FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

8.5.2013

5. Übung zur Funktionalanalysis I im SS 2013

Hausübungen

Abgabe: 15.5.2013, 6 Uhr

Hausaufgabe 1:

Beweise das folgende Kriterium dafür, dass eine Teilmenge von $(L^p, \|\cdot\|_{L^p})$ relativ kompakt ist:
Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R})$ relativkompakt genau dann, wenn

i) $\mathcal{F}$ beschränkt ist,

ii) $\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}\setminus[-R,R]} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \to 0$ für $R \to \infty$,

iii) $\sup_{f\in\mathcal{F}} \int |f(x) - f(x+h)|^p \, \mathrm{d}x \to 0$ für $h \to 0$. ("gleichgradige Stetigkeit im p-ten Mittel")

a) Zeige zunächst die Eigenschaft ii) für einzelne Funktionen aus L^p (also ohne sup).

b) Zeige auch iii) für einzelne Funktionen. Beginne dabei mit dem Fall „charakteristische Funktion eines beschränkten Intervalls“ und approximiere allgemeine L^p-Funktionen durch einfache Funktionen (Treppenfunktionen).

c) Überdecke $\mathcal{F}$ mit endlich vielen Kugeln vom Radius ε. Warum ist das möglich?

d) Nutze die Mittelpunkte f_i der Kugeln und a) für jedes einzelne f_i, um ii) gleichmäßig für beliebiges $f \in \mathcal{F}$ zu zeigen.

e) Verfahre ebenso für iii).

· Zur Rückrichtung.
Definiere für $f \in L^p(\mathbb{R})$ die „Steklov-Mittelung“ durch $(S_r(f))(x) = \frac{1}{r}\int_0^r f(x+s)\,\mathrm{d}s$.

f) Zeige durch geschickte Anwendung der Hölderschen Ungleichung, dass $\|S_r(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq r^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$.

g) Zeige ebenso, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$|(S_r f)(x) - (S_r f)(x+h)| \leq r^{-\frac{1}{p}} \|f - f_h\|_p$$

gilt.

h) Zeige darüberhinaus, dass

$$\|f - S_r f\|_p \leq \sup_{0<h\leq r} \|f - f_h\|_p$$

. Schätze dazu den Betrag $|(f - S_r f)(x)|$ wieder mit der Hölderschen Ungleichung ab, integriere dann über $\mathbb{R}$ und nutze abschließend den Satz von Fubini.

i) Begründe die folgenden drei Aussagen:

- Es genügt, zu zeigen, dass eine Überdeckung von $\mathcal{F}$ mit 3ε-Kugeln existiert.
- Es gibt ein $\overline{R} > 0$, sodass $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}\setminus[-R,R])} < \varepsilon$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $R > \overline{R}$.
- Es gibt ein $r > 0$, sodass
$$\|f - S_r f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \sup_{0\leq h\leq r} \|f - f_h\| < \varepsilon$$
für alle $f \in \mathcal{F}, \forall |h| < r$.

j) Zeige: Die Menge $\mathcal{M} = \{S_r f|_{[-2R,2R]}\,; f \in \mathcal{F}\}$ ist eine relativkompakte Teilmenge von $C([-2R,2R])$.

k) $\mathcal{M}$ lässt sich von endlich vielen Kugeln mit Radius $\frac{\varepsilon}{4R^{\frac{1}{p}}}$ und Mittelpunkten g_i überdecken. (Warum?) Definiere $f_i \in L^p(\mathbb{R})$ so, dass f_i auf $[-2R,2R]$ mit g_i übereinstimmt. (Wähle für die letzten beiden Schritte nun R geeignet.)

l) Zeige abschließend, dass für jedes $f \in \mathcal{F}$ eines der f_i existiert mit $\|f - f_i\|_p \leq 3\varepsilon$ und vollende den Beweis des Satzes.

Hausaufgabe 2:

Überprüfe, ob die folgenden Abbildungen linear und stetig sind.

a) Auf dem letzten Blatt haben wir die Sobolevräume $W^{1,p}(\Omega)$ eingeführt. Betrachte den „schwachen Ableitungsoperator“, der jeder Funktion $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ihre „schwache Ableitung“ (die Funktion v aus Blatt 4, HA 5) zuordnet, als Operator von $W^{1,p}(\Omega)$ nach $L^p(\Omega)$.

b) $T : l^p \longrightarrow l^p,\ (x_0, x_1, x_2, \ldots) \longmapsto (0, x_0, x_1, x_2, \ldots)$.

c) $T : L^p([0,1]) \longrightarrow L^p([0,1]),\ f \longmapsto T_f$ mit

$$T_f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} x f(s)\, ds - \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 f(s)\, ds\,.$$

d) $T : l^p \longrightarrow l^p,\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (m_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $(m_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$ fest.

e) $T : L^1([0,1]) \longrightarrow c_0,\ f \longmapsto (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = \int_0^1 f(t) t^n\, dt\,.$$