

Zur Elastizitätstheorie endlicher Verformungen.

Herrn GEORG HAMEL zum 75. Geburtstag in Verehrung gewidmet.

Von HANS RICHTER in Haltingen (Kr. Lörrach).

(Eingegangen am 3. 6. 1952.)

§ 1. Einleitung.

Die folgenden Ausführungen sind inhaltlich insoweit zum Teil nicht neu, als hier abgeleitete Relationen teils in früheren Arbeiten des Verfassers, teils in anderen einschlägigen Arbeiten, wie vor allem den Lehrbüchern von Herrn HAMEL, unter anderen Gesichtspunkten und mit anderen Methoden bewiesen wurden. Statt dessen wird das Hauptgewicht darauf gelegt, die verschiedenen bekannten Ergebnisse von einem einheitlichen geometrischen Standpunkte aus zu verknüpfen. Dieser Wunsch ergab sich in einer längeren schriftlichen Diskussion von Herrn Hamel mit dem Verfasser, der mit einer Veröffentlichung seiner damaligen Ausführungen der diesbezüglichen Anregung des Jubilars dankbar nachkommen möchte — um so dankbarer, als diese Darstellung wesentlich von dem genannten Diskussionsablauf beeinflußt ist.

§ 2. Anschauliche Betrachtung des Verzerrungs-Spannungs-Zustandes.

Erleidet ein zunächst spannungsfreies elastisches Medium eine statische Verzerrung, die örtlich — bei Bezugnahme etwa auf Fehlstellenabstand oder Korngröße — nicht zu stark variabel ist, so kann es als Kontinuum betrachtet werden, bei dem die erzeugten Spannungen in jedem Punkte desselben nur von der Affinität $\mathfrak{A}$ abhängen, die die Verzerrung in der infinitesimalen Umgebung angibt. Wir beschränken uns daher auf die Betrachtung homogener, direkter, affiner, statischer Verzerrungen $\mathfrak{A}$, wobei dieses Symbol zunächst rein euklidisch-geometrisch gemeint sei als Transformation der Vektoren $\mathfrak{x}$ im Raume ohne Bezugnahme auf ein speziell gewähltes Koordinatensystem. Die zu $\mathfrak{A}$ inverse Affinität werde mit $\mathfrak{A}^{-1}$ bezeichnet; $\mathfrak{E}$ sei die identische Abbildung; unter $\mathfrak{A}$ verstehen wir orthogonale Drehungen und unter $\mathfrak{S}$ reine Streckungen in drei zueinander orthogonalen Richtungen mit positiven Streckfaktoren. Die $\mathfrak{A}$ bilden eine Gruppe, wobei $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ bedeute, daß erst $\mathfrak{A}$, dann $\mathfrak{B}$ angewendet wird. Andererseits sind auch $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ durch $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{B}\mathfrak{x}$ und $\lambda\mathfrak{A}$ durch $(\lambda\mathfrak{A})\mathfrak{x} = \lambda \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ für Zahlen λ definiert.

Anschaulich seien auch die Spannungen aufgefaßt: Für jede Richtung $\mathfrak{n}$ im Raume legen wir die durch den betrachteten Materialpunkt gehende und zu $\mathfrak{n}$

orthogonale Ebene $E(n)$ durch das vermöge $\mathfrak{A}$ deformierte Material. Unter der Spannung $p(n; \mathfrak{A})$ verstehen wir die auf die Flächeneinheit von $E(n)$ bezogene Kraft nach Größe und Richtung, die an Stelle des Materials „außerhalb“ von $E(n)$ zur Erhaltung des Gleichgewichts angreifen müßte. Für jedes n wird p ebenfalls durch einen Vektor dargestellt.

Wir fragen nach der Art der Abhängigkeit der Vektorfunktion $p(n; \mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$. Denken wir uns hierzu das gemäß $\mathfrak{A}$ verzerrte Material anschließend der Rotation $\mathfrak{R}$ unterworfen, so werden p und n beide mit $\mathfrak{R}$ gedreht; also gilt

$$(2.1) \quad p(n; \mathfrak{R}\mathfrak{A}) = \mathfrak{R}p(\mathfrak{R}^{-1}n; \mathfrak{A}).$$

Nun läßt sich jedes $\mathfrak{A}$ eindeutig darstellen in der Gestalt

$$(2.2) \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{R}_l \mathfrak{E}_r, \quad \left(\begin{array}{l} \mathfrak{E}_r = \text{rechter Streckanteil von } \mathfrak{A}, \\ \mathfrak{R}_l = \text{linker Drehanteil von } \mathfrak{A} \end{array} \right),$$

so daß (2.1) liefert:

$$(2.3) \quad p(n; \mathfrak{A}) = \mathfrak{R}_l p(\mathfrak{R}_l^{-1}n; \mathfrak{E}_r).$$

Hieraus folgt:

Bei beliebigem anisotropen Material legt der rechte Streckanteil die thermodynamischen Größen vollkommen, dagegen die Spannungen nur bis auf die Orientierung fest; zur völligen Berechnung der Spannungen ist noch der Drehanteil der Verzerrung zu geben.

Ist das Material dagegen isotrop, so ist es für die Spannungen gleichgültig, ob vor $\mathfrak{A}$ noch eine Drehung ausgeübt wird. Hier gilt also analog zu (2.1)

$$(2.1 \text{ iso}) \quad p(n; \mathfrak{A}\mathfrak{R}) = p(n; \mathfrak{A}).$$

Bildet man die zu (2.2) analoge eindeutige Zerlegung:

$$(2.4) \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{E}_l \mathfrak{R}_r,$$

so ergibt sich

$$(2.3 \text{ iso}) \quad p(n; \mathfrak{A}) = p(n; \mathfrak{E}_l).$$

Der Vergleich von (2.2) mit (2.4) liefert wegen $\mathfrak{E}_l \mathfrak{R}_r = \mathfrak{R}_r (\mathfrak{R}_r^{-1} \mathfrak{E}_l \mathfrak{R}_r)$ sofort

$$(2.5) \quad \mathfrak{R}_l = \mathfrak{R}_r = \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{E}_r = \mathfrak{R}^{-1} \mathfrak{E}_l \mathfrak{R};$$

d. h. die Drehanteile von $\mathfrak{A}$ sind identisch, und die Streckanteile unterscheiden sich nur durch die Orientierung der Streckrichtungen. Aus (2.3 iso) und (2.3) ergibt sich nun sofort

$$p(n; \mathfrak{E}_l) = p(n; \mathfrak{A}) = \mathfrak{R}p(\mathfrak{R}^{-1}n; \mathfrak{R}^{-1} \mathfrak{E}_l \mathfrak{R}),$$

oder allgemein für isotropes Material

$$(2.6 \text{ iso}) \quad p(n; \mathfrak{R} \mathfrak{E} \mathfrak{R}^{-1}) = \mathfrak{R}p(\mathfrak{R}^{-1}n; \mathfrak{E})$$

Damit haben wir:

Bei isotropem Material sind die thermodynamischen Größen und die Spannungen allein von dem linken Streckanteil $\mathfrak{E}_l$ abhängig. Werden die Streckachsen von $\mathfrak{E}_l$ mit einem $\mathfrak{R}$ verdreht, so folgt p dieser Drehung.

Hieraus folgt insbesondere durch Anwendung von Drehungen um 180° , daß für die Streckrichtungen $\hat{s}$ von $\mathfrak{E}_l$ gilt: $p(\hat{s}; \mathfrak{E}_l) \parallel \hat{s}$.

Unsere Betrachtungen geben gleichzeitig Auskunft über die Anzahl der Parameter im allgemeinen Elastizitätsgesetz endlicher Verformungen: Bei allgemein anisotropem Material sind die Streckfaktoren von $\mathfrak{S}$, und seine Lage zu den Kristallachsen wesentlich; elastische Energie und Entropie enthalten also 6 Parameter, die die Spannungen bis auf die aus der Kenntnis von $\mathfrak{R}$ folgende Orientierung liefern. Bei isotropem Material sind nach (2.3 iso) und (2.6 iso) nur die drei Streckfaktoren wesentlich, bis auf die Orientierung, die jedoch durch $\mathfrak{S}_I$ allein bereits festgelegt ist; $\mathfrak{R}$ ist bei Verwendung von $\mathfrak{S}_I$ unwesentlich. Dagegen liefert $\mathfrak{S}$, im isotropen Falle wohl die drei Parameter, nicht aber die Orientierung und ist insoweit weniger günstig.

Die obigen Betrachtungen setzen voraus, daß $p(n)$ durch $\mathfrak{A}$ festgelegt wird. Dies gilt, wenn Temperatur (resp. Entropie) für Ausgangs- und Endzustand vorgegeben sind oder spezielle Veränderungen wie isotherme oder adiabatische Verzerrungen betrachtet werden. Im allgemeinen Falle kommt noch Temperatur oder Entropie als weiterer Parameter im Elastizitätsgesetz hinzu.

§ 3. Matrizielle Schreibweise.

Die eleganteste mathematische Erfassung der Elastizitätstheorie endlicher Verformungen ist zweifellos die durch Tensoren für beliebiges Koordinatensystem. Unangenehm dabei ist jedoch die laufende Beachtung des Verschwindens des Krümmungstensors und die Schwierigkeit, die obengenannten einfachen geometrischen Zusammenhänge unmittelbar den Tensoren anzusehen; ja, die zur Erlangung echter Tensoren üblicherweise vorschnell durchgeführte Bildung des „Verzerrungstensors“ verdeckt wichtige Zusammenhänge. Da der spätere Übergang zu einem beliebigen Koordinatensystem leicht im Rahmen der Matrizenrechnung ohne Verwendung des Ricci-Kalküls möglich ist, legen wir hier der Einfachheit halber ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde, in welchem der Vektor des allgemeinen Punktes des Ausgangszustandes durch eine Spaltenmatrix

$$(3.1) \quad \widehat{x} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \\ \widehat{x}_3 \end{pmatrix}$$

und der entsprechende Punkt des deformierten Zustandes durch

$$(3.2) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Eine Affinität $\mathfrak{A}$ wird durch eine quadratische Matrix charakterisiert, die das gleiche Symbol $\mathfrak{A}$ trägt, so daß

$$(3.3) \quad x = \mathfrak{A} \widehat{x}$$

bei homogener affiner Verzerrung ist. Matrizen $\mathfrak{A}$ vom Typus $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{S}$ werden resp. charakterisiert durch

$$(3.4) \quad \mathfrak{A} \mathfrak{R}' = \mathfrak{E} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}',$$

wobei allgemein $\mathfrak{U}'$ die zu $\mathfrak{U}$ Transponierte (an der Hauptdiagonale Gespiegelte) bezeichnet, (2.3), (2.4) und (2.5) bleiben wörtlich erhalten. Hinzu treten

$$(3.5) \quad \mathfrak{U}\mathfrak{U}' = \mathfrak{E}_I^2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{U}'\mathfrak{U} = \mathfrak{E}_r^2,$$

woraus $\mathfrak{E}_I$ und $\mathfrak{E}_r$ als positiv definite Quadratwurzeln eindeutig bestimmt sind. Bezeichnen wir die aus $\mathfrak{U}$ gebildete Determinante mit $|\mathfrak{U}|$, so gibt $|\mathfrak{U}| = |\mathfrak{E}_I| = |\mathfrak{E}_r|$ die Volumvergrößerung an.

Bekanntlich folgt aus dem Gleichgewicht der Kräfte und Momente, daß sich bei kartesischen Koordinaten $\mathfrak{p}(\mathfrak{n})$ darstellen läßt mit Hilfe einer Matrix $\mathfrak{P}$, des Spannungstensors, so daß

$$\mathfrak{p}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{P}\mathfrak{n} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$$

wird. Unsere Gleichungen (2.3), (2.3 iso) und (2.6 iso) schreiben sich nun

$$(3.6) \quad \mathfrak{P}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{R}\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_r)\mathfrak{R}^{-1},$$

$$(3.6 \text{ iso}) \quad \mathfrak{P}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{P}(\mathfrak{E}_I),$$

$$(3.7 \text{ iso}) \quad \mathfrak{P}(\mathfrak{R}\mathfrak{E}\mathfrak{R}^{-1}) = \mathfrak{R}\mathfrak{P}(\mathfrak{E})\mathfrak{R}^{-1}.$$

Die Transformationseigenschaft (3.7 iso) ist charakteristisch für isotropes Material, da aus (3.7 iso) in Verbindung mit (3.6) und (2.5) wieder (3.6 iso) folgt. Bei anisotropem Material ist also $\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_r)$ keine affin (oder auch nur orthogonal) invariante Matrixfunktion, sondern besteht aus sechs bis jetzt zueinander beziehungslosen Funktionen.

§ 4. Verzerrungstensenoren und modifizierte Spannungstensenoren.

Unter einem „Verzerrungstensor $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{U}$ für $\mathfrak{P}$ “ verstehen wir bei Außerachtlassung der hier ja unwesentlichen Tensoreigenschaft eine Matrix $\mathfrak{B}$ mit den Eigenschaften:

- $\mathfrak{B}$ hängt eindeutig von $\mathfrak{U}$ ab: $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathfrak{U})$.
- Ist $\mathfrak{B}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{B})$, so ist $\mathfrak{P}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{P}(\mathfrak{B})$ für jedes Material.
- Die Mannigfaltigkeit aller $\mathfrak{B}$ ist von möglichst geringer Dimension kleiner als neun.

Mit $\mathfrak{B}$ ist dann jede eineindeutige Matrixfunktion von $\mathfrak{B}$ ein Verzerrungstensor, eine Eigenschaft, die man zur Normierung des Verzerrungstensors benutzen kann. Aus den Betrachtungen von § 2 folgt nun:

Bei allgemein anisotropem Material gibt es für $\mathfrak{P}$ keinen Verzerrungstensor. Bei isotropem Material sind die Verzerrungstensenoren für $\mathfrak{P}$ die eineindeutigen Funktionen von $\mathfrak{E}_I$.

Da nun $\mathfrak{E}_r$ nach (3.6) das $\mathfrak{P}$ bis auf die Orientierung festlegt, liegt es nahe, einen modifizierten Spannungstensor

$$(4.1) \quad \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{P}(\mathfrak{U})\mathfrak{R} = \mathfrak{P}(\mathfrak{E}_r)$$

einzuführen. Eine andere Bildung dieser Art ist

$$(4.2) \quad \mathfrak{P}_2 = |\mathfrak{U}| \cdot \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{P}(\mathfrak{U})\mathfrak{U}'^{-1},$$

das sich mit Hilfe von (2.2) und (3.6) und wegen $|\mathfrak{U}| = |\mathfrak{E}_r|$ schreibt als

$$(4.3) \quad \mathfrak{P}_2 = |\mathfrak{E}_r| \cdot \mathfrak{E}_r^{-1}\mathfrak{P}(\mathfrak{E}_r)\mathfrak{E}_r^{-1}.$$

Es gilt also:

Für die modifizierten Spannungstensoren $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ ist bei beliebigem anisotropem Material jede eindeutige Funktion von $\mathfrak{S}_r$ ein Verzerrungstensor.

Jedoch liefern die $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ die Spannungen im Raume erst bei zusätzlicher Kenntnis von $\mathfrak{N}$. Wegen der Symmetrie von $\mathfrak{P}$ und wegen (3.4) sind $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ beide symmetrisch. $\mathfrak{P}_1$ hat zudem die gleichen Invarianten wie $\mathfrak{P}$; insbesondere liefert die Spur von $\mathfrak{P}_1$ den dreifachen hydrostatischen Druck. Diese Eigenschaft gilt aber nicht für das — wie wir gleich sehen werden — in der Literatur üblichere $\mathfrak{P}_2$.

Der Zusammenhang der von uns eingeführten Verzerrungs- und Spannungstensoren mit den in der Literatur sonst noch eingeführten ist nun sehr leicht zu sehen. Ausgehend von (3.3) bildet man üblicherweise den Ausdruck $\frac{1}{2}(|\mathfrak{x}|^2 - |\widehat{\mathfrak{x}}|^2)$ und betrachtet ihn als quadratische Form in $\mathfrak{x}$ mit symmetrischer Koeffizientenmatrix $\mathfrak{Z}$ oder in $\widehat{\mathfrak{x}}$ mit Matrix $\widehat{\mathfrak{Z}}$. Nun ergibt sich aus (3.3)

$$|\mathfrak{x}|^2 - |\widehat{\mathfrak{x}}|^2 = \mathfrak{x}'(\mathfrak{G} - (\mathfrak{N}\mathfrak{N}')^{-1})\mathfrak{x} = \widehat{\mathfrak{x}}'(\mathfrak{N}'\mathfrak{N} - \mathfrak{G})\widehat{\mathfrak{x}}$$

und hieraus für die „Verzerrungstensoren“ $\mathfrak{Z}$ und $\widehat{\mathfrak{Z}}$ unter Beachtung von (3.5)

$$(4.4) \quad \mathfrak{Z} = \frac{1}{2}(\mathfrak{G} - \mathfrak{S}_l^{-2}) \quad \text{und} \quad \widehat{\mathfrak{Z}} = \frac{1}{2}(\mathfrak{S}_r^2 - \mathfrak{G}).$$

$\mathfrak{Z}$ und $\widehat{\mathfrak{Z}}$ sind also spezielle analytische Funktionen der Streckanteile $\mathfrak{S}_l$ und $\mathfrak{S}_r$, der Prototypen von Verzerrungstensoren, mit entsprechenden Einschränkungen: $\mathfrak{Z}$ ist nur Verzerrungstensor bei isotropem Material; dann aber für $\mathfrak{P}$. $\widehat{\mathfrak{Z}}$ ist stets Verzerrungstensor; aber nur für die $\widehat{\mathfrak{P}}_r$ (oder ähnliche Bildungen). Ebensogut kann man auch andere Funktionen der Streckanteile verwenden, unter denen sich die „natürlichen Verzerrungstensoren“

$$(4.5) \quad \mathfrak{Q} = \log \mathfrak{S}_l \quad \text{und} \quad \widehat{\mathfrak{Q}} = \log \mathfrak{S}_r,$$

als besonders geeignet erweisen und insbesondere durch gewöhnliche Deviatorbildung eine Separierung von Volum- und Gestaltänderung gestatten.

In der Literatur wird — meist in Zusammenhang mit dem Lagrangeschen Standpunkt — eine Modifikation $\widehat{\mathfrak{P}}$ des Spannungstensors eingeführt, die wie folgt definiert ist:

- a) die Anwendung von $\widehat{\mathfrak{P}}$ auf ein Flächenelement $d\widehat{\mathfrak{f}}$ des Ausgangszustandes liefert die Kraft auf das entsprechende Flächenelement $d\mathfrak{f}$ des deformierten Zustandes;
- b) die auf $d\mathfrak{f}$ wirkende Kraft wird in dem vermöge $\mathfrak{N}$ verzerrten Koordinatensystem angegeben.

Der Zusammenhang von $\widehat{\mathfrak{P}}$ mit $\mathfrak{P}$ ist leicht einzusehen: Bezeichnen wir nämlich die auf $d\mathfrak{f}$ wirkende Kraft im kartesischen System mit $d\mathfrak{f}$ und im affin verzerrten System mit $d\widehat{\mathfrak{f}}$, so haben wir die Beziehungen

$$(4.6) \quad d\mathfrak{f} = \mathfrak{P} d\mathfrak{f}, \quad d\widehat{\mathfrak{f}} = \widehat{\mathfrak{P}} d\widehat{\mathfrak{f}}, \quad d\mathfrak{f} = |\mathfrak{N}| \cdot \mathfrak{N}'^{-1} d\widehat{\mathfrak{f}}, \quad d\mathfrak{f} = \mathfrak{N} d\widehat{\mathfrak{f}},$$

aus denen sich sofort ergibt:

$$(4.7) \quad \widehat{\mathfrak{P}} = |\mathfrak{N}| \cdot \mathfrak{N}^{-1} \mathfrak{P}(\mathfrak{N}) \mathfrak{N}'^{-1}.$$

$\widehat{\mathfrak{P}}$ ist also gerade das weiter oben eingeführte und diskutierte $\mathfrak{P}_2$.

§ 5. Die elastische Energie.

Ein Einheitsvolumen des spannungsfreien Ausgangszustandes werde den stetig von dem Parameter (z. B. der Zeit) t abhängigen Deformationen $\mathfrak{U}(t)$ mit $\mathfrak{U}(0) = \mathfrak{E}$ unterworfen. Zum „Zeitpunkt“ t möge die innere Energie $u(t)$, die Entropie $s(t)$, die absolute Temperatur $\Theta(t)$ und die vom Material geleistete mechanische Arbeit $A(t)$ sein. Dann gilt

$$(5.1) \quad dA + du - \Theta ds = dA + d(u - \Theta s) + s d\Theta = 0.$$

Die im Volumelement aufgespeicherte äußere Arbeit wird oft „elastisches Potential“ genannt. Wir sehen, daß dieses Potential bei isentropischen Verzerrungen die innere Energie u , bei isothermen Verzerrungen dagegen die freie Energie $f = u - \Theta s$ ist.

u wird als Funktion von $\mathfrak{U}$ und s angesetzt:

$$(5.2) \quad u = \psi(\mathfrak{U}, s).$$

Da bei isochoren Vorgängen $dA = 0$ ist, folgt

$$(5.3) \quad \Theta = \frac{\partial \psi}{\partial s}$$

und daher aus (5.1)

$$(5.4) \quad dA + (d\psi)_{s=\text{const}} = 0.$$

Wir können uns deshalb auf isentropische Vorgänge beschränken, d. h. wir betrachten s als freien Parameter, den wir nicht mehr mitschreiben. ψ ist eine Funktion der Komponenten a_{ik} von $\mathfrak{U}$.

Unterwerfen wir ein endliches Volumen V mit der Oberfläche F der infinitesimalen Affinität $\mathfrak{B} = \mathfrak{E} + d\mathfrak{B}$ und herrscht in V der homogene Spannungszustand $\mathfrak{P}$, so ist die von V geleistete Arbeit gegeben durch

$$dA_1 = - \iint_F (\mathfrak{P} d\mathfrak{U})' d\mathfrak{B} \mathfrak{r} = - \iint_F (\mathfrak{P}' d\mathfrak{B} \mathfrak{r})' d\mathfrak{U} = - \iiint_V \text{div} (\mathfrak{P}' d\mathfrak{B} \mathfrak{r})$$

oder wegen $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$:

$$(5.5) \quad dA_1 = -V \cdot \{\mathfrak{P} d\mathfrak{B}\},$$

wenn das Zeichen $\{ \}$ allgemein die Spur einer Matrix angibt. In unserem Falle ist $V = |\mathfrak{U}|$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{E} + d\mathfrak{B}$ die Affinität, die von $\mathfrak{U}(t)$ zu $\mathfrak{U}(t + dt) = \mathfrak{U}(t) + d\mathfrak{U}$ führt, also $\mathfrak{U} + d\mathfrak{U} = (\mathfrak{E} + d\mathfrak{B})\mathfrak{U}$ und damit

$$(5.6) \quad d\mathfrak{B} = d\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{U}^{-1}.$$

Aus (5.4) erhalten wir somit wegen der allgemeinen Regel $\{\mathfrak{U}\mathfrak{B}\mathfrak{E}\} = \{\mathfrak{E}\mathfrak{U}\mathfrak{B}\}$

$$(5.7) \quad |\mathfrak{U}| \cdot \{\mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{P}(\mathfrak{U}) d\mathfrak{U}\} = du = d\psi(a_{ik}).$$

§ 6. Das allgemeine Elastizitätsgesetz.

Benutzen wir für jede Matrix $\mathfrak{M}$ die einleuchtende Schreibweise $\mathfrak{M} = (m_{ik})$, $m_{ik} = (\mathfrak{M})_{ik}$, so schreibt sich (5.7) als

$$|\mathfrak{U}| \sum_{i,k} (\mathfrak{P}(\mathfrak{U}) \mathfrak{U}'^{-1})_{ik} da_{ik} = \sum_{i,k} \frac{\partial \psi}{\partial a_{ik}} da_{ik},$$

woraus sofort folgt:

$$(6.1) \quad \mathfrak{P}(\mathfrak{M}) = |\mathfrak{M}|^{-1} \mathfrak{P}' \mathfrak{M}' \quad \text{mit} \quad (\mathfrak{P}')_{ik} = \frac{\partial \psi}{\partial a_{ik}}.$$

$\psi(a_{ik})$ ist jedoch nicht eine beliebige Funktion, da $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$ sein muß. Diese Bedingung liefert für ψ das partielle Differentialgleichungssystem

$$(6.2) \quad \sum_{\nu=1}^3 \left(\frac{\partial \psi}{\partial a_{i\nu}} a_{k\nu} - \frac{\partial \psi}{\partial a_{k\nu}} a_{i\nu} \right) = 0 \quad \text{für} \quad (i, k) = (1, 2), (1, 3) \text{ und } (2, 3),$$

dessen allgemeine Lösung lautet:

$$(6.3) \quad \psi = \varphi(\gamma_{ik}) \quad \text{mit} \quad \gamma_{ik} = \sum_{\nu=1}^3 a_{\nu i} a_{\nu k} = (\mathfrak{M}' \mathfrak{M})_{ik} = (\mathfrak{S}_r^2)_{ik}.$$

Die innere Energie hängt also nur von $\mathfrak{S}_r$ ab in Übereinstimmung mit den anschaulichen Ergebnissen von § 2. Um nun auch rechnerisch zu verifizieren, daß $\mathfrak{S}_r$ bei beliebigem Material ein Verzerrungstensor für den modifizierten Spannungstensor $\widehat{\mathfrak{P}}$ ist, formen wir (5.7) mit Hilfe von (2.2) und (4.7) um in

$$du = \{\widehat{\mathfrak{P}} \mathfrak{S}_r d\mathfrak{S}_r\} + \{\mathfrak{S}_r \widehat{\mathfrak{P}} \mathfrak{S}_r d\mathfrak{M}\}.$$

Dabei liefert die Anwendung der Regel $\{\mathfrak{M}\mathfrak{N}\} = \{\mathfrak{M}'\mathfrak{N}'\}$ unter Beachtung von $\widehat{\mathfrak{P}} = \widehat{\mathfrak{P}'}$

$$2\{\mathfrak{S}_r \widehat{\mathfrak{P}} \mathfrak{S}_r d\mathfrak{M}\} = \{(\mathfrak{S}_r \widehat{\mathfrak{P}} \mathfrak{S}_r)(d\mathfrak{M}' \mathfrak{M})\} + \{(\mathfrak{S}_r \widehat{\mathfrak{P}} \mathfrak{S}_r)(d\mathfrak{M}' \cdot \mathfrak{M})\} = \{(\mathfrak{S}_r \widehat{\mathfrak{P}} \mathfrak{S}_r) d(\mathfrak{M}' \mathfrak{M})\} = 0,$$

so daß wir wegen (4.4) erhalten:

$$(6.4) \quad \{\widehat{\mathfrak{P}} d\widehat{\mathfrak{T}}\} = du.$$

Dabei ist nach (6.3) u eine Funktion der γ_{ik} , also auch als Funktion der sechs Größen $\widehat{t}_{ik}$ mit $i \leq k$ schreibbar. Damit folgt aus (6.4)

$$(6.5) \quad \widehat{\mathfrak{P}} = \left(\frac{\partial u}{\partial \widehat{t}_{ik}} \right),$$

wobei vor der Differentiation die $\widehat{t}_{ik}$ durch $\frac{1}{2}(\widehat{t}_{ik} + \widehat{t}_{ki})$ zu ersetzen sind. $\mathfrak{P}$ selbst ergibt sich dann mit Hilfe von (4.7).

Die Formeln (6.1) und (6.5) gelten dann allgemein für anisotropes Material. Man kann durch Umformung von (5.7) weitere derartige Formeln erhalten, von denen wir nur diejenige erwähnen, die der bei Einnahme des Eulerschen Standpunktes sich anbietenden Verwendung von $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}^{-1}$ an Stelle von $\mathfrak{M}$ entspricht. Wegen

$$0 = d(\mathfrak{M} \mathfrak{M}^{-1}) = d\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{M}^{-1} + \mathfrak{B}^{-1} d\mathfrak{B}$$

wird zunächst aus (5.7)

$$\{\mathfrak{P} \mathfrak{B}^{-1} d\mathfrak{B}\} = -du \cdot |\mathfrak{B}|$$

und daher

$$(6.1^*) \quad \mathfrak{P} = -|\mathfrak{B}| \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial b_{ik}} \right) \mathfrak{B}.$$

Die Symmetrieforderung $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$ führt wieder auf (6.3) zurück: u darf nämlich nur von $\mathfrak{B} \mathfrak{B}' = (\mathfrak{M}' \mathfrak{M})^{-1}$ abhängen.

Im Spezialfall des isotropen Materials werden die angeführten Beziehungen besonders einfach. Hier wird $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{S}_l$ und $\mathfrak{P}_2 = \widehat{\mathfrak{P}}$ wegen (4.3) mit $\mathfrak{S}_r$ koaxial:

$\mathfrak{P} \mathfrak{E}_l = \mathfrak{E}_l \mathfrak{P}$, $\widehat{\mathfrak{P}} \mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_r \widehat{\mathfrak{P}}$. u hängt nur noch von den Invarianten von $\mathfrak{E}_l$ oder $\mathfrak{E}_r$ resp. eines beliebigen anderen Verzerrungstensors ab. Benutzen wir als Invarianten die $\widehat{J}_r = \{\widehat{\mathfrak{T}}^r\}$ für $r = 1, 2, 3$ und setzen auf Grund der Koaxialität $\widehat{\mathfrak{P}} = \sum_{r=0}^2 \lambda_r \widehat{\mathfrak{T}}^r$ an, so folgt aus (6.4) sofort durch Koeffizientenvergleich

$$(6.6) \quad \widehat{\mathfrak{P}} = \frac{\partial u}{\partial \widehat{J}_1} \mathfrak{E} + 2 \frac{\partial u}{\partial \widehat{J}_2} \widehat{\mathfrak{T}} + 3 \frac{\partial u}{\partial \widehat{J}_3} \widehat{\mathfrak{T}}^2 \quad \text{mit} \quad \widehat{J}_r = \{\widehat{\mathfrak{T}}^r\}.$$

Setzen wir in (5.7) $\mathfrak{A} = \mathfrak{E}_l \mathfrak{R}$ ein, so werden wir auf

$$|\mathfrak{A}|^{-1} du = \{(\mathfrak{E}_l^{-1} \mathfrak{P} \mathfrak{E}_l) (d\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R}')\} + \{\mathfrak{E}_l^{-1} \mathfrak{P} d\mathfrak{E}_l\}$$

geführt. Der (zu dem bei der Ableitung von (6.4) durchgeführten analoge) Schluß auf das Verschwinden des ersten Summanden ist nur möglich, wenn $\mathfrak{E}_l^{-1} \mathfrak{P} \mathfrak{E}_l$ symmetrisch ist, was $\mathfrak{P} \mathfrak{E}_l = \mathfrak{E}_l \mathfrak{P}$ und die Isotropie fordert; dies entspricht der Tatsache, daß nur bei Isotropie $\mathfrak{P}$ einen Verzerrungstensor besitzt. Wir haben dann

$$|\mathfrak{A}|^{-1} du = \{\mathfrak{P} \mathfrak{E}_l^{-1} d\mathfrak{E}_l\},$$

was wir mit (4.4) schreiben können als

$$(6.7) \quad |\mathfrak{A}|^{-1} du = \{\mathfrak{P} d\mathfrak{Q}\} \quad \text{oder} \quad |\mathfrak{E}_l|^{-1} du = \{\mathfrak{P} \mathfrak{E}_l^2 d\mathfrak{T}\}.$$

Analog zu (6.6) folgt hieraus mit Hilfe von (4.4) und (4.5)

$$(6.8) \quad \mathfrak{P} \cdot e^h = \frac{\partial u}{\partial j_1} \mathfrak{E} + 2 \frac{\partial u}{\partial j_2} \mathfrak{Q} + 3 \frac{\partial u}{\partial j_3} \mathfrak{Q}^2 \quad \text{mit} \quad j_r = \{\mathfrak{Q}^r\}$$

und

$$(6.9) \quad \mathfrak{P} = |\mathfrak{E} - 2\mathfrak{T}|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial J_1} \mathfrak{E} + 2 \frac{\partial u}{\partial J_2} \mathfrak{T} + 3 \frac{\partial u}{\partial J_3} \mathfrak{T}^2 \right) (\mathfrak{E} - 2\mathfrak{T}) \quad \text{mit} \quad J_r = \{\mathfrak{T}^r\},$$

was sich mit Hilfe des Cayley-Hamiltonschen Theorems leicht in ein Polynom 2. Grades in $\mathfrak{T}$ verwandeln läßt. Weitere Umformungen des Elastizitätsgesetzes sind leicht durchführbar, doch kann es keine Formel geben, die bei anisotropem Material $\mathfrak{P}$ analog zu (6.1) und (6.5) durch einen Verzerrungstensor ausdrückt. Ebenso unmöglich ist selbst bei isotropem Material die Darstellung von $\mathfrak{P}$ durch $\widehat{\mathfrak{T}}$ oder die von $\widehat{\mathfrak{P}}$ durch $\widehat{\mathfrak{T}}$.

§ 7. Lagrangescher und Eulerscher Standpunkt.

Die obigen Ausführungen und angegebenen Formeln sind völlig unabhängig davon, ob man beim Aufbau der Elastizitätstheorie endlicher Verformungen den Eulerschen oder Lagrangeschen Standpunkt einnehmen will, da ja nur die Matrizen und die thermodynamischen Invarianten als Funktionen der Matrixkomponenten eingehen. Daraus folgt aber, daß nicht — wie oft behauptet — der Lagrangesche Standpunkt zwangsläufig auf $\widehat{\mathfrak{P}}$ und $\widehat{\mathfrak{T}}$, der Eulersche dagegen auf $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{T}$ führen muß; ein solcher Eindruck ist meist die Folge eines von vornherein zu speziellen Aufbaues, insbesondere einer komponentenmäßigen Darstellung. Allerdings ist die Funktionalmatrix $\mathfrak{F}$ beim Lagrangeschen Standpunkt das $\mathfrak{A}$ und beim Eulerschen Standpunkt das $\mathfrak{A}^{-1}$ (diese Tatsache führt übrigens in Verbindung mit (5.6) unmittelbar zu den Jaumannschen Übergangsgleichungen), so daß im ersteren Falle $\widehat{\mathfrak{T}} = \frac{1}{2} (\mathfrak{F}' \mathfrak{F} - \mathfrak{E})$ und im letzteren

$\mathfrak{Z} = \frac{1}{2} (\mathfrak{E} - \mathfrak{F}' \mathfrak{F})$ besonders einfach zu bilden ist. Dies ist aber eine Angelegenheit der rechnerischen Ökonomie und nicht der Logik. Vom allein wesentlichen physikalischen Standpunkte aus sind nur die aufgezeigten grundsätzlichen Unterschiede wichtig:

Im anisotropen Falle hat $\mathfrak{P}$ keinen Verzerrungstensor. Man hat also $\widehat{\mathfrak{P}}$ und damit zwangsläufig $\widehat{\mathfrak{Z}}$ (oder eine andere Funktion von $\mathfrak{S}_r$) als zugehörigen Verzerrungstensor zu betrachten, von dem allein die thermodynamischen Potentiale abhängen. Jedoch ist zu beachten, daß $\widehat{\mathfrak{P}}$ nicht die Spannungen im Raume liefert ohne Kenntnis des ganzen $\mathfrak{A}$.

Im isotropen Falle dagegen hat $\mathfrak{P}$ den Verzerrungstensor $\mathfrak{Z}$ (oder eine andere eindeutige Funktion von $\mathfrak{S}_I$), der sowohl die thermodynamischen Potentiale als auch $\mathfrak{P}$ festlegt. Die Verwendung von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Z}$ ist also erstrebenswert.

Wichtig, jedoch leider oft nicht beachtet, ist vor allem, daß man völlige Klarheit über die anschauliche und physikalische Bedeutung der benutzten Tensoren gewinnt, wozu diese Ausführungen einen Beitrag darstellen möchten.
