Das isotrope Elastizitätsgesetz.

Von *H. Richter* in Haltingen (Kreis Lörrach).

Aus der Forderung der Isotropie und der Existenz der thermodynamischen Potentiale wird für das räumliche Elastizitätsgesetz eine allgemeine Form angegeben, wobei die logarithmische Dehnungsmatrix verwendet wird, bei der die Trennung in Volum- und Gestaltänderung durch gewöhnliche Deviatorbildung möglich ist. Die elastische Energie ist genau dann die Summe aus Volum- und Gestaltänderungsenergie, wenn die mittlere Spannung nur von der Volumänderung abhängt. Das Hookesche Gesetz ist für endliche Verzerrungen nur bei $m = 3$ zulässig.

From the demand of the isotropy and of the existence of the thermodynamic potentials a general form of the three-dimensional law of elasticity is stated. In doing so, the logarithmic matrix of relative elongations is used, which permits the separation of the variation of the volume and that of the shape by simply forming the deviator. The resilience energy is exactly the sum of the energy of the variation of the volume and that of the shape, if the average tension depends only on the variation of the volume. For finite deformations, the law of Hooke is permissible only in the case $m = 3$.

En supposant l'isotropie et l'existence des potentiels thermodynamiques, on donne une forme générale de la loi de l'élasticité en se servant d'une matrix logarithmique d'allongement. Ce procédé permet une séparation des changements de volume et de forme par une simple formation de déviateur. Si la tension moyenne ne dépend que du changement de volume, l'énergie d'élasticité est la somme des énergies de changement du volume et de la forme. La loi de Hooke n'est admissible que pour $m = 3$.

Из требования изотропии и из существования термодинамического потенциала выводится общая форма для трехмерного закона упругости. При этом используется логарифмическая матрица деформаций, позволяющая при помощи образования девиатора разложение на объемную деформацию и на деформацию сдвига. Потенциальная энергия деформации является суммой из энергии объемной деформации и из энергии деформации сдвига только тогда, когда среднее напряжение зависит только от объемной деформации. В случае деформаций конечной величины закон Гука допустим только при $m = 3$.

1. Definitionen.

In Verallgemeinerung des Hookeschen Gesetzes nennt man ein Material rein elastisch, wenn die Spannungen in umkehrbar eindeutiger Weise von den Dehnungen abhängen. Streng genommen muß jedoch noch eine Aussage über die Wärmezufuhr gemacht werden, die bei dem Dehnungsversuch stattfindet; insbesondere ist zu unterscheiden zwischen einem adiabatischen und einem isothermen Elastizitätsgesetz. Wenn man sich in dieser Hinsicht festlegt, ist auch klar, was unter den Dehnungen zu verstehen ist, da dieselben auf der Adiabate resp. Isotherme dann z. B. auf den Ausgangszustand bezogen werden können, bei dem die Spannungen alle verschwinden. Statt dessen kann man die Dehnungen aber auch auf einen spannungsfreien Ausgangszustand zu einer willkürlich gewählten Grundtemperatur Θ_0 beziehen. Der spannungsfreie Zustand bei einer anderen Temperatur Θ entspricht dann für isotropes Material bereits einer allseitig gleichmäßigen Dehnung, der Wärmedehnung. Auf diese Weise ist dann das Wärmedehnungsgesetz im elastischen Gesetz inbegriffen. Von dem betreffenden Material muß natürlich vorausgesetzt werden, daß es im betrachteten Temperaturbereich durch Temperaturänderungen keine bleibenden Veränderungen erleidet.

Wir gehen demgemäß von einem spannungsfreien Zustand zu einer Temperatur Θ_0 aus. Die hierauf bezügliche Deformation in einen anderen Zustand werde durch die Matrix $\mathfrak{A}$ und die zugehörigen Spannungen durch den Spannungstensor $\mathfrak{P}$ charakterisiert[1]). Wir nennen das Material rein elastisch, wenn $\mathfrak{P}$ eindeutig von $\mathfrak{A}$ und Θ abhängt. Das Material heißt isotrop, wenn diese Abhängigkeit invariant gegen euklidische Drehungen ist.

Bei der Lösung der Aufgabe, die allgemeinste Form dieser Abhängigkeit aufzustellen, rechnet man zweckmäßigerweise mit Matrizen, wobei die folgenden Abkürzungen Verwendung finden:

$\overline{\mathfrak{A}}$ entsteht aus $\mathfrak{A}$ durch Spiegelung an der Hauptdiagonale. $(\mathfrak{A})_{ik}$ ist das Element von $\mathfrak{A}$ in der i-ten Zeile und k-ten Spalte. $|\mathfrak{A}|$ ist die Determinante von $\mathfrak{A}$. $\{\mathfrak{A}\}$ ist die Summe der Elemente der Hauptdiagonale von $\mathfrak{A}$: sogenannte Spur von $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{E}$ ist die Einheitsmatrix. Ist $f(x) = \sum a_n \cdot x^n$, so ist unter Voraussetzung der Konvergenz $f(\mathfrak{A}) = \Sigma a_n \mathfrak{A}^n$.

Erinnert werde an die folgenden einfachen Sätze:

$$\{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}\} = \{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}\} \quad (1.1).$$

$$\{\mathfrak{A} \cdot d \ln \mathfrak{B}\} = \{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}^{-1} \cdot d\mathfrak{B}\} \quad (1.2),$$

wenn $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$, jedoch nicht notwendig auch mit $d\mathfrak{B}$ vertauschbar ist.

$$\ln |\mathfrak{A}| = \{\ln \mathfrak{A}\} \quad (1.3),$$

wenn $\ln \mathfrak{A}$ definiert ist.

Für eine reine Drehung $\mathfrak{R}$ ist: $\mathfrak{R}\,\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{E}$ (1.4).

Für eine reine Streckung $\mathfrak{S}$ ist: $\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{S}}$.

[1]) $\mathfrak{A}$ ist die Funktionalmatrix: $d\mathfrak{x}' = \mathfrak{A}\, d\mathfrak{x}$. $\mathfrak{P}$ ist der physikalische Spannungstensor im Punkte $\mathfrak{x}'$.

Jedes $\mathfrak{A}$ ist darstellbar in der Form:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{R} \quad \text{(1.5)},$$

wobei die Multiplikation in funktioneller Schreibweise von rechts nach links zu lesen ist.

2. Folgerung aus der Isotropie.

Gemäß (1.5) kann $\mathfrak{A}$ als eine Drehung $\mathfrak{R}$ mit nachfolgender Streckung $\mathfrak{S}$ aufgefaßt werden, wobei die Hauptstreckrichtungen der letzteren gegen die Koordinatenrichtungen gedreht sind. Bei isotropem Material darf die Anwendung von $\mathfrak{R}$ keinen Einfluß auf $\mathfrak{P}$ haben. Es ist also $\mathfrak{P}$ eine Funktion von $\mathfrak{S}$ und Θ. Bei gegebenem $\mathfrak{A}$ findet man nach (1.4) und (1.5) $\mathfrak{S}$ aus

$$\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{S}\mathfrak{R}\overline{\mathfrak{R}}\,\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}^2 \quad \text{(2.1)}.$$

Die allgemeinste gegen Drehungen invariante koaxiale Beziehung zwischen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{S}$ ist nun offenbar:

$$\mathfrak{P} = f(\mathfrak{S};\, I_1, I_2, I_3, \Theta) \quad \text{(2.2)},$$

wo die I_ν die Invarianten von $\mathfrak{S}$ sind [2]).

An Stelle von $\mathfrak{S}$ kann man auch eine umkehrbar eindeutige Funktion von $\mathfrak{S}$ benutzen. Es zeigt sich später, daß es zweckmäßig ist, die „logarithmische Streckung"

$$\mathfrak{L} = \ln \mathfrak{S} \quad \text{(2.3)}$$

zu verwenden, die wegen der positiven Eigenwerte von $\mathfrak{S}$ stets definiert ist. Die Invarianten von $\mathfrak{L}$ seien:

$$j = \{\mathfrak{L}\}, \quad k = \{\mathfrak{L}^2\} \quad \text{und} \quad l = \{\mathfrak{L}^3\} \quad \text{(2.4)}.$$

Übrigens folgt aus (1.3) und (2.1): $j = \frac{1}{2}\{\ln \mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}}\} = \frac{1}{2}\ln|\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}}| = \ln|\mathfrak{A}|$.

Wir schreiben dann an Stelle von (2.2):

$$\mathfrak{P} = f(\mathfrak{L};\, j, k, l, \Theta) \quad \text{(2.5)}.$$

$\{\mathfrak{P}\}$, $\{\mathfrak{P}\mathfrak{L}\}$ und $\{\mathfrak{P}\mathfrak{L}^2\}$ sind gemäß (2.5) Funktionen von j, k, l und Θ. Definieren wir nun die Invarianten f_1, f_2 und f_3 aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{P}\} &= f_1\{\mathfrak{E}\} + f_2\{\mathfrak{L}\} + f_3\{\mathfrak{L}^2\} \\ \{\mathfrak{P}\mathfrak{L}\} &= f_1\{\mathfrak{L}\} + f_2\{\mathfrak{L}^2\} + f_3\{\mathfrak{L}^3\} \\ \{\mathfrak{P}\mathfrak{L}^2\} &= f_1\{\mathfrak{L}^2\} + f_2\{\mathfrak{L}^3\} + f_3\{\mathfrak{L}^4\} \end{aligned}$$

mit im allgemeinen nicht verschwindender Determinante, so ist für

$$\mathfrak{X} = f_1 \cdot \mathfrak{E} + f_2 \cdot \mathfrak{L} + f_3 \cdot \mathfrak{L}^2 : \{\mathfrak{P}\mathfrak{L}^\nu\} = \{\mathfrak{X}\mathfrak{L}^\nu\} \quad \text{bei} \quad \nu = 0, 1, 2.$$

Da wir nun von $\mathfrak{P}$ wissen, daß es mit $\mathfrak{L}$ koaxial ist, ist es vollkommen durch $\{\mathfrak{P}\}$, $\{\mathfrak{P}\mathfrak{L}\}$ und $\{\mathfrak{P}\mathfrak{L}^2\}$ festgelegt. Also gilt $\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{X}$; d. h.

$$\mathfrak{P} = f_1(j, k, l, \Theta) \cdot \mathfrak{E} + f_2(j, k, l, \Theta) \cdot \mathfrak{L} + f_3 \cdot (j, k, l, \Theta) \cdot \mathfrak{L}^2 \quad \text{(2.6)}.$$

Damit haben wir die allgemeinste isotrope Beziehung gefunden. Bei Verwendung von $\mathfrak{S}$ an Stelle von $\mathfrak{L}$ hätten wir entsprechend erhalten:

$$\mathfrak{P} = g_1(I_\nu, \Theta) \cdot \mathfrak{E} + g_2(I_\nu, \Theta) \cdot \mathfrak{S} + g_3(I_\nu, \Theta) \cdot \mathfrak{S}^2 \quad \text{(2.7)}.$$

3. Folgerung aus dem Potential.

Die auf die Volumeinheit im Ausgangszustand bezogene innere Energie des Materials sei

$$u = u(j, k, l, \Theta) \quad \text{(3.1)};$$

die Entropie sei

$$s = s(j, k, l, \Theta) \quad \text{(3.2)}.$$

Hieraus ergibt sich die freie Energie f zu:

$$f = u - \Theta \cdot s = f(j, k, l, \Theta) \quad \text{(3.3)}.$$

Ist nun dA das Differential der von dem Volumelement geleisteten Arbeit, so ist

$$dA = -du + \Theta \cdot ds = -df - s \cdot d\Theta \quad \text{(3.4)}.$$

Für isotherme elastische Änderungen ist also

$$dA = -(df)_{\Theta = \text{const}} \quad \text{(3.5)};$$

[2]) Wie man sich leicht überlegt, kann hierbei noch eine der Invarianten I_ν eingespart werden im Gegensatz zu der späteren Formel (2. 7).

für adiabatische Änderungen dagegen

$$dA = -(du)_{s = \text{const}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3.6),$$

wobei aus (3,1) und (3.2) Θ zu eliminieren ist, so daß u als Funktion von j, k, l und s erscheint.

Um nun dA zu berechnen, gehen wir von einer Deformation $\mathfrak{A}$ zur benachbarten Deformation $\mathfrak{A} + d\mathfrak{A}$ über. Da eine reine Drehung dA nicht beeinflußt, können wir annehmen, daß $\mathfrak{A}$ eine reine Streckung $\mathfrak{S}$ ist. Die Einheitsvektoren in den Hauptstreckrichtungen von $\mathfrak{S}$ seien $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_3$, die als Koordinatenvektoren gedacht werden können. Die Komponenten von $\mathfrak{P}$ in diesen Richtungen seien σ_1, σ_2 und σ_3. Als Volumelement können wir das von $\mathfrak{S}\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{S}\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{e}_3$ aufgespannte rechtwinklige Parallelepiped benutzen, das ja vermöge $\mathfrak{S}$ aus einem Einheitswürfel hervorgeht. Die an $\mathfrak{S}\mathfrak{e}_1$ ansetzende und durch $\mathfrak{S}\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{e}_3$ aufgespannte Seite erleidet nun außer einer infinetesimalen Verkippung und Flächenänderung beim Übergang von $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{S} + d\mathfrak{A}$ eine Verschiebung in der $\mathfrak{e}_1$-Richtung um den Betrag $\mathfrak{e}_1 \cdot ((\mathfrak{S} + d\mathfrak{A})\,\mathfrak{e}_1 - \mathfrak{S}\mathfrak{e}_1) = \mathfrak{e}_1\, d\mathfrak{A}\, \mathfrak{e}_1 = (d\mathfrak{A})_{11}$. Die an dieser Seite geleistete Arbeit ist also

$$-\sigma_1 \cdot (d\,\mathfrak{A})_{11} \cdot (\mathfrak{S})_{22} \cdot (\mathfrak{S})_{33} = -|\mathfrak{S}| \cdot \frac{(d\,\mathfrak{A})_{11} \cdot \sigma_1}{(\mathfrak{S})_{11}}.$$

Die gesamte von dem Volumelement geleistete Arbeit ist somit

$$dA = -|\mathfrak{S}| \cdot \sum_{\nu=1}^{3} \frac{(d\,\mathfrak{A})_{\nu\nu} \cdot \sigma_\nu}{(\mathfrak{S})_{\nu\nu}} = -|\mathfrak{S}| \cdot \{\mathfrak{P}\,\mathfrak{S}^{-1}\, d\,\mathfrak{A}\} \quad \ldots \ldots \quad (3.7).$$

Der Deformation $\mathfrak{S} + d\mathfrak{A}$ entspricht nun eine Streckung $\mathfrak{S} + d\,\mathfrak{S}$, wobei nach (2.1) ist

$$(\mathfrak{S} + d\,\mathfrak{S})^2 = (\mathfrak{S} + d\,\mathfrak{A})\,(\mathfrak{S} + d\bar{\mathfrak{A}}),$$

oder

$$\mathfrak{S} \cdot d\,\mathfrak{S} + d\,\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{S} \cdot d\bar{\mathfrak{A}} + d\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{S}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung von links mit $\mathfrak{P}\mathfrak{S}^{-2}$ und bilden die Spur, so folgt wegen (1.1):

$$2\{\mathfrak{P}\,\mathfrak{S}^{-1}\, d\,\mathfrak{S}\} = \{\mathfrak{P}\,\mathfrak{S}^{-1}\, d\bar{\mathfrak{A}}\} + \{\mathfrak{P}\,\mathfrak{S}^{-1}\, d\,\mathfrak{A}\} = 2\{\mathfrak{P}\,\mathfrak{S}^{-1}\, d\,\mathfrak{A}\},$$

weil $\mathfrak{P}$ symmetrisch und mit $\mathfrak{S}$ koaxial ist. Aus (3.7) erhalten wir daher

$$dA = -|\mathfrak{S}| \cdot \{\mathfrak{P}\,\mathfrak{S}^{-1}\, d\,\mathfrak{S}\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3.8)$$

und hieraus schließlich wegen (1.2), (1.3) und (2.4):

$$dA = -e^j \cdot \{\mathfrak{P}\, d\,\mathfrak{L}\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3.8^*)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die isotherme Beziehung (3.5) ein und benutzen (2.6), so folgt:

$$e^j \cdot [f_1\{d\,\mathfrak{L}\} + f_2\{\mathfrak{L}\, d\,\mathfrak{L}\} + f_3\{\mathfrak{L}^2\, d\,\mathfrak{L}\}] = \frac{\partial f}{\partial j}\, dj + \frac{\partial f}{\partial k}\, dk + \frac{\partial f}{\partial l}\, dl.$$

Da nun nach (2.4)

$$dj = \{d\,\mathfrak{L}\}, \quad dk = 2\,\{\mathfrak{L}\, d\,\mathfrak{L}\} \quad \text{und} \quad dl = 3\{\mathfrak{L}^2\, d\,\mathfrak{L}\}$$

ist, ergibt sich schließlich:

$$e^j f_1 = \frac{\partial f}{\partial j}, \quad e^j f_2 = 2\,\frac{\partial f}{\partial k}, \quad e^j f_3 = 3\,\frac{\partial f}{\partial l}$$

und damit nach (2.6):

$$\mathfrak{P}\, e^j = \frac{\partial f}{\partial j} \cdot \mathfrak{E} + 2\,\frac{\partial f}{\partial k} \cdot \mathfrak{L} + 3\,\frac{\partial f}{\partial l} \cdot \mathfrak{L}^2, \quad f = f(j, k, l, \Theta) \quad \ldots \ldots \quad (3.9).$$

Entsprechend ergibt sich aus (3.6) für das adiabatische Gesetz:

$$\mathfrak{P}\, e^j = \frac{\partial u}{\partial j} \cdot \mathfrak{E} + 2\,\frac{\partial u}{\partial k} \cdot \mathfrak{L} + 3\,\frac{\partial u}{\partial l} \cdot \mathfrak{L}^2, \quad u = u(j, k, l, s) \quad \ldots \ldots \quad (3.10).$$

Wollen wir bei der Formulierung des Elastizitätsgesetzes auf die Einführung von $\mathfrak{L}$ verzichten und direkt $\mathfrak{S}$ verwenden, so benutzen wir zweckmäßigerweise als Invarianten von $\mathfrak{S}$:

$$I_1 = \{\mathfrak{S}\}, \quad I_2 = \frac{1}{2}\,\{\mathfrak{S}^2\}, \quad I_3 = |\mathfrak{S}|.$$

Aus (2.7), (3.5) und (3.8) ergibt sich dann durch analoge Rechnung das Elastizitätsgesetz in der Form:

$$\mathfrak{P} = \frac{\partial f}{\partial I_3} \cdot \mathfrak{E} + \frac{1}{I_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial I_1} \cdot \mathfrak{S} + \frac{1}{I_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial I_2}\, \mathfrak{S}^2, \quad f = f(I_\nu, \Theta) \quad \ldots \ldots \quad (3.11)$$

und eine entsprechende Formulierung mit $u\,(I_1, I_2, I_3, s)$ an Stelle von f.

4. Übergang zu den Deviatoren.

Die Einführung der logarithmischen Streckung $\mathfrak{L}$ erweist sich nun nicht nur als zweckmäßig für eine möglichst einfache Formulierung des Elastizitätsgesetzes, sondern bei ihrer Benutzung läßt sich vor allem auch die Trennung einer Deformation in Gestalt- und Volumänderung durch gewöhnliche Deviatorenbildung genau so wie bei infinitesimalen Verzerrungen durchführen, während ein entsprechendes Vorgehen bei Verwendung von $\mathfrak{S}$ sehr umständlich ist. Um dies einzusehen, zerlegen wir die allgemeine Streckung $\mathfrak{S}$ in eine Gestaltänderungsstreckung $\mathfrak{S}_g$ und eine Volumänderungsstreckung $\mathfrak{S}_v$. Wir fordern also:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_g \cdot \mathfrak{S}_v = \mathfrak{S}_v \cdot \mathfrak{S}_g \quad \text{mit} \quad \mathfrak{S}_g = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_v = \beta \cdot \mathfrak{E} \quad \text{bei} \quad \beta > 0 \quad . \; . \; . \quad (4.1).$$

Offenbar ist durch (4.1) für jedes $\mathfrak{S}$ mit $|\mathfrak{S}| > 0$ eine solche Zerlegung eindeutig festgelegt; es ist nämlich bei gegebenem $\mathfrak{S}$:

$$\beta = \sqrt[3]{|\mathfrak{S}|} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_g = \beta^{-1} \cdot \mathfrak{S}.$$

Wegen der Kommutativität von $\mathfrak{S}_g$ und $\mathfrak{S}_v$ können wir (4.1) logarithmieren:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_g + \mathfrak{L}_v \quad \text{mit} \quad \mathfrak{L}_g = \ln \mathfrak{S}_g \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}_v = \ln \mathfrak{S}_v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.2).$$

Es ist dann nach (1.3):

$$\{\mathfrak{L}_g\} = \ln |\mathfrak{S}_g| = 0 \quad \text{u} \quad \mathfrak{L}_v = \ln \beta \cdot \mathfrak{E}, \quad \{\mathfrak{L}_v\} = 3 \ln \beta .$$

Bezeichnen wir allgemein mit $\tilde{\mathfrak{Q}}$ den Deviator zu der symmetrischen Matrix $\mathfrak{Q}$, also

$$\tilde{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{Q} - \frac{1}{3}\{\mathfrak{Q}\} \cdot \mathfrak{E} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.3),$$

so können wir schließlich schreiben:

$$\mathfrak{L}_g = \tilde{\mathfrak{L}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}_v = \frac{1}{3} j \cdot \mathfrak{E} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.4).$$

In der Tat wird also die Gestaltänderung durch den gewöhnlichen Deviator von $\mathfrak{L}$ charakterisiert. Für infinitesimale Dehnungen wird $\mathfrak{L} \approx \mathfrak{S} - \mathfrak{E}$, so daß $\tilde{\mathfrak{L}}$ in den üblichen Deformationsdeviator übergeht.

Führen wir nun die Invarianten von $\tilde{\mathfrak{L}}$ ein:

$$y = \{\tilde{\mathfrak{L}}^2\} \quad \text{und} \quad z = \{\tilde{\mathfrak{L}}^3\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.5),$$

so ist

$$y = k - \frac{1}{3} j^2 \quad \text{und} \quad z = l - jk + \frac{2}{9} j^3 .$$

Wir können dann j, y und z an Stelle von j, k und l als Variable verwenden. j charakterisiert dann die Volumänderung, während y und z die Gestaltänderung charakterisieren. Wie man leicht nachrechnet, ergibt sich dann aus (3.9) die Formel:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{3} e^j \{\mathfrak{P}\} &= \frac{\partial f}{\partial j} \\ e^j \cdot \tilde{\mathfrak{P}} &= - y \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \mathfrak{E} + 2 \frac{d f}{\partial y} \cdot \tilde{\mathfrak{L}} + 3 \frac{\partial f}{\partial z} \tilde{\mathfrak{L}}^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.6),$$

wo in Gegensatz zu (3.9) jetzt $\quad f = f(j, y, z, \Theta)$ ist.

Eine entsprechende Formel ergibt sich aus (3.10).

Ohne Beweis sei noch bemerkt, daß y und z nicht unabhängig voneinander alle möglichen Werte annehmen dürfen, sondern der Bedingung

$$0 \leqq \frac{z^2}{y^3} \leqq \frac{1}{6}$$

unterliegen.

5. Aufspaltbare Elastizitätsgesetze.

In der Elastizitätstheorie infinitesimaler Verzerrungen kann die elastische Energie als Summe von Volum- und Gestaltänderungsenergie aufgefaßt werden. Da nun die Volumänderung durch j und die Gestaltänderung durch y und z angegeben werden, ist diese Aufspaltung bei endlichen Verzerrungen genau dann möglich, wenn

$$\left.\begin{aligned} f &= F(j, \Theta) + G(y, z, \Theta), \\ \text{resp.} \quad u &= U(j, s) + V(y, z, s) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.1)$$

ist. Gemäß (4.6) ist dann:

$$\frac{1}{3}e^{j}\cdot\{\mathfrak{P}\}=\frac{\partial F}{\partial j}(j,\Theta).$$

Die mittlere Spannung hängt also nur von j allein, d.h. von der Volumvergrößerung, ab. Ist umgekehrt $\{\mathfrak{P}\}$ nur von j abhängig, so folgt aus (4.6)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial j\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial j\,\partial z}=0,$$

also wieder für f die Gestalt (5.1). Wir können somit sagen: Die elastische Energie ist genau dann in Volum- und Gestaltänderungsenergie aufspaltbar, wenn die mittlere Spannung nur von der Volumvergrößerung abhängt.

6. Übergang zu einer neuen Grundtemperatur.

Wir hatten die Deformationen auf den spannungsfreien Zustand bei einer bestimmten Temperatur Θ_0 bezogen. Nehmen wir jetzt an, daß an Stelle von Θ_0 eine andere Temperatur Θ_1 als Ausgangstemperatur benutzt werden soll. Die Temperatur Θ_1 entspricht bei $\mathfrak{P}=0$ einer bestimmten Deformation $\mathfrak{S}_1$ mit $\ln\mathfrak{S}_1=\mathfrak{L}_1$. $\mathfrak{S}_1$ ist ein Vielfaches der Einheitsmatrix; also ist $\tilde{\mathfrak{L}}_1=0$, $y_1=z_1=0$. Es ist dann nach (4.6):

$$\frac{\partial f}{\partial j}(j_1,\,0,\,0,\,\Theta_1)=0,$$

was das Wärmeausdehnungsgesetz liefert:

$$j_1=\varphi(\Theta_1). \qquad (6.1)$$

Der Deformation $\mathfrak{A}$ entspricht in bezug auf den neuen Ausgangszustand die Matrix $\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}\,\mathfrak{S}_1^{-1}$. Also ist $\mathfrak{S}'=\mathfrak{S}\,\mathfrak{S}_1^{-1}$, $\mathfrak{L}'=\mathfrak{L}-\mathfrak{L}_1$ und damit

$$j'=j-j_1,\quad y'=y,\quad z'=z \qquad (6.2).$$

In Formel (4.6) können wir nun j durch j' ersetzen, wenn wir gleichzeitig anstelle von f einsetzen:

$$f'(j',y,z,\Theta)=e^{-j_1}\cdot f(j'+j_1,y,z,\Theta)=e^{-\varphi(\Theta_1)}\cdot f(j'+\varphi(\Theta_1),y,z,\Theta) \qquad (6.3).$$

Hieraus folgt insbesondere, daß die in Abschnitt 5 besprochene Aufspaltbarkeit der elastischen Energie unabhängig von der Wahl der Grundtemperatur ist.

7. Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes.

Man kann auf Grund der gefundenen Formeln die mannigfaltigsten Forderungen an das Elastizitätsgesetz stellen, insbesondere bezüglich der Temperaturabhängigkeit, und nachprüfen, ob diese Forderungen realisiert werden können. Wir wollen hier nur die Frage untersuchen, ob das gewöhnliche Hookesche Gesetz für endliche Verzerrungen noch gültig sein kann.

Unter Verwendung der Laméschen Konstanten hat das Hookesche Gesetz die Gestalt:

$$\mathfrak{P}=\lambda\cdot\{\mathfrak{S}-\mathfrak{E}\}\cdot\mathfrak{E}+2\mu\cdot(\mathfrak{S}-\mathfrak{E}) \qquad (7.1)$$

oder

$$\mathfrak{P}=(\lambda\cdot I_1-3\lambda-2\mu)\cdot\mathfrak{E}+2\mu\cdot\mathfrak{S} \qquad (7.2).$$

Es ist zunächst klar, daß (7.1) tatsächlich aus der allgemeinen Formel (3.9) für kleine $\mathfrak{L}$ hervorgeht.

Damit nun (7.2) auch für endliche Verzerrungen ein zulässiges isothermes Elastizitätsgesetz darstellt, muß gemäß (3.11)

$$\lambda I_1-3\lambda-2\mu=\frac{\partial f}{\partial I_3},\quad 2\mu I_3=\frac{\partial f}{\partial I_1}\quad\text{und}\quad 0=\frac{\partial f}{\partial I_2}\quad\text{sein.}$$

Dies geht aber nur, wenn $\lambda=2\mu$ ist, was der Poissonschen Querkontraktionszahl $m=3$ entspricht. Für alle anderen Werte von m darf das Hookesche Gesetz nicht für endliche Verzerrungen benutzt werden. An seiner Stelle kann man dann das entsprechende logarithmische Gesetz

$$\mathfrak{P}\,e^{j}=\lambda j\cdot\mathfrak{E}+2\mu\,\mathfrak{L} \qquad (7.3)$$

verwenden, das im isothermen Fall zu der aufspaltbaren Energie

$$f=\frac{\lambda}{2}j^2+\mu k=\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\mu}{3}\right)\cdot j^2+\mu\cdot y$$

gehört.

Eingegangen 2. Februar 1948.