Int. J. Engng Sci. Vol. 16, pp. 451–457

0020-7225/78/0701-0451/$02.00/0

LOIS DE COMPORTEMENT ELASTIQUE ISOTROPES EN GRANDES DEFORMATIONS

CLAUDE VALLEE
Laboratoire de Mécanique, 40 avenue du Recteur Pineau, 86022, Poitiers, France

(Communicated by B. NAYROLES)

Abstract—We give a characterization of isotropic hyperelastic materials: there exists a potential of the logarithm of the Almansi–Euler strain tensor, the derivative of which provides us with the Cauchy stress tensor.

1. INTRODUCTION

Nous nous proposons de caractériser les lois de comportement élastique satisfaisant aux deux hypothèses:

H_1: le tenseur des contraintes de Piola–Kirchoff dérive d'un potentiel par rapport au tenseur des déformations de Cauchy–Green.

H_2: le tenseur des contraintes de Cauchy s'exprime en fonction du tenseur des déformations d'Almansi–Euler.

L'hypothèse H_2 nous restreint aux lois de comportement isotropes mais nous parvenons alors à remplacer l'hypothèse H_1, formulée au niveau Lagrangien, par une hypothèse du même type formulée au niveau Eulérien.

2. POSITION DU PROBLEME MECANIQUE

Soit un milieu continu subissant une transformation

$$X \mapsto x$$

où la variable X (dite de Lagrange ou matérielle) et la variable x (dite d'Euler ou spatiale) décrivent chacune une partie de l'espace à trois dimensions $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire habituel.

Désignons par F l'application linéaire tangente en X à la transformation $X \mapsto x$, par F^{-1} l'inverse de F, par $\bar{F}$ l'adjointe de F et par I l'identité. La comparaison des éléments de longueur en X et x conduit à caractériser la déformation du milieu, soit au niveau Lagrangien par le tenseur des déformations de Cauchy–Green

$$G = \frac{1}{2}(\bar{F}F - I)$$

(ou plus simplement par $\bar{F}F$), soit au niveau Eulérien par le tenseur des déformations d'Almansi–Euler

$$A = \frac{1}{2}(I - \overline{F^{-1}}F^{-1})$$

(ou plus simplement par $F\bar{F}$).

A la suite de Green et Kelvin nous supposerons qu'il existe une function $\Phi(\bar{F}F)$ telle que le tenseur des contraintes de Piola–Kirchoff Σ en dérive, c'est-à-dire:

H_1: pour toute application linéaire S auto-adjointe ($\bar{S} = S$)

$$\mathrm{Tr}(\Sigma S) = D(\Phi)(\bar{F}F)(S)$$

(où Tr désigne l'opérateur trace et $D(\Phi)$ la dérivée de Φ).

Rappelons que le tenseur des contraintes de Piola–Kirchoff Σ est lié au tenseur des contraintes de Cauchy σ par la relation

$$F\Sigma\bar{F} = (\text{dét } F)\sigma$$

(où dét F désigne le déterminant de F).

Nous allons examiner la compatibilité de l'hypothèse H_1 avec la suivante:

H_2: le tenseur des contraintes de Cauchy s'ecprime en fonction du tenseur des déformations d'Almansi–Euler.

Exploitons H_2 en posant

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\text{dét }(F\bar{F})}}\cdot g(F\bar{F}) = \frac{1}{\text{dét } F} g(F\bar{F})$$

où nous avons utilisé le fait que le Jacobien dét F de la transformation $X \to x$ est nécessairement positif (conservation de l'orientation). L'hypothèse H_1 se formule alors

$$\bar{S} = S \Rightarrow \operatorname{Tr}[F^{-1}g(F\bar{F})\overline{F^{-1}}S] = D(\Phi)(\bar{F}F)(S).$$

3. AXIOMATISATION

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Notons

$\mathscr{L}(E)$, l'ensemble des applications linéaires de déterminant strictement positif.

$\mathscr{L}^+(E)$, l'ensemble des applications linéaires de déterminant strictement positif.

$\mathscr{L}_S(E)$, l'ensemble des applications linéaires auto-adjointes.

$\mathscr{H}(E)$, l'ensemble des applications linéaires auto-adjointes défini-positives.

$\mathcal{O}^+(E)$, l'ensemble des rotations ($\bar{R}R = I$ et dét $R = 1$).

Remarquons que

La partie $\mathscr{H}(E)$ est ouverte dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathscr{L}_S(E)$ (ce qui sera important pour dériver les applications de $\mathscr{H}(E)$ dans $\mathbf{R}$).

Si $F \in \mathscr{L}^+(E)$, alors $F^{-1} \in \mathscr{L}^+(E)$, $\bar{F}F \in \mathscr{H}(E)$ et $F\bar{F} \in \mathscr{H}(E)$.

Si $H \in \mathscr{H}(E)$, alors $H^{-1} \in \mathscr{H}(E)$.

Si $F \in \mathscr{L}^+(E)$ et $R \in \mathcal{O}^+(E)$, alors $RF \in \mathscr{L}^+(E)$.

Si $H \in \mathscr{H}(E)$ et $R \in \mathcal{O}^+(E)$, alors $RHR^{-1} \in \mathscr{H}(E)$.

La question posée est de caractériser, dans le cas $E = \mathbf{R}^3$, les applications

$$g\colon \mathscr{H}(E) \to \mathscr{L}_S(E)$$

soumises à l'hypothèse: il existe une application différentiable $\Phi\colon \mathscr{H}(E) \to \mathbf{R}$ telle que

$$\forall F \in \mathscr{L}^+(E),\ \forall S \in \mathscr{L}_S(E),\ \operatorname{Tr}[F^{-1}g(F\bar{F})\overline{F^{-1}}S] = D(\Phi)(\bar{F}F)(S).$$

La réponse à cette question est l'objet du paragraphe suivant.

4. THEOREME

Soit $g\colon \mathscr{H}(E) \to \mathscr{L}_S(E)$, alors les trois propositions suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe une application différentiable Φ de $\mathscr{H}(E)$ *dans* $\mathbf{R}$ telle que

$$\forall F \in \mathscr{L}^+(E),\ \forall S \in \mathscr{L}_S(E),\ \operatorname{Tr}[F^{-1}g(F\bar{F})\overline{F^{-1}}S] = D(\Phi)(\bar{F}F)(S)$$

(ii) g est isotrope

$$\forall R \in \mathcal{O}^+(E),\ \forall H \in (E),\ g(RHR^{-1}) = Rg(H)R^{-1}$$

et il existe une application différentiable Ψ de $\mathscr{L}_S(E)$ dans $\mathbf{R}$ telle que

$$\forall H \in \mathscr{H}(E), \forall S \in \mathscr{L}_S(E), \operatorname{Tr}[g(H)S] = D(\Psi)(\log H)(S)$$

(où $\log H$ désigne le logarithme de H)

(iii) Il existe une application différentiale Ψ de $\mathscr{L}_S(E)$ dans $\mathbf{R}$, isotrope

$$\forall R \in \mathcal{O}^+(E), \forall S \in \mathscr{L}_S(E), \Psi(RSR^{-1}) = \Psi(S)$$

telle que

$$\forall H \in \mathscr{H}(E), \forall S \in \mathscr{L}_S(E), \operatorname{Tr}[g(H)S] = D(\Psi)(\log H)(S)$$

4.1 *Démonstration de* [(i)⇒(ii)]

Soit $F \in \mathscr{L}^+(E)$, $R \in \mathcal{O}^+(E)$ et $S \in \mathscr{L}_S(E)$, alors $RF \in \mathscr{L}^+(E)$ et puisque $\overline{RF}RF = \bar{F}\bar{R}RF = \bar{F}F$ la proposition (i) entraîne

$$\operatorname{Tr}[F^{-1}g(F\bar{F})\overline{F^{-1}}S] = \operatorname{Tr}[(RF)^{-1}g(RF\overline{RF})(\overline{RF})^{-1}S]$$

$$\operatorname{Tr}[g(F\bar{F})\overline{F^{-1}}SF^{-1}] = \operatorname{Tr}[F^{-1}R^{-1}g(RF\bar{F}R)R^{-1}F^{-1}S]$$

$$= \operatorname{Tr}[R^{-1}g(RF\bar{F}R^{-1})R\overline{F^{-1}}SF^{-1}].$$

Lorsque S décrit $\mathscr{L}_S(E)$, $S' = \overline{F^{-1}}SF^{-1}$ décrit $\mathscr{L}_S(E)$

$$\operatorname{Tr}[g(F\bar{F})S'] = \operatorname{Tr}[R^{-1}g(RF\bar{F}R^{-1})RS'].$$

Cette égalité ayant lieu quelle que soit S', nécessairement

$$g(F\bar{F}) = R^{-1}g(RF\bar{F}R^{-1})R.$$

Lorsque F décrit $\mathscr{L}^+(E)$, $F\bar{F}$ décrit $\mathscr{H}(E)$, donc

$$\forall H \in \mathscr{H}(E), g(RHR^{-1}) = Rg(H)R^{-1}.$$

C'est à dire g est isotrope.

Comme g est isotrope, H et $g(H)$ ont mêmes vecteurs propres et commutent.

Ecrivons (i) dans le cas $F = \bar{F}$ alors

$$D(\Phi)(F^2)(S) = \operatorname{Tr}[F^{-1}g(F^2)F^{-1}S]$$

$$= \operatorname{Tr}[g(F^2)F^{-2}S]$$

$$= \operatorname{Tr}[g(F^2)D(\log)(F^2)(S)]$$

où nous avons utilisé la commutation de $g(F^2)$ avec F^{-1} pour passer de la première ligne à la deuxième, et avec F^2 pour passer de la deuxième ligne à la troisième. Lorsque F décrit l'intersection de $\mathscr{L}^+(E)$ avec $\mathscr{L}_S(E)$, $H = F^2$ décrit $\mathscr{H}(E)$, donc

$$D(\Phi)(H)(S) = \operatorname{Tr}[g(H)D(\log)(H)(S)].$$

Le logarithme employé ici est légitime car H n'a pas de valeurs propres négatives ou nulles, puisqu'il est défini-positif. Notons exp l'exponentielle, alors

$$\forall H \in \mathscr{H}(E), \exp(\log H) = H.$$

Grâce à la règle de dérivation des fonctions composées $D(\Phi)(H)(S)$ se transforme successivement en

$$D(\Phi)(H)(D(\exp)(\log H)(D(\log)(H)(S))) = D(\Phi\circ\exp)(\log H)(D(\log)(H)(S))$$

où le signe $\circ$ (rond) désigne la composition des applications.
Lorsque S décrit $\mathscr{L}_S(E)$, $S' = D(\log)(H)(S)$ décrit $\mathscr{L}_S(E)$ donc

$$\forall S' \in \mathscr{L}_S(E), D(\Phi\circ\exp)(\log H)(S') = \mathrm{Tr}[g(H)S']$$

d'où (ii) avec $\Psi = \Phi\circ\exp$.

4.2 *Démonstration de* [(ii)$\Rightarrow$(i)]

Lemme (décomposition polaire): soit $F \in \mathscr{L}^+(E)$ alors il existe $H \in \mathscr{H}(E)$ et $R \in \mathcal{O}^+(E)$ telles que $F = RH$.
En effet $\bar{F}F = \overline{RH}RH = \bar{H}\bar{R}RH = H^2$ détermine H, ensuite $R = FH^{-1}$ est une rotation car son déterminant est positif et

$$\bar{R}R = \overline{FH^{-1}}FH^{-1} = \overline{H^{-1}}\bar{F}FH^{-1} = H^{-1}H^2H^{-1} = I$$

D'après l'isotropie

$$g(F\bar{F}) = g(RH\overline{RH}) = g(RH\bar{H}R) = g(RH^2R^{-1}) = Rg(H^2)R^{-1}$$

L'existence de Ψ entraîne

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,[F^{-1}g(F\bar{F})\overline{F^{-1}}S] &= \mathrm{Tr}\,[H^{-1}R^{-1}Rg(H^2)R^{-1}RH^{-1}S]\\
&= \mathrm{Tr}\,[H^{-1}g(H^2)H^{-1}S] = \mathrm{Tr}\,[g(H^2)H^{-2}S]\\
&= \mathrm{Tr}\,[g(H^2)D(\log)(H^2)(S)]\\
&= D(\Psi)(\log H^2)(D(\log)(H^2)(S))\\
&= D(\Psi\circ\log)(H^2)(S)\\
&= D(\Psi\circ\log)(\bar{F}F)(S)
\end{aligned}$$

d'où (i) avec $\Phi = \Psi\circ\log$.

4.3 *Démonstration de* [(ii)$\Leftrightarrow$(iii)]

Il suffit de démontrer l'équivalence de l'isotropie de $\Psi(S)$ et de $g(H)$ quand

$$\mathrm{Tr}\,[g(H)S] = D(\Psi)(\log H)(S).$$

L'isotropie de Ψ

$$\forall S \in \mathscr{L}_S(E), \forall R \in \mathcal{O}^+(E), \Psi(S) = \Psi(RSR^{-1})$$

entraîne par dérivation dans la directions S'

$$\begin{aligned}
D(\Psi)(S)(S') &= D(\Psi)(RSR^{-1})(RS'R^{-1})\\
D(\Psi)(\log H)(S') &= D(\Psi)(R(\log H)R^{-1})(RS'R^{-1})\\
&= D(\Psi)(\log (RHR^{-1}))(RS'R^{-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,[g(H)S'] &= \mathrm{Tr}\,[g(RHR^{-1})RS'R^{-1}]\\
&= \mathrm{Tr}\,[R^{-1}g(RHR^{-1})RS']
\end{aligned}$$

donc

$$g(RHR^{-1}) = Rg(H)R^{-1}.$$

Réciproquement, si g est isotrope, puisque

$$\begin{aligned}\Psi(S) &= \Psi(0) + [\Psi(tS)]_0^1 = \Psi(0) + \int_0^1 D(\Psi)(tS)(S)\,\mathrm{d}t \\ &= \Psi(0) + \int_0^1 D(\Psi)(\log(\exp(tS)))(S)\,\mathrm{d}t \\ &= \Psi(0) + \mathrm{Tr}\left[\int_0^1 g(\exp(tS))\,\mathrm{d}tS\right]\end{aligned}$$

nous en déduisons

$$\begin{aligned}\Psi(RSR^{-1}) &= \Psi(0) + \mathrm{Tr}\left[\int_0^1 g(\exp(tRSR^{-1}))\,\mathrm{d}tRSR^{-1}\right] \\ &= \Psi(0) + \mathrm{Tr}\left[\int_0^1 g(R(\exp(tS))R^{-1})\,\mathrm{d}tRSR^{-1}\right] \\ &= \Psi(0) + \mathrm{Tr}\left[R\int_0^1 g(\exp tS)\,\mathrm{d}tR^{-1}RSR^{-1}\right] \\ &= \Psi(0) + \mathrm{Tr}\left[\int_0^1 g(\exp(tS))\,\mathrm{d}tS\right] \\ &= \Psi(S).\end{aligned}$$

5. UN EXEMLE SIMPLE

Choisissons pour Ψ la forme quadratique isotrope

$$\Psi(S) = \frac{1}{4}\lambda(\mathrm{Tr}\,S)^2 + \frac{1}{2}\mu\,\mathrm{Tr}\,(S^2)$$

où λ et μ sont des nombres homogènes à des pressions.
Ceci nous conduit alors à

$$g(H) = \lambda\frac{1}{2}(\log \det H)I + \mu \log H$$

$$\sigma = \lambda\frac{\log \det F}{\det F}I + \mu\frac{1}{\det F}\log(F\bar{F}).$$

Par rapport au tenseur des déformations d'Almansi-Euler A, le développement limité de σ au voisinage de zéro est au premier ordre

$$\lambda(\mathrm{Tr}\,A)I + 2\mu A$$

ce qui nous permet d'interpréter les nombres λ et μ comme les coefficients de Lamé et de proposer notre loi comme expression de la loi de Hooke en grandes déformations.

5. *Inversibilité de la loi*

De manière analogue au cas classique nous pouvons écrire

$$\frac{1}{2}\log(F\bar{F}) = (\det F)\left[\frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}(\mathrm{Tr}\,\sigma)I\right]$$

(où ν et E désignent respectivement le coefficient de Poisson et le module d'Young) et

$$(\operatorname{Tr} \sigma) = (3\lambda + 2\mu)\frac{\log \text{dét}\, F}{\text{dét}\, F}.$$

Si à l'aide de cette dernière relation nous pouvons exprimer dét F en fonction de $\operatorname{Tr} \sigma$, nous déduirons facilement de la première relation, l'expression en fonction de σ, de $\log (F\bar{F})$ puis $F\bar{F}$, et enfin F à une rotation près. Posons $\alpha = \text{dét}\, F$, l'examen du graphe de la fonction $(\log \alpha/\alpha)$ pour $\alpha > 0$ montre que l'inversibilité sera assurée si

$$\text{dét}\, F \leqslant e = 2,718\ldots \text{ (nombre de Neper)}$$

5.2 *Traction*

Si
$$\sigma = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
alors
$$\frac{1}{2}\log (F\bar{F}) = (\text{dét}\, F)\frac{s}{E}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix}$$

ce qui donne à une rotation R près

$$F = \begin{bmatrix} 1+\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & (1+\epsilon)^{-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & (1+\epsilon)^{-\nu} \end{bmatrix} R$$

avec

$$s = E\frac{\log (1+\epsilon)}{(1+\epsilon)^{(1-2\nu)}}.$$

L'intervention de $\log(1+\epsilon)$ est à rapprocher de la pratique courante des ingénieurs spécialistes de la grande déformation, qui expriment la traction s non pas en fonction de ϵ, dite "déformation apparente", mais de $\log(1+\epsilon)$, dite "déformation vraie" [1].

5.3 *Cisaillement*

Si
$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & s & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
alors $\operatorname{Tr} \sigma = 0$, dét $F = 1$ et
$$\log (F\bar{F}) = \frac{s}{\mu}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ce qui donne à une rotation R près

$$F = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\frac{s}{2\mu} & \operatorname{sh}\frac{s}{2\mu} & 0 \\ \operatorname{sh}\frac{s}{2\mu} & \operatorname{ch}\frac{s}{2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R$$

résultat qui gagne à être comparé avec le cas classique où intervient la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{s}{2\mu} & 0 \\ \frac{s}{2\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dont le déterminant vaut 1, seulement au second ordre près en $(s/2\mu)$.

6. CONCLUSION

Il semble qu'il y ait intérêt à remplacer le tenseur des déformations d'Almansi–Euler

$$A = \frac{1}{2}[I - (F\bar{F})^{-1}]$$

par le tenseur

$$\frac{1}{2}\log(F\bar{F}) = -\frac{1}{2}\log(F\bar{F})^{-1}$$

pour caractériser la déformation.

Dans le cas simple isotrope que nous avons examiné, la fonction $\Phi(\bar{F}F)$ est la forme quadratique

$$\lambda\left[\mathrm{Tr}\,\frac{1}{2}\log(\bar{F}F)\right]^2 + 2\mu\,\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2}(\bar{F}F)\right]^2$$

Là encore le tenseur $(1/2)\log(\bar{F}F)$ sample remplacer avec profit le tenseur des déformations de Cauchy–Green

$$G = \frac{1}{2}(\bar{F}F - I).$$

Si les inégalités classiques

$$3\lambda + 2\mu > 0 \qquad \text{et} \quad \mu > 0$$

sont vérifiées, $\Phi(\bar{F}F)$ est une fonction convexe du tenseur $(1/2)\log(\bar{F}F)$. Une possibilité de généralisation au cas non isotrope semble donc: $\Phi(\bar{F}F)$ est une fonction convexe de $(1/2)\log(\bar{F}F)$. $(1/2)\log(FF)$.

REFERENCE

[1] A. NADAI, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, 2nd Edn. McGraw-Hill, New York (1950).

(*Received* 17 *November* 1977)