times y)$.

3 Der Verzerrungstensor

Wir wollen uns nun überlegen, welche Forderungen wir billigerweise an die Verzerrungsmatrix stellen können, um dann die Realisierbarkeit dieser Forderungen zu untersuchen.

Es sei F die Matrix, die die Umgebung eines Punktes $\widehat{x}$ auf die Umgebung des Bildpunktes x abbildet:

$$dx = F\,d\widehat{x}\,. \tag{3.1}$$

F ist die Funktionalmatrix

$$(F)_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial \widehat{x}_k}\,, \quad \det F > 0 \tag{3.2}$$

und gibt den erreichten Verzerrungszustand an. Bei plastischem Material, wo der Spannungszustand nicht nur vom erreichten Verzerrungszustand abhängt, sondern auch von dem Wege, der zu diesem führte, ist dann die Angabe von F allein nicht ausreichend. Bei elastischem Material dagegen genügt F zur Charakterisierung der Verzerrung. Bei anisotropem Material ist auch die in F enthaltene Drehung wesentlich. Es ist dann F selbst zur Beschreibung der Verzerrung zu verwenden, während alle Verzerrungstensoren, die wie der gewöhnliche eine euklidische Drehung eliminieren, unbrauchbar sind. Die Aufstellung von solchen Verzerrungstensoren hat daher überhaupt nur für isotropes Material Sinn.

3.1 Postulate

Demgemäß soll nun unter der ausdrücklichen Voraussetzung der Anwendbarkeit auf *isotropes Material* zu F eine Verzerrungsmatrix $E(F)$ definiert werden[3]. Während nun F sicher kein Tensor ist, da F auf zwei verschiedene Punkte bezogen ist, wollen wir die Tensoreigenschaft von E fordern. Damit ergibt sich das erste Postulat:

V 1. *E ist ein Tensor, der aus F und den Matrizen der Metrik in $\widehat{x}$ und x gebildet werden kann.*

Weiterhin soll bei E die unwesentliche in F enthaltene Drehung unberücksichtigt bleiben. Es soll sich also E nicht ändern, wenn *vor* Ausübung von F erst eine euklidische Drehung R in $\widehat{x}$ durchgeführt wird. Man kann sich statt dessen auch auf den Standpunkt stellen, daß eine *nach* F in x durchgeführte Drehung den Verzerrungstensor nicht beeinflussen soll. Dies würde bedeuten, daß F als Verzerrung in $\widehat{x}$ mit nachfolgender unwesentlicher Drehung aufgefaßt wird. Den so zu $\widehat{x}$ gehörigen Verzerrungstensor wollen wir mit $\widehat{E}$ bezeichnen. Die Analyse von E und $\widehat{E}$ ist vollkommen analog, so daß wir uns im folgenden auf die von E beschränken und die für $\widehat{E}$ analogen Ergebnisse lediglich vermerken, wobei die entsprechenden Größen durch ein $\widehat{\ }$ gekennzeichnet werden.

Die genannte Eigenschaft von E und $\widehat{E}$ drückt sich nun aus durch das Postulat

V 2. $E(F\,R) = E(F)$, resp. $\widehat{E}(R\,F) = \widehat{E}(F)$.

Weiterhin verlangen wir noch ein *Superpositionsprinzip* für koaxiale reine Streckungen durch Postulat

V 3. *Es seien S_1 und S_2 zwei koaxiale Streckungen: $S_1\,S_2 = S_2\,S_1$. Es sei $E_1 = E(S_1)$, $E_2 = E(S_2)$ und $E = E(S_1\,S_2)$. Dann soll es eine umkehrbar eindeutige Funktion $f(x)$ geben, so daß $f(E_1) + f(E_2) = f(E)$ ist.* f kann gegebenenfalls abhängig vom Koordinatensystem sein.

Schließlich müssen wir noch verlangen, daß für infinitesimale Verzerrungen die neue Definition in die alte übergeht. Dies liefert die *Limesbeziehung*

V 4. *Für infinitesimale Deformationen $\mathbb{1}+dF$ in kartesischen Koordinaten geht der Verzerrungstensor in $\frac{1}{2}\,(dF+(dF)^T)+o(dF)$ über*[4].

3.2 Die Realisierung der Postulate in kartesischen Koordinaten

Aus Vereinfachungsgründen wollen wir zunächst kartesische Koordinaten voraussetzen. Original- und Bildpunkt der Deformation nennen wir dann $\widehat{y}$ und y. Die Deformationsmatrix heiße jetzt F. Die zugehörigen Verzerrungstensoren sind E_0 und $\widehat{E_0}$.

Gemäß (2.8) schreiben wir zunächst

$$F = S\,R = R\,\widehat{S} \quad \text{bei} \quad \widehat{S} = R^{-1}\,S\,R\,. \tag{3.3}$$

Zur Auffindung dieser Zerlegung bildet man zunächst $F\,F^T$. Nun ist für $x \neq 0$: $0 < F^T x \cdot F^T x$, was mit Hilfe von (2.9) liefert: $0 < x \cdot F\,F^T x$. Die symmetrische Matrix $F\,F^T$ ist also positiv definit und hat daher eindeutig eine positiv definite Quadratwurzel $S = \sqrt{F\,F^T}$. R ergibt sich dann als $R = S^{-1}\,F$. Entsprechend ist $\widehat{S}^2 = F^T F$.

[3]Die Bezeichnung $E(F)$ soll dabei nicht heißen, daß E eine Funktion von F im Sinne von (2.5) ist, sondern nur, daß E zu F gehört.
[4]Wie üblich bedeutet $y = o(x)$: $\lim \frac{y}{x} = 0$.

Nach V2 ist $E_0(F) = E_0(S)$, resp. $\widehat{E_0}(F) = \widehat{E_0}(\widehat{S})$. Wir können uns also auf Verzerrungstensoren beschränken, die zu reinen Streckungen gehören.

Es sei nun S eine infinitesimale Streckung: $S = 1\!\!1 + dS$. Dann ist nach V4: $E_0(1\!\!1 + dS) = dS + o(dS)$ und $E_0(1\!\!1 + \lambda\, dS) = \lambda\, dS + o(dS)$, wenn λ eine positive Zahl ist. Aus V3 ergibt sich dann
$f(dS + o(dS)) + f(\lambda\, dS + o(dS)) = f((1+\lambda)\, dS + o(dS))$. Da dies für jedes λ und dS gelten muß, folgt für kleine x: $f(x) = x + o(x)$ [5]. Setzen wir nun $Z = f(E_0)$, so wird damit für infinitesimale Streckungen: $Z(1\!\!1 + dS) = dS + o(dS)$.

Sei nun wieder S eine endliche reine Streckung, so läßt sich wegen der positiven Eigenwerte von S bilden:

(3.4) $$L = \log S\,; \quad \text{resp.} \quad \widehat{L} = \log \widehat{S}\,: \quad \text{„logarithmische Deformationsmatrix“}$$

Es ist dann: $\frac{1}{n}\, L = \log \sqrt[n]{S}$ und damit für große n: $\sqrt[n]{S} = 1\!\!1 + \frac{1}{n}\, L + o(\frac{1}{n})$. Also wird $Z(\sqrt[n]{S}) = \frac{1}{n}\, L + o(\frac{1}{n})$. Nach V3 ist weiter $Z(S) = n \cdot Z(\sqrt[n]{S}) = L + n \cdot o(\frac{1}{n})$. Da die linke Seite dieser Gleichung von n unabhängig ist, können wir n gegen unendlich gehen lassen und erhalten: $Z(S) = L$. Hieraus folgt insbesondere, daß $f(x)$ bis auf einen willkürlichen Faktor eindeutig bestimmt ist.

Ist nun f^{-1} die Umkehrfunktion zu f, so haben wir schließlich, da ja L eine umkehrbar eindeutige Funktion von S und damit auch von $S^2 = F\, F^T$ ist:

(3.5) $$E_0 = f^{-1}(L) = h(S) = k(F\, F^T)\,; \quad \text{resp.} \quad \widehat{E_0} = f^{-1}(\widehat{L}) = h(\widehat{S}) = k(F^T F)\,.$$

Der Ansatz (3.5) genügt umgekehrt stets den Postulaten V2 und V3, wobei f eindeutig als Umkehrfunktion von f^{-1} zu wählen ist, während die Erfüllung der Limesbedingung V4 fordert, daß für kleine x gilt:

(3.5a) $$f^{-1}(x) = x + o(x)\,; \qquad h(1+x) = x + o(x)\,; \qquad k\,(1+x) = \frac{1}{2}\, x + o(x)\,.$$

In der Tat ist dann für infinitesimale Verzerrungen $F = 1\!\!1 + dF$:

$$F\, F^T = 1\!\!1 + (dF + dF^T) + o(dF)\,, \quad S = \sqrt{F\, F^T} = 1\!\!1 + \frac{1}{2}\,(dF + dF^T) + o(dF)\,,$$
$$L = \log S = \frac{1}{2}\,(dF + dF^T) + o(dF)\,.$$

Es ist also bei jedem (3.5a) genügenden f^{-1}: $E_0 = \frac{1}{2}\,(dF + dF^T) + o(dF)$.

Jeder mit unseren Postulaten verträgliche Verzerrungstensor ist damit als Funktion der logarithmischen Deformationsmatrix erkannt. Vom Standpunkte unserer Postulate aus erscheint $E_0 = L$ als die einfachste Definition der Verzerrungsmatrix, da hier das Superpositionsprinzip mit $f(x) \equiv x$ erfüllt ist. Wir werden später sehen, daß auch für die Bildung des Deviators diese Definition als die einfachste erscheinen wird.

Wird anschließend an F noch eine euklidische Drehung R_1 durchgeführt, so geht wegen $R_1\, F = R_1\, S\, R = R_1\, S\, R_1^{-1} \cdot R_1\, R$ die Streckung S in $R_1\, S\, R_1^{-1}$ über. Den gleichen Übergang haben wir, wenn wir eine euklidische Koordinatentransformation $y_1 = R_1\, y$ durchführen. Gemäß (2.3) geht dann E_0 in $h(R_1\, S\, R_1^{-1}) = R_1\, E_0\, R_1^{-1}$ über. Die Achsen von E_0 werden also bei nachträglicher Anwendung von R_1 einfach mitgedreht. Bei der anderen Auffassung der letzten Formel als Ergebnis einer Koordinatentransformation sehen wir an (2.10), daß E_0 sich wie ein Tensor transformiert, wobei wegen $R_1^{-1} = R_1^T$ kein Unterschied bezüglich der Varianz vorhanden ist. Entsprechendes gilt natürlich für $\widehat{E_0}$.

3.3 Erweiterung auf krummlinige Koordinaten

Wir gehen jetzt von den kartesischen Koordinaten y auf beliebige Koordinaten x über: $x = x\,(y)$. Für eine Umgebung des undeformierten Materials sei $d\widehat{x} = \widehat{M}\, d\widehat{y}$, für die entsprechende Umgebung im deformierten Material sei $dx = M\, dy$. $\widehat{M}$ und M sind die Funktionalmatrizen von $x = x(y)$ in $\widehat{x}$ und x.

Für ein Linienelement in x erhalten wir mit Hilfe von (2.9): $dy = M^{-1}dx \cdot M^{-1}dx = dx \cdot (M^{-1})^T M^{-1}dx$. Also ist:

(3.6a) $$G = G^T = (M\, M^T)^{-1}$$

die Matrix der Metrik in x. Entsprechend definiert

(3.6b) $$\widehat{G} = (\widehat{M}\, \widehat{M}^T)^{-1}$$

die Metrik in $\widehat{x}$.

Die Deformation des Materials erscheint jetzt als: $dx = M\, \overline{F}\, \widehat{M}^{-1} d\widehat{x}$. $\overline{F}$ ist also übergegangen in

(3.7) $$F = M\, \overline{F}\, \widehat{M}^{-1}, \quad (F)_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial \widehat{x}_k}\,.$$

Umgekehrt ist

(3.7*) $$\overline{F} = M^{-1} F\, \widehat{M} \quad \text{und} \quad \overline{F}^T = \widehat{M}^T F^T (M^{-1})^T,$$

[5] Da mit f jedes Vielfache von f dem Postulat V3 genügt, kann man $f'(0)$ zu 1 normieren.

woraus wir sofort erhalten:

$$\text{(3.8)} \qquad \begin{cases} S^2 = \overline{F}\,\overline{F}^T &= M^{-1} F\,\widehat{G}^{-1} F^T (M^{-1})^T \\ \widehat{S}^2 = \overline{F}^T \overline{F} &= \widehat{M}^T F^T G\, F\, \widehat{M}\,. \end{cases}$$

Mit Hilfe der beiden letzten Formeln können wir also die zu den kartesischen Koordinaten gehörigen Matrizen $\overline{F}$, S und $\widehat{S}$ durch F und die Übergangsmatrizen M und $\widehat{M}$ ausdrücken.

3.3.1 Fall des ungemischten Tensors

Wir nehmen zunächst an, es sei der Verzerrungstensor E zweifach kontravariant definiert und genüge den Postulaten V1 bis V4. Dann muß nach (2.10) sein:

$$E = M\, E_0\, M^T,$$

wobei E_0 einer der Tensoren (3.5) ist.

Um die besondere Gestalt von E_0 kennenzulernen, nehmen wir den Spezialfall, daß $\overline{F}$ eine reine Streckung S in den Koordinatenachsen und M damit koaxial ist, also

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M = \begin{pmatrix} \varrho_1 & & 0 \\ & \varrho_2 & \\ 0 & & \varrho_3 \end{pmatrix}.$$

Dann ist wegen (3.5) E ebenfalls auf Hauptachsen mit den Eigenwerten $\varrho_\nu \cdot h(\lambda_\nu)$. Das Superpositionsprinzip fordert nun die Existenz einer Funktion $f(x)$, deren Koeffizienten die ϱ_ν enthalten können, so daß gilt:

$$\text{(3.9)} \qquad f(\varrho_\nu^2\, h(\lambda_\nu)) + f(\varrho_\nu^2\, h(\mu_\nu)) = f(\varrho_\nu^2\, h(\lambda_\nu\, \mu_\nu))$$

für beliebige λ_ν und μ_ν. Es ist daher

$$f(\varrho_\nu^2\, h(\lambda)) = C_\nu \cdot \log \lambda, \quad C_\nu = C_\nu(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)\,.$$

Durch Differentiation nach λ erhalten wir hieraus:

$$\text{(3.10)} \qquad \varrho_\nu^2\, f'(\varrho_\nu^2\, h(\lambda)) \cdot h'(\lambda) = C_\nu \cdot \frac{1}{\lambda}\,.$$

Setzen wir speziell $\lambda = 1$, so wird wegen (3.5a): $\varrho_\nu^2 \cdot f'(0) = C_\nu$, so daß bei der Normierung $f'(0) = 1$ wird:

$$f'(\varrho_\nu^2\, h(\lambda)) = \frac{1}{\lambda \cdot h'(\lambda)}\,.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist unabhängig von den ϱ_ν. Es muß daher $f'(x) \equiv f'(0) = 1$ und damit $h(\lambda) = \log \lambda$ sein. Es ist dann $E_0 = \log S = L$ und damit

$$E = M\, L\, M^T$$

zu setzen. Umgekehrt erfüllt diese Definition für E offenbar auch bei beliebiger Wahl von $\overline{F}$ und M alle Postulate V1 bis V4, da ja für L das Superpositionsprinzip rein additiv ist und sich daher bei Multiplikation von links mit M und von rechts mit M^T einfach auf ein additives Gesetz für E überträgt.

Es gibt also für ungemischt tensorielles E überhaupt nur eine mit unseren Postulaten verträgliche Definitionsmöglichkeit: $E = M\, L\, M^T$.

Wegen $L = \log S = \frac{1}{2} \log S^2$ erhalten wir schließlich nach (3.8) den Ausdruck:

$$\text{(3.11)} \qquad E = \frac{1}{2}\, M\, \log(M^{-1} F\, G^{-1} F\, M^{-1})\, M\,.$$

Entsprechend ergibt sich

$$\widehat{E} = \frac{1}{2}\, \widehat{M} \log(\widehat{M}\, F^T G\, F\, \widehat{M})\, \widehat{M}\,.$$

Entwickeln wir den log für nicht zu große Verzerrungen in eine Potenzreihe, so sehen wir, daß in der Tat E und $\widehat{E}$ nur von F, $\widehat{G}$ und G abhängen. Die Darstellung durch diese Matrizen ist jedoch sehr umständlich. Außerdem sehen wir, daß die Invarianten von E andere sind als die von E_0. Dies ist insofern unangenehm, als z.B. in der Elastizitätstheorie endlicher Verzerrungen anzunehmen ist, daß die thermodynamischen Größen wie innere Energie, Entropie usw. Funktionen der Invarianten der Verzerrung sind. Wenn dieselben sich nun bei Koordinatentransformation ändern, so ergeben sich hieraus zusätzliche Schwierigkeiten. Auch ist es dann nicht mehr möglich, die Beanspruchung mit Hilfe der Invarianten unabhängig von der Koordinatenwahl zu beschreiben (vgl. Kapitel 4).

Die entsprechenden Betrachtungen gelten natürlich für den Fall, daß E oder $\widehat{E}$ zweifach kovariant ist. Es wird daher zweckmäßig sein, auf den mit den ungemischten Tensoren verbundenen Vorteil der Symmetrie zu verzichten.

3.3.2 Fall des gemischten Tensors

In dem Falle, daß E kovariant-kontravariant ist, muß nach (2.10) sein: $E = (M^{-1})^T E_0\, M^T$. Wegen (2.3) genügt dann E automatisch dem Superpositionsprinzip mit dem gleichen $f(x)$ wie E_0. Insbesondere ist also das eindeutig bestimmte, normierte $f(x)$ unabhängig von der Koordinatenwahl. Weiterhin hat E dieselben Invarianten wie E_0. Jede Funktion von E, deren Koeffizienten von den Invarianten von E abhängig sind, überträgt sich auf die gleiche Funktion von E_0.

Aus der einfachsten Definition $E_0 = L$ erhalten wir jetzt bei beliebigen Koordinaten: $L^* = (M^{-1})^T L\, M^T$ oder wegen (3.4) und (3.8):

$$L^* = \frac{1}{2}\,(M^{-1})^T \log(M^{-1}F^T \widehat{G}^{-1} F^T (M^{-1})^T)\, M^T$$

oder

$$L^* = \frac{1}{2}\,\log(G\,F\,\widehat{G}^{-1}F^T): \quad \text{„logarithmischer Verzerrungstensor“}. \tag{3.12}$$

L^* gehorcht dem Superpositionsprinzip mit $f(x) \equiv x$.

Der allgemeinste unseren Postulaten genügende Verzerrungstensor ist dann:

$$E = f^{-1}(L^*) = h(\sqrt{G\,F\,\widehat{G}^{-1}F^T}) = k(G\,F\,\widehat{G}^{-1}F^T)\,, \tag{3.13}$$

wo f^{-1}, h *und* k *den Bedingungen* (3.5a) *unterliegen.*

Ganz analog erhält man

$$\widehat{E} = f^{-1}(\widehat{L}^*) = h(\sqrt{F^T G\,F\,\widehat{G}^{-1}}) = k(F^T\,G\,F\,\widehat{G}^{-1})\,, \quad \widehat{L}^* = \frac{1}{2}\,\log(F^T G\,F\,\widehat{G}^{-1})\,.$$

Bis auf einen beliebigen Faktor ist die Funktion $f(x)$ des Superpositionsprinzips die Umkehrfunktion von $x = f^{-1}(y)$.

Ganz entsprechend ist vorzugehen, wenn E und $\widehat{E}$ kontravariant-kovariant sein sollen. Es wird dann

$$\left\{\begin{aligned} &L^* = \tfrac{1}{2}\,\log(F\,\widehat{G}^{-1}F^T G) \\ &\text{und} \\ &\widehat{L}^* = \tfrac{1}{2}\,\log(\widehat{G}^{-1}F^T G\,F)\,. \end{aligned}\right. \tag{3.12a}$$

Alle anderen Beziehungen bleiben ungeändert.

3.4 Berechnung der Volumdehnung v

Die mit F verbundene Volumdehnung ist $v = \det E$; also nach (3.7*):

$$v' = (\det M)^{-1} \cdot \det \widehat{M} \cdot \det F\,.$$

Andererseits ist nach (3.6), (3.12) und (3.12a):

$$\det\left(e^{2L^*}\right) = \det G \cdot (\det \widehat{G})^{-1} \cdot (\det F)^2 = v^2\,.$$

Also ist nach (2.4):

$$\log v = \operatorname{tr}(L^*) = \operatorname{tr}(\widehat{L}^*) \tag{3.14a}$$

oder nach (3.13)

$$\log v = \operatorname{tr}(f(E)) = \operatorname{tr}(f(\widehat{E}))\,. \tag{3.14b}$$

3.5 Beziehung zum gewöhnlichen Verzerrungstensor

Die gewöhnliche Definition des Verzerrungstensors T, resp. $\widehat{T}$, ist bekanntlich (vgl. z.B. [1]):

$$ds^2 - d\widehat{s}^2 = 2 \cdot dx \cdot T\,dx = 2\,d\widehat{x} \cdot \widehat{T}\,d\widehat{x}\,.$$

Nun erhalten wir mit Hilfe von (2.9):

$$ds^2 = dx \cdot G\,dx = F\,d\widehat{x} \cdot G\,F\,d\widehat{x} = d\widehat{x} \cdot F^T G\,F\,d\widehat{x}$$

und entsprechend

$$d\widehat{s}^2 = dx \cdot (F^{-1})^T \widehat{G}\,F^{-1}dx = d\widehat{x} \cdot \widehat{G}\,d\widehat{x}\,.$$

Also wird:

$$2\,T = G - (F\,\widehat{G}^{-1}F^T)^{-1} \quad \text{und} \quad 2\,\widehat{T} = F^T G\,F - \widehat{G}\,.$$

Um die Varianz zu sehen, formen wir nach (3.8) um:

(3.15) $$2\,T = (M^{-1})^T \cdot (1\!\!1 - M^T (F^{-1})^T \widehat{G}\, F^{-1} M) \cdot M^{-1} = (M^{-1})^T \cdot (1\!\!1 - S^{-2}) \cdot M^{-1}$$

und entsprechend

(3.15a) $$2\,\widehat{T} = (\widehat{M}^{-1})^T \cdot (\widehat{S}^2 - 1\!\!1)\, \widehat{M}^{-1}.$$

Nach (2.10) sind T und $\widehat{T}$ also zweifach kovariante symmetrische Tensoren. Das Superpositionsprinzip ist für sie nicht erfüllt und die Invarianten ändern sich bei Koordinatentransformation. Dagegen genügen die gemischten Tensoren $T\,G^{-1}$, $G^{-1}T$, $\widehat{G}^{-1}\widehat{T}$ und $\widehat{T}\,\widehat{G}^{-1}$ allen gestellten Postulaten V1 bis V4. Für das Superpositionsprinzip ist nach (3.15) $f(x) = -\frac{1}{2}\,\log(1-2x)$ für $T\,G^{-1}$ und $G^{-1}T$, dagegen $f(x) = \frac{1}{2}\,\log(1+2x)$ für $\widehat{G}^{-1}\widehat{T}$ und $\widehat{T}\,\widehat{G}^{-1}$ zu setzen.

Für die Volumdehnung v ist dann nach (3.14):

$$\begin{aligned} v^2 &= (\det(1\!\!1 - 2\,T\,G^{-1}))^{-1} = (\det(1\!\!1 - 2\,G^{-1}T))^{-1} \\ &= \det(1\!\!1 + 2\,\widehat{G}^{-1}\widehat{T}) = \det(1\!\!1 + 2\,\widehat{T}\,\widehat{G}^{-1})\,. \end{aligned}$$

4 Der Verzerrungsdeviator

4.1 Postulate

Der Verzerrungsdeviator D soll aus dem Verzerrungstensor abgeleitet werden und lediglich die mit der Verzerrung verbundene Gestaltänderung charakterisieren. Damit ergeben sich bereits die an ihn zu stellenden Postulate:

D 1. *Unterscheiden sich zwei Deformationen nur durch eine Ähnlichkeitsstreckung, so haben sie das gleiche D.*

D 2. *Ist mit der Deformation keine Volumänderung verbunden, so ist $D = E$.*

4.2 Die Realisierung der Postulate

Eine Ähnlichkeitsstreckung im undeformierten oder im deformierten Zustand hat die Gestalt $\lambda\,1\!\!1$; $\lambda > 0$, mit der Volumdehnung λ^3. Setzen wir

$$F = v^{\frac{1}{3}}\,1\!\!1 \cdot v^{-\frac{1}{3}}F = v^{\frac{1}{3}}\,1\!\!1 \cdot F_1\,,$$

so ist nach D1: $D\,(F) = D\,(F_1)$. Da F_1 mit keiner Volumdehnung verbunden ist, ist also: $D\,(F) = E\,(F_1) = f^{-1}(L_1^*)$, wobei nach (3.12) und (3.12a) gilt: $L_1^* = -\frac{1}{3}\,\log v \cdot 1\!\!1 + L^*$. Hieraus ergibt sich schließlich mit Hilfe von (3.13) und (3.14a)

$$D = f^{-1}(L^* - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,L^* \cdot 1\!\!1) = f^{-1}(f(E) - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,f(E) \cdot 1\!\!1)\,.$$

Bezeichnen wir allgemein mit $\mathrm{dev}\,A$ den gewöhnlichen Deviator der Matrix A:

(4.1) $$\mathrm{dev}\,A = A - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,A \cdot 1\!\!1\,,$$

so können wir schreiben

(4.2) $$D = f^{-1}(\mathrm{dev}\,L^*) = f^{-1}(\mathrm{dev}\,f(E))\,.$$

Ganz entsprechend ist

$$\widehat{D} = f^{-1}(\mathrm{dev}\,\widehat{L}^*) = f^{-1}(\mathrm{dev}\,f(\widehat{E}))\,.$$

Umgekehrt sind bei dieser Definition offenbar auch die Postulate D1 und D2 erfüllt. Wird nämlich F mit $\lambda > 0$ multipliziert, so geht L^* in $L^* + \log\lambda \cdot 1\!\!1$ über; $\mathrm{dev}\,L^*$ und damit D bleiben also ungeändert. Ist weiter $v = 1$, so ist nach (3.14a) $\mathrm{tr}\,L^* = 0$, also $L^* = \mathrm{dev}\,L^*$ und damit $D = f^{-1}(L^*) = E$. Man beachte übrigens, daß D automatisch ein Tensor ist, wenn wir E als gemischten Tensor verwenden. Auch aus dieser Tatsache ergibt sich eine Bevorzugung der gemischten Tensoren vor den ungemischten.

Am einfachsten wird die Deviatorbildung bei $E = L^*$, wo einfach $D = L^*$ wird. Die Verwendung der logarithmischen Deformationsmatrix gestattet also auch bei beliebigen Koordinaten die gewöhnliche Deviatorbildung.

Es sei noch bemerkt, daß bei infinitesimalen Verzerrungen in kartesischen Koordinaten der neue Deviatorbegriff in den alten übergeht. Ist nämlich $F' = 1\!\!1 + dF'$ eine infinitesimale Verzerrung, so ist $L = \frac{1}{2}\,(dF' + (dF')^T) + o(dF')$, so daß (4.2) wegen (3.5a) liefert:

$$D = \mathrm{dev}\,L + o(\mathrm{dev}\,L) = \mathrm{dev}\left(\frac{1}{2}\,\left(dF' + (dF')^T\right)\right) + o(dF')\,.$$

Für den gewöhnlichen gemischten Verzerrungstensor $T\,G^{-1}$ fanden wir in Kapitel 3.5:
$f(x) = -\frac{1}{2}\,\log(1 - 2\,x)$, also $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\,(1 - e^{-2y})$ und $v = (\det(1\!\!1 - 2\,T\,G^{-1}))^{-\frac{1}{2}}$. Es ist

$L^* = -\frac{1}{2}\,\log(1\!\!1 - 2\,T\,G^{-1})$, $2\,\operatorname{dev} L^* = -\log(1\!\!1 - 2\,T\,G^{-1}) - \frac{2}{3}\,\log(v)\cdot 1\!\!1$.
Also wird schließlich:[6]

$$D = (\det(1\!\!1 - 2\,T\,G^{-1}))^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(T\,G^{-1} - \frac{1}{2}\cdot\left[1 - \sqrt[3]{\det(1\!\!1 - 2\,T\,G^{-1})}\right]\cdot 1\!\!1\right). \tag{4.3}$$

Entsprechend ist

$$\widehat{D} = (\det(1\!\!1 + 2\,\widehat{T}\,\widehat{G}^{-1}))^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\widehat{T}\,\widehat{G}^{-1} - \frac{1}{2}\cdot\left[\sqrt[3]{\det(1\!\!1 + 2\,\widehat{T}\,\widehat{G}^{-1})} - 1\right]\cdot 1\!\!1\right). \tag{4.3a}$$

4.3 Die Verzerrungsinvarianten

Will man den Verzerrungszustand durch Invarianten charakterisieren, so wird man als erste geeignete Invariante von E die Volumdehnung oder eine Funktion derselben wählen, während die beiden anderen Invarianten die Gestaltänderung charakterisieren, also bei zusätzlicher Ähnlichkeitsstreckung ungeändert bleiben sollen. Da bei Benutzung der gemischten Tensoren — dies sei im folgenden stets vorausgesetzt — alle Invarianten von E auch solche von L^* sind, können wir nach (3.14a) als erste Invariante $\operatorname{tr} L^*$ nehmen. Die beiden anderen Invarianten müssen nach Abschnitt 2 dann Invarianten von $\operatorname{dev} L^*$ sein. Damit ergibt sich die Charakterisierung des Verzerrungszustandes durch

$$\begin{cases} j = \operatorname{tr} L^* & \text{für die Volumänderung} \\ k = \operatorname{tr}((\operatorname{dev} L^*)^2), \quad l = \operatorname{tr}((\operatorname{dev} L^*)^3) & \text{für die Gestaltänderung.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Wegen $L^* = (M^{-1})^T L\, M^T$ ist auch $k = \operatorname{tr}((\operatorname{dev} L)^2)$ und $l = \operatorname{tr}((\operatorname{dev} L)^3)$, so daß k und l die Gestaltänderung unabhängig von der Koordinatenwahl angeben.

Wegen $\operatorname{tr}(\operatorname{dev} L) = 0$ heißt die charakteristische Gleichung von $\operatorname{dev} L$ gemäß (2.2):

$$x^3 - \frac{k}{2}\,x - \frac{l}{3} = 0\,. \tag{4.5}$$

Damit diese Gleichung drei reelle Wurzeln hat, muß für

$$\zeta = \frac{l^2}{k^3} \tag{4.6}$$

gelten:

$$0 \le \zeta \le \frac{1}{6}\,. \tag{4.7}$$

Die geometrische Bedeutung von ζ ergibt sich aus der folgenden Betrachtung. Es sei S eine beliebige reine Streckung. Dann können wir S auffassen als die n-malige Anwendung der reinen Streckung $S_n = \sqrt[n]{S}$. Dabei ist $L_n = \log \sqrt[n]{S} = \frac{1}{n}\cdot\log S = \frac{1}{n}\,L$; also $\operatorname{dev} L_n = \frac{1}{n}\,\operatorname{dev} L$ und damit $k_n = \frac{1}{n^2}\cdot k$ und $l_n = \frac{1}{n^3}\,l$. Hieraus ergibt sich $\zeta_n = \frac{l_n^2}{k_n^3} = \zeta$. — Ist umgekehrt für zwei Streckungen S_1 und S_2: $\zeta_1 = \zeta_2$, so ist $k_1 = \lambda^2\,k$ und $l_1 = \lambda^3\,l$. Gemäß (4.5) sind dann die Eigenwerte von S_1 die λ-te Potenz der Eigenwerte von S_2. Von einer Drehung abgesehen, ist damit $S_1 = S_2^\lambda$. Wir können uns also S_1 und S_2 bis auf eine Änderung der Hauptachsen als aus der gleichen infinitesimalen Streckung entstanden denken; bei negativem λ mit Benutzung der Inversen. Dies bedeutet, daß ζ die Beanspruchungs*art* charakterisiert.

Speziell wird die einachsige volumtreue Verzerrung in geeignet gedrehten kartesischen Koordinaten dargestellt durch

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Es ist dann
$$L = \operatorname{dev} L = \log\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$
also $k = \log^2\lambda\cdot\frac{3}{2}$ und $l = \log^3\lambda\cdot\frac{3}{4}$, womit sich ergibt: $\zeta = \frac{1}{6}$.
Dagegen wird für eine reine volumtreue Gleitung

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{also} \quad S^2 = \overline{F}\,\overline{F}^T = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Eigenwerte von S^2 erhalten wir aus der charakteristischen Gleichung: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2\cdot\lambda_3 = 1$. Für die Eigenwerte von L gilt also: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 + \mu_3 = 0$. Damit wird $k > 0$, $l = 0$; also $\zeta = 0$. Wir haben somit gefunden:

$\zeta = \frac{l^2}{k^3}$ *charakterisiert die Beanspruchungsart. Der eine Extremwert* $\zeta = 0$ *gehört zur reinen Gleitung und der andere Extremwert* $\zeta = \frac{1}{6}$ *zur einachsigen Streckung.*

[6] Man vgl. die etwas abweichende Bildung bei Moufang [1].

Die *Größe* der Beanspruchung wird bei infinitesimalen Verzerrungen üblicherweise durch $\sqrt{\operatorname{tr} D^2}$ charakterisiert. Nun sahen wir, daß für infinitesimale Verzerrungen $D \approx \operatorname{dev} L$ ist; also gilt $\sqrt{k}$ als Maß für die Größe der Beanspruchung bei infinitesimalen Verzerrungen.

Ist nun wieder S eine endliche Streckung, so ist wie oben gezeigt: $\sqrt{k} = n \cdot \sqrt{k_n}$. Da für genügend großes n k_n die Größe der Beanspruchung bei Anwendung der infinitesimalen Verzerrung $\sqrt[n]{S}$ angibt, ist es vernünftig, $\sqrt{k} = n\sqrt{k_n}$ als Maß der Beanspruchungsgröße bei n-maliger Anwendung von $\sqrt[n]{S}$, also für S, zu verwenden. Damit haben wir:

$\sqrt{k}$ *gibt die Größe der Beanspruchung an.*

5 Der Spannungstensor

Der Spannungstensor P soll den Spannungszustand im Punkte x des deformierten Materials beschreiben derart, daß bei passender Definition eines Flächenelementes dA in x die auf dA wirkende Kraft durch $P\,dA$ gegeben wird. Wenn man die Komponenten von P mit Hilfe der Transformationsformeln natürlich auch in den Koordinaten von $\widehat{x}$ ausdrücken kann (Übergang zu Lagrangeschen Koordinaten), so bleibt P doch an dA gebunden. Der Versuch, die Spannungen direkt auf $d\widehat{A}$ zu beziehen, also ein $\widehat{P}$ zu konstruieren, ist physikalisch unnatürlich. Wir wollen daher darauf verzichten.

5.1 Postulate

Bei kartesischen Koordinaten liefert die Spannungsmatrix P_0 die auf ein Flächenelement dA_0 im Punkte y wirkende Kraft dq_0 in der Gestalt: $dq_0 = P_0\,dA_0$. Im allgemeinen wird man annehmen können, daß auf das Material keine solchen äußeren Kräfte wirken, die volumabhängige Drehmomente hervorrufen. Es ist bekannt, daß dann P_0 symmetrisch ist. Im folgenden braucht jedoch diese Symmetrie nicht vorausgesetzt zu werden.

Haben wir beliebige krummlinige Koordinaten, so muß zunächst ein Flächenelement dA passend als Transformierte von dA_0 definiert werden. Der Spannungstensor P soll dann so gebildet werden, daß $P\,dA$ wieder die Kraft angibt, die auf das Flächenelement ausgeübt wird. Wird das Element um den Vektor dz parallel verschoben, so soll die Arbeit $dz \cdot P\,dA$ geleistet werden. Damit kommen wir zu den folgenden Postulaten:

P 1. *P ist ein Tensor oder eine tensorielle Dichte.*

P 2. *Für das Flächenelement gilt $dA = H\,dA_0$, wo H noch passend zu bestimmen ist.*

P 3. *Wird das Flächenelement um dz verschoben, so wird die Arbeit $dW = dz \cdot P\,dA$ geleistet.*

5.2 Die Realisierung der Postulate

dW muß als numerische Größe invariant gegen Koordinatentransformation sein. Also gilt:

$$dz \cdot P\,dA = dz_0 \cdot P_0\,dA_0\,, \tag{5.1}$$

wenn $dz_0 = M^{-1}dz$ der entsprechende Verschiebungsvektor in kartesischen Koordinaten ist. Nun erhalten wir mit Hilfe von P2 und (2.9):

$$dz_0 \cdot P_0\,dA_0 = M^{-1}dz \cdot P_0\,H^{-1}\,dA = dA \cdot (H^{-1})^T P_0^T\,M^{-1}dz = dz \cdot (M^{-1})^T P_0\,H^{-1}dA\,.$$

Der Vergleich mit (5.1) liefert, da dz und dA beliebige Vektoren sind:

$$P = (M^{-1})^T P_0\,H^{-1}. \tag{5.2}$$

(2.10) zeigt, daß P entweder α) zweifach kovariant bei $H = M \cdot \sqrt{(\det G)^n}$ oder β) kovariant-kontravariant bei $H = (M^{-1})^T \cdot \sqrt{(\det G)^n}$ ist.

Im Falle (α) ist dA kontravariant und im Falle (β) kovariant. Soll die Länge von dA die geometrische Größe des Flächenelementes sein, so ist $n = 0$ zu setzen. P ist dann ein echter Tensor; und zwar ist in den Fällen (α) und (β):

$$P = (M^{-1})^T P_0\,M^{-1} \tag{5.2α}$$

und

$$P = (M^{-1})^T P_0\,M^T. \tag{5.2β}$$

Im Falle (α) ist dann $dA = M\,dA_0$. Wird das Flächenelement dA_0 aus den Vektoren dx_{10} und dx_{20} gebildet, so ist $dA_0 = dx_{10} \times dx_{20} = M^{-1}dx_1 \times M^{-1}dx_2$ oder mit (2.11): $dA_0 = \sqrt{\det G} \cdot M^T(dx_1 \times dx_2)$. Damit wird

$$dA = \sqrt{\det G} \cdot G^{-1}(dx_1 \times dx_2)\,. \tag{5.3α}$$

Im Falle (β) dagegen ist

$$dA = \sqrt{\det G} \cdot (dx_1 \times dx_2)\,. \tag{5.3β}$$

Ob man mit kontravariantem oder kovariantem dA rechnen will, ist natürlich gleichgültig. Wie (5.3) zeigt, liefert jedoch die kovariante Definition (β) die einfachere Formel. Allerdings ist dann P nicht mehr symmetrisch, wenn P_0 es war. Dafür bleiben jedoch alle Invarianten von P bei Koordinatentransformation ungeändert.

5.3 Die Arbeitsleistung bei infinitesimaler Verzerrung

Wir nehmen jetzt an, es herrsche in einem Raumgebiete um y der homogene durch P_0 definierte Spannungszustand. Ein geschlossenes Volumen V habe die Randfläche $\mathcal{F}$ mit den Flächenelementen dA_0. Wir führen nun in der Umgebung von y eine homogene infinitesimale Verzerrung $1\!\!1 + dF_0$ durch. Das Flächenelement dA_0 wird dabei einer Verschiebung um den Vektor $dF_0\, r_0$ unterworfen, wenn r_0 sein ursprünglicher Abstand vom Nullpunkt war. Da die gleichzeitige infinitesimale Drehung und Verzerrung des Flächenelementes aus Symmetriegründen keine Arbeitsleistung erfordert, ist die gesamte an dem Volumen geleistete Arbeit

$$\begin{aligned} V \cdot dW &= \iint\limits_V dF_0\, r_0 \cdot P_0\, dA_0 = \iint\limits_V P_0^T\, dF_0\, r_0 \cdot dA_0 \\ &= \iiint\limits_V \operatorname{div}(P_0^T\, dF_0\, r_0)\, dV = \iiint\limits_V \operatorname{tr}(P_0^T\, dF_0)\, dV\,. \end{aligned}$$

Also wird die Arbeit pro Volumeinheit:

$$dW = \operatorname{tr}(P_0^T\, dF_0)\,. \tag{5.3}$$

Ist $1\!\!1 + dF_0$ eine infinitesimale Radialstreckung, also $dF_0 = d\lambda \cdot 1\!\!1$ mit der Volumdehnung $\frac{dV}{V} = 3 \cdot d\lambda$, so wird $dW = d\lambda \cdot \operatorname{tr} P_0^T = \frac{dV}{V} \cdot \frac{1}{3} \operatorname{tr} P_0^T$. Herrscht die hydrostatische Spannung σ, so wird $dW = \frac{dV}{V} \cdot \sigma$. Auch bei unsymmetrischem P_0 vertritt also $\frac{1}{3} \operatorname{tr} P_0^T$ die hydrostatische Spannung, worin die Begründung liegt, $\frac{1}{3} \operatorname{tr} P_0^T$ als mittlere Spannung σ zu bezeichnen.

Für beliebige Koordinaten errechnet sich nach (5.2) dann der Wert der mittleren Spannung zu

$$\sigma = \frac{1}{3} \operatorname{tr} P_0^T = \frac{1}{3} \operatorname{tr}(H^T P^T M) = \frac{1}{3} \operatorname{tr}(M\, H^T P^T)\,,$$

also in den Fällen (α) und (β)

$$\sigma = \frac{1}{3} \operatorname{tr}(G^{-1} P^T) = \frac{1}{3} \operatorname{tr}(P\, G^{-1}) \tag{5.5α}$$

und

$$\sigma = \frac{1}{3} \operatorname{tr} P^T = \frac{1}{3} \operatorname{tr} P\,. \tag{5.5β}$$

Wieder ergibt die gemischt-variante Definition (β) die einfachere Formel.

Der infinitesimalen Verzerrung $1\!\!1 + dF_0$ entspricht in beliebigen Koordinaten die Verzerrung $1\!\!1 + dF$ gemäß: $M\,(1\!\!1 + dF_0)\, dy_0 = (1\!\!1 + dF)\, M\, dy_0$, also $dF_0 = M^{-1} dF\, M$. Wir haben daher mit (5.2) aus (5.4):

$$dW = \operatorname{tr}(H^T P^T M\, M^{-1} dF\, M) = \operatorname{tr}(M\, H\, P\, dF)\,.$$

In den Fällen (α) und (β) wird somit

$$dW = \operatorname{tr}(G^{-1} P^T dF) = \operatorname{tr}(dF^T \cdot P\, G^{-1}) \tag{5.4α}$$

und

$$dW = \operatorname{tr}(P^T dF) = \operatorname{tr}(dF^T \cdot P)\,. \tag{5.4β}$$

Wieder erhalten wir bei der Definition (β) das einfachere Resultat.

5.4 Invarianz des Elastizitätsgesetzes

Für isotropes Material hat in kartesischen Koordinaten das Elastizitätsgesetz die Gestalt [2]:

$$e^j\, P_0 = \frac{\partial e}{\partial j}\, 1\!\!1 + 2\, \frac{\partial e}{\partial k}\, L + 3\, \frac{\partial e}{\partial l}\, L^2 \qquad \text{bei} \qquad j = \operatorname{tr} L\,,\;\; k = \operatorname{tr} L^2 \;\text{ und }\; l = \operatorname{tr} L^3,$$

wo e das elastische Potential pro Volumeinheit des Ausgangszustandes ist.

Wollen wir erreichen, daß diese einfache Gestalt auch für beliebige Koordinaten gilt, so müssen P und L die gleiche gemischte Invarianz haben; denn nur dann übertragen sich die Invarianten und funktionellen Abhängigkeiten. Hieraus und aus den weiter oben genannten Gründen erscheint es als am zweckmäßigsten, sowohl P als auch E kovariant-kontravariant zu definieren. Aus diesem Grunde ist auch in Kapitel 3 diese Varianz bei der Definition von E betont worden.

6 Review

Hencky hat die Logarithmen der Hauptdehnungen als Verzerrungsgrößen bei endlichen Formänderungen bei isotropen Stoffen eingeführt. Diese Definition des Verzerrungstensors wird hier als Spezialfall einer Systematik aus folgenden Postulaten wiedergewonnen, wobei F die Matrix der linearen Transformation der Koordinatendifferentiale und G der metrische Fundamentaltensor sei:

1. Der Verzerrungstensor $E(F)$ ist der Matrix F zugeordnet und hängt außer F nur noch von G ab.
2. Ist R eine Drehung, so ist $E(F\,R) = E(F)$.
3. Es gilt ein Superpositionsprinzip so, daß zu 2 koachsialen Streckungen S_1 und S_2 und den zugehörigen Verzerrungstensoren $E_1 = E(S_1)$, $E_2 = E(S_2)$, $E_3 = E(S_1\,S_2)$ eine eindeutig umkehrbare Funktion $f(x)$ existiert mit $f(E_1) + f(E_2) = f(E_3)$.
4. Für infinitesimale Deformationen $\mathbb{1} + dF'$ in Cartesischen Koordinaten geht der Verzerrungstensor über in $\frac{1}{2}\,(dF' + dF'^T) + o(dF')$, wo $o(x)$ das bekannte Symbol und allgemein F'^T die zu F' transponierte Matrix bedeutet.

Zerlegt man in Cartesischen Koordinaten F in ein Produkt aus einer reinen Streckung S mit 3 reellen positiven Eigenwerten und einer Euklidischen Transformation, so führen obige Postulate auf $E = f^{-1}(\log S)$, wo $f^{-1}(x)$ die Umkehrfunktion von $f(x)$ ist und für kleine x die Form $x + o(x)$ annimmt. Im einfachsten Falle ist $f \equiv x \equiv f^{-1}$ zu setzen, was auf Henckys Ansatz führt. Die Übertragung auf krummlinige Koordinaten liefert dann nach Wahl einen kovarianten, kontravarianten oder gemischten Tensor, im letzteren Falle wird $E = f^{-1}(L^*)$ mit $L^* = \frac{1}{2}\,\log(G\,F\,\widehat{G}^{-1}F^T)$, wo $\widehat{G}$ der auf die Endlage bezogene Fundamentaltensor ist. Hierin ist allgemein f und f^{-1} als Funktion eines Tensors wieder ein Tensor und z.B. gegeben als eine konvergente unendliche Reihe mit tensoriellem Argument. — Der Logarithmus der Volumendehnung ist dann gegeben durch $\operatorname{tr} f(E)$, d.h. die Spur von $f(E)$. — Der von Trefftz eingeführte, sonst übliche Verzerrungstensor in gemischter Form genügt den obigen Postulaten für die Superpositionsfunktion $f(x) = -\frac{1}{2}\,\log(1 - 2x)$. — Der Verzerrungsdeviator D wird aus dem Verzerrungstensor abgeleitet durch die Forderungen, daß zwei Deformationen, die sich nur um eine Ähnlichkeitstransformation unterscheiden, den gleichen Deviator haben und daß der Tensor einer volumentreuen Deformation mit seinem Deviator identisch ist. Bezeichnet allgemein $\operatorname{dev} E$ die gewöhnliche Deviatorbildung bezüglich E, so wird $D = f^{-1}(\operatorname{dev} L^*)$. Die Diskussion der zu $\operatorname{dev} L$ gehörigen charakteristischen Gleichung gibt Aufschluß über die physikalische Bedeutung des Verhältnisses $\operatorname{tr}(\operatorname{dev} L^3)^2$ zu $\operatorname{tr}(\operatorname{dev} L^2)^3$ und zeigt, daß $\sqrt{\operatorname{tr}(\operatorname{dev} L^2)}$ allgemein als Maß für die Beanspruchung anzusehen ist in Übereinstimmung mit der üblichen Festsetzung bei infinitesimalen Formänderungen. — Die Spannungen bezieht Verf. auf das unverformte Flächenelement und definiert den Spannungstensor aus der Forderung, daß

1. in cartesischen Koordinaten die auf ein Flächenelement dA_0 wirkende Kraft dq_0 gegeben ist durch $dq_0 = P_0\,dA_0$,
2. in krummlinigen Koordinaten P ein Tensor (bzw. eine Tensordichte) ist,
3. daß bei Verschiebung des Flächenelementes um dz die Arbeit $dW = dz \cdot P\,dA$ geleistet wird.

Daraus ergibt sich eine Darstellung für P mit Hilfe von P_0 als gemischter oder zweifach kontravarianter Tensor. Im 1. Falle ist jedoch P nicht mehr zugleich mit P_0 symmetrisch. — Die Berechnung der Arbeitsleistung bei infinitesimaler Verzerrung führt auf die bekannten Formeln und zeigt den Vorteil der Verwendung gemischter Tensoren.

Moufang (Frankfurt a. M.).

7 Symbolverzeichnis

Unsere Notation	Richters Notation	Bedeutung
A, B, ...	$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ...	quadratische 3×3 – Matrizen
x, y, ...	$\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ ...	Vektoren
A und B	$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$	beliebige Matrizen [Kap. 2]
a_{ik} bzw. $(A)_{ik}$	a_{ik} bzw. $(\mathfrak{A})_{ik}$	Element in der i-ten Zeile und k-ten Spalte der Matrix A
$\det A$	$\lvert\mathfrak{A}\rvert$	Determinante der Matrix A
$\operatorname{tr} A$	$\{\mathfrak{A}\}$	Spur der Matrix A
A^T	$\overline{\mathfrak{A}}$	Transponierte der Matrix A
$\mathbb{1}$	$\mathfrak{E}$	Einheitsmatrix
A^{-1}	$\mathfrak{A}^{-1}$	Inverse der Matrix A
S	$\mathfrak{S}$	Streckung
R	$\mathfrak{R}$	Transformation oder Drehung
F bzw. $\overline{F}$	$\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$	Funktionalmatrix (Verzerrungszustand) [ab Kap. 3]
$\widehat{x}$	$\widehat{x}$	Ur-Bildpunkt von x unter F
$E(F)$ bzw. E	$\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$ bzw. $\mathfrak{B}$	Verzerrungstensor [ab Kap. 3.2]
$\frown$	$\frown$	Kennzeichen eines zu $\widehat{x}$ gehörenden Tensors
f	f	umkehrbar eindeutige Funktion mit $f(B_1) + f(B_2) = f(B)$
f^{-1}	g	Umkehrfunktion zu f
o	o	Funktion mit $y = o(x)$: $\lim \frac{y}{x} = 0$
$\widehat{y}$ und y	$\widehat{\mathfrak{y}}$ und $\mathfrak{y}$	Original- und Bildpunkt der Deformation [Kap. 3]
E_0	$\mathfrak{W}$	zur Deformationsmatrix gehörender Verzerrungstensor
Z	$\mathfrak{Z}$	$Z = f(E_0)$
L	$\mathfrak{L}$	logarithmische Deformationsmatrix
M	$\mathfrak{U}$	Funktionalmatrix von $x = x(y)$
G	$\mathfrak{G}$	metrischer Fundamentaltensor
L^*	$\mathfrak{L}^*$	logarithmische Deformation in transformierten Koordinaten
T	$\mathfrak{T}$	gewöhnlicher Verzerrungstensor
D	$\mathfrak{D}$	Verzerrungsdeviator
$\operatorname{dev} A$	$\widetilde{\mathfrak{D}}$	gewöhnlicher Deviator der Matrix A
P	$\mathfrak{P}$	Spannungstensor
dA	$d\mathfrak{f}$	Flächenelement in x
dq_0	$d\mathfrak{k}_0$	die auf ein Flächenelement dA_0 wirkende Kraft
H	$\mathfrak{C}$	Hilfskonstante
dW	dA	Arbeit

Literatur

[1] R. Moufang. Volumtreue Verzerrungen bei endlichen Formänderungen. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 25/27:209–214, 1947.

[2] H. Richter. Das isotrope Elastizitätsgesetz. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 28:205–209, 1948.