

Elementare partielle Differentialgleichungen für Mathematiker und Ingenieure (V2+U2). Gehalten im Sommersemester 2005 an der TU Darmstadt.

Patrizio Neff *
Department of Mathematics
University of Technology
Darmstadt

18th July 2005

1 Einleitung

Eine partielle Differentialgleichung (PDE: partial differential equation) ist eine Gleichung für eine unbekannte Funktion u von mindestens zwei oder mehr (unabhängigen) Variablen und für gewisse partielle Ableitungen dieser Funktion. Im Gegensatz dazu bestimmt eine gewöhnliche Differentialgleichung (ODE: ordinary differential equation) eine unbekannte Funktion u , die nur von einer unabhängigen Variablen x oder t abhängt.

So ist

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (1.1)$$

die allgemeinste Form einer PDE erster Ordnung in den zwei unabhängigen Variablen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Die **Ordnung** einer PDE ist der Grad der höchsten auftretenden Ableitung. Entsprechend ist

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \quad (1.2)$$

die allgemeinste Form einer PDE zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Variablen. Ist allgemeiner $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \mapsto \mathbb{R} \quad (1.3)$$

eine gegebene Funktion, so nennt man den Ausdruck

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x), \dots, D^k u(x)) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \quad (1.4)$$

eine PDE k -ter Ordnung für die unbekannte Funktion $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Hierbei bezeichnet $D^l u(x)$, $l \in \mathbb{N}$ die Menge der partiellen Ableitungen der Ordnung l .

Das Lösen (Integrieren) einer PDE besteht darin, daß man alle Funktionen u findet, die alle partiellen Ableitungen besitzen die in der Gleichung (1.4) auftreten (klassische Lösung) und die der Gleichung (1.4) genügen und eventuellen gewissen zusätzlichen (sogenannten) Randbedingungen auf einer Teilmenge des Randes $\Gamma \subset \partial\Omega$ von Ω . Ziel ist es, falls möglich, eine einfache, explizite, geschlossene Formel für die Lösung zu finden, oder, weil dies im allgemeinen nicht möglich ist, Eigenschaften der Lösungen zu beschreiben, ohne die Lösung explizit zu kennen. Natürlich muß man zuerst klären, ob es überhaupt Lösungen der PDE gibt, das ist die sogenannte Existenzfrage.

Beispiele für partielle Differentialgleichungen:

1. $u_t + c u_y = 0$, lineare Transportgleichung, Konvektionsgleichung

*Patrizio Neff, AG6, Fachbereich Mathematik, Darmstadt University of Technology, Schlossgartenstrasse 7, 64289 Darmstadt, Germany, email: neff@mathematik.tu-darmstadt.de, Tel.: 049-6151-163495

2. $u_t + c u_x = f(x, t, u)$, nichtlineare Konvektions-Reaktionsgleichung
3. $u_t + u u_x$, nichtlineare Transportgleichung, Burgers-Gleichung (Stoßwellen)
4. $\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0$, Laplace-Gleichung, Potentialgleichung
5. $\Delta u = f(x)$, Poisson-Gleichung
6. $u_{tt} = u_{xx}$, eindimensionale lineare Wellengleichung (schwingende Saite)
7. $u_{tt} = u_{xx} - u^3$, eindimensionale nichtlineare Wellengleichung mit Rückkopplung
8. $u_{tt} = \Delta u$, allg. Wellengleichung im \mathbb{R}^n , im \mathbb{R}^2 Schwingung einer Membran
9. $u_t + u u_x + u_{xxx} = 0$, Dispersionswelle
10. $u_t = u_{xx}$, eindimensionale Wärmeleitungsgleichung/Diffusionsgleichung
11. $u_{tt} = u_{xxxx} = \partial_x^4 u$, schwingender Stab
12. $u_t = i u_{xx}$, eindimensionale Schrödinger-Gleichung
13. $(1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0$, Minimalflächengleichung
14. $u_t + H(Du) = 0$, $H : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, Hamilton-Jacobi Gleichung
15. $|Du|^2 = 1$, Eikonalgleichung der geometrischen Optik

Beispiele für partielle Differentialgleichungssysteme: (die gesuchte Funktion u selbst hat mehrere Komponenten, i.A. braucht man dann sovieler partielle Differentialgleichungen wie u Komponenten hat, um eine Lösung zu bestimmen:

1. $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ **Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen**, zwei Gleichungen für zwei unbekannte Funktionen $u, v : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$.
2. $\mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{Div} u - u_{tt} = f(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$, die **Lamé-Gleichungen**, elastisches System, beschreibt die elastische Verschiebung u eines Körpers unter der Einwirkung von Kräften f . Die Parameter μ, λ sind gegebene Konstanten die das Material beschreiben (Glas, Metall)
3. $\Delta u + k^2 u = 0$ stationäre Schwingung im \mathbb{R}^n , **Helmholtzsche Schwingungsgleichung**
4. $u_t + \nabla u \cdot u + \nabla p - \nu \Delta u = f$, $\operatorname{Div} u = 0$ gesuchte Funktionen: Geschwindigkeitsvektor $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ und skalarer Druck $p : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Insgesamt also vier Gleichungen für vier unbekannte Funktionen $u = (u_1, u_2, u_3), p$. Die **Navier-Stokes Gleichungen** beschreiben Strömungen z.Bsp. von Luft und Wasser. Wieder ist die sogenannte Viskosität ν ein Materialparameter
5. $u_t + \nabla u \cdot u + \nabla p - \nu \Delta u = f$, $\operatorname{Div} u = 0$, die **Euler-Gleichungen** der Gasdynamik entstehen formal für $\nu = 0$ aus den Navier-Stokes Gleichungen
6. Es sei $E, H, D, B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ die elektrische, magnetische Feldstärke sowie die Verschiebungsdichte und die magnetische Induktion. Die **Maxwellschen Gleichungen** der Elektrodynamik lauten

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E + B_t &= 0 \\ \operatorname{rot} H - D_t &= j \\ \operatorname{Div} B &= 0, \quad \operatorname{Div} D = \varrho \\ B &= B(H), \quad D = D(E) \quad j = j(E), \end{aligned}$$

mit der Stromdichte $j : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ und der skalaren Ladungsdichte $\varrho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Es handelt sich um ein PDE System 1. Ordnung von 17 Gleichungen für 15 unbekannte Funktionen $E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3, B_1, B_2, B_3, D_1, D_2, D_3, j_1, j_2, j_3$. Obwohl anscheinend zwei Gleichungen zuviel auftreten, ist das System nicht überbestimmt.

2 Notation

Ein n -Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ heißt **Multiindex** der **Ordnung**

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n. \quad (2.1)$$

Für einen festen Multiindex α setzen wir

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u(x). \quad (2.2)$$

Für ein $k \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $D^k u(x) := \{D^\alpha u \mid |\alpha| = k\}$, also die Menge aller partiellen Ableitungen von u der Ordnung k . Schlußendlich sei

$$|D^k u|^2 = \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2. \quad (2.3)$$

Mit diesen Definitionen ist es nun möglich, PDEs näher zu klassifizieren.

3 Klassifikation: formal

Eine PDE heißt **linear**, wenn die gesuchte Funktion u sowie alle ihre partiellen Ableitungen $D^\alpha u$ nur linear auftreten. Sie hat dann die allgemeine Form

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = \bar{a}(x), \quad (3.1)$$

wobei a_α, \bar{a} gegebene Funktionen sind.

Falls die PDE nicht linear in diesem Sinne ist, bietet es sich an, die auftretende Nichtlinearität nochmal zu untergliedern.

Eine PDE heißt **semilinear**, wenn die höchsten auftretenden partiellen Ableitungen linear vorkommen. Sie hat also die allgemeine Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u = \bar{a}(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x). \quad (3.2)$$

Eine PDE heißt **quasilinear**, wenn die höchsten auftretenden partiellen Ableitungen bei "eingefrorenen" Koeffizienten noch linear vorkommen. Sie hat dann die allgemeine Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) D^\alpha u = \bar{a}(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x). \quad (3.3)$$

Eine PDE heißt **voll nichtlinear**, wenn sie nichtlinear von den partiellen Ableitungen höchster Ordnung abhängt.

4 Linearität

In vielen Fällen kann man die gegebene PDE in der Form $L.u = 0$ schreiben, wobei L ein sogenannter **Differentialoperator** ist. Eine gegebene Funktion v wird durch den Operator in eine neue Funktion $L.v$ überführt:

1. $L = \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow L.u = \frac{\partial}{\partial x} u = u_x$
2. $L = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \Delta_x$, Laplace-Operator
3. $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta := \square$, Box-Operator, Wellenoperator $L.u = 0 \Rightarrow u_{tt} = \Delta u$.

Der Operator L heißt linear, wenn gilt

$$L.(u + v) = L.u + L.v, \quad L.(cu) = cL.u \quad (4.1)$$

wobei u, v aus einem geeigneten Funktionenraum sind und c eine reelle Zahl ist. Man nennt die Gleichung

$$L.u = 0 \tag{4.2}$$

linear, wenn L ein linearer Operator ist. Die Gleichung (4.2) heißt dann **homogene lineare Gleichung**. Für eine gegebene Funktion $f \neq 0$ heißt dann

$$L.u = f \tag{4.3}$$

inhomogene lineare Gleichung.

Beispiel. Obwohl $\cos(xy^2)u_x - y^2u_y = \tan(x^2 + y^2)$ kompliziert aussieht, handelt es sich um eine inhomogene lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung.

Als eine Folgerung aus der Linearität ergibt sich das **Superpositionsprinzip**: Seien u_1, \dots, u_n Lösungen der linearen Gleichung $L.u = 0$ und seien c_1, \dots, c_n Konstanten, dann ist auch

$$c_1u_1 + \dots + c_nu_n = \sum_{j=1}^n c_ju_j \tag{4.4}$$

eine Lösung von $L.u = 0$. Wie im Falle der linearen Algebra gilt: kennt man alle Lösungen einer homogenen Gleichung und eine Lösung der inhomogenen Gleichung, so kennt man schon alle Lösungen der inhomogenen Gleichung, denn

$$L.v_1 = g, \quad L.v_2 = g \Rightarrow L.(v_1 - v_2) = g - g = 0 \tag{4.5}$$

Einfache Beispiele für PDEs und deren Lösungen:

Bestimme alle Funktionen mit $u_{xx} = 0$. Die Gleichung liefert, daß $u_x(x, y) = \text{const.}$ genauer: u_x ist konstant auf jeder Geraden parallel zur x -Achse, d.h. es gilt $u_x(x, y) = f(y)$. Nochmalige Integration liefert die Lösungsformel $u(x, y) = xf(y) + g(y)$. Hierbei beobachten wir, daß zwei beliebige Funktionen f, g auftreten, typisch für die PDE zweiter Ordnung.

Bestimme alle Funktionen mit $u_{xx} + u = 0$. Betrachte zuerst die ODE $y^{(2)}(t) = -y(t)$. Deren allgemeine Lösung ist $y(t) = a \cos t + b \sin t$. Wir bekommen also die allgemeine Lösung zur PDE mit $u(x, y) = f(y) \cos x + g(y) \sin x$. Wieder beobachten wir, daß zwei beliebige Funktionen f, g auftreten, für die gegebene PDE zweiter Ordnung.

Bestimme alle Funktionen mit $u_{xy} = 0$. Wir integrieren zuerst nach y , betrachten x als Konstante, was $u_x(x, y) = g(x)$ liefert. Jetzt integrieren wir nach x und betrachten y als Konstante, woraus $u(x, y) = G(x) + F(y)$ folgt, mit $G'(x) = g(x)$ und die Funktion G ist also differenzierbar. Wieder beobachten wir, daß zwei beliebige Funktionen F, G auftreten. Will man u zuerst nach y differenzieren (der Satz von Schwarz über die Vertauschung der Differentiationsreihenfolge muss nicht gelten), dann muss F differenzierbar gewählt werden.

Genau dann sind u, v Lösungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y, u_y = -v_x$, wenn die komplexwertige Funktion $w(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$ holomorph (i.e. komplex differenzierbar) ist. Dann gilt $\Delta u = \Delta v = 0$. Lösungen der Potentialgleichung $\Delta u = 0$ nennt man **harmonische Funktionen**.

Bestimme alle Lösungen der linearen homogenen Konvektions/Transportgleichung 1. Ordnung

$$a u_x + b u_y := a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{4.6}$$

mit reellen, positiven Konstanten $a, b > 0$. Zuerst führen wir neue Koordinaten ein, d.h.

$$\begin{aligned} \xi(x, y) &= bx - ay \\ \eta(x, y) &= ax + by. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Offensichtlich ist das ein Diffeomorphismus (umkehrbar eindeutig, glatt) des \mathbb{R}^2 in sich (Jacobimatrix, Jacobi-Determinante), mit

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \xi_x(x, y) & \xi_y(x, y) \\ \eta_x(x, y) & \eta_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ a & b \end{pmatrix}, \quad \det \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = a^2 + b^2. \tag{4.8}$$

Ausgehend von der gesuchten Lösungsfunktion $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definieren wir nun eine **neue Funktion** $v(\xi, \eta)$, indem wir setzen

$$v(\xi(x, y), \eta(x, y)) := u(x, y). \quad (4.9)$$

Wir beachten, daß der Wert der Funktion v an einem gegebenen geometrischen Ort (es ist egal, wie wir den Ort bezeichnen, ob mit $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ oder mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) mit dem Wert der Funktion u übereinstimmt; trotzdem sind u, v unterschiedliche Funktionen. Die partiellen Ableitungen ergeben sich mit der Kettenregel so

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \partial_x u(x, y) = \partial_x [v(\xi(x, y), \eta(x, y))] \\ &= \partial_\xi v(\xi(x, y), \eta(x, y)) \cdot \xi_x(x, y) + \partial_\eta v(\xi(x, y), \eta(x, y)) \cdot \eta_x(x, y) \\ &= v_\xi(\xi, \eta)b + v_\eta(\xi, \eta)a \\ u_y(x, y) &= \partial_y u(x, y) = \partial_y [v(\xi(x, y), \eta(x, y))] \\ &= \partial_\xi v(\xi(x, y), \eta(x, y)) \cdot \xi_y(x, y) + \partial_\eta v(\xi(x, y), \eta(x, y)) \cdot \eta_y(x, y) \\ &= v_\xi(\xi, \eta)(-a) + v_\eta(\xi, \eta)b. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Bemerkung 4.1

Diese kleine Rechnung könnte für Sie der Anlaß sein, die Kettenregel der Differentialrechnung zu wiederholen.

Wegen $au_x + bu_y = 0$ bekommen wir für v die PDE

$$a[v_\xi(\xi, \eta)b + v_\eta(\xi, \eta)a] + b[v_\xi(\xi, \eta)(-a) + v_\eta(\xi, \eta)b] = (a^2 + b^2)v_\eta(\xi, \eta) = 0, \quad (4.11)$$

Also muss gelten $v(\xi, \eta) = f(\xi)$. Nach Rücksubstitution sieht man, dass die allgemeine Lösung $u(x, y) = v(\xi(x, y), \eta(x, y)) = f(\xi(x, y)) = f(bx - ay)$ ist, mit einer beliebigen Funktion f , typisch für die PDE 1. Ordnung.

Bestimme alle Lösungen der linearen homogenen Konvektions/Transportgleichung 1. Ordnung im \mathbb{R}^n

$$u_t(x, t) + \langle b, \nabla_x u(x, t) \rangle = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.12)$$

mit gegebenem $b \in \mathbb{R}^n$, wobei $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i$ das Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n bezeichne. Ausgehend von einer (angenommenen glatten) Lösung $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion

$$z : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad z(s) := u(x + sb, t + s) \quad (= u((x, t) + s(b, 1))). \quad (4.13)$$

Dann gilt $z'(s) = \langle \nabla u(x + sb, t + s), b \rangle + u_t(x + sb, t + s) \cdot 1 = 0$ unter Benutzung der PDE. Also ist $z(s)$ eine konstante Funktion. Für jeden Punkt (x, t) ist u konstant auf der Geraden durch (x, t) mit Richtung $(b, 1)$. Falls es auf jeder dieser Geraden einen Punkt gibt, auf dem wir u kennen, so ist u auf dem gesamten \mathbb{R}^{n+1} bekannt.

Bestimme alle Lösungen $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ des **homogenen Anfangswertproblems** (Cauchy-Problems)

$$\begin{aligned} u_t(x, t) + \langle b, \nabla_x u(x, t) \rangle &= 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= g(x), \end{aligned} \quad (4.14)$$

mit gegebenem $b \in \mathbb{R}^n$ und einer bekannten Funktion $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Für (x, t) mit $t > 0$ ist die Gerade durch (x, t) mit Richtung $(b, 1)$ gegeben durch

$$s \mapsto (x + sb, t + s). \quad (4.15)$$

Diese Gerade schneidet die (Hyper-)Ebene $\Gamma := \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$ bei $s = -t$ im Punkte $(x - tb, 0)$. Da u konstant auf dieser Geraden ist und ausserdem gilt, daß $u(x - tb, 0) = g(x - tb)$, so folgt also die Lösung

$$u(x, t) = g(x - tb). \quad (4.16)$$

Ein u in dieser Form heißt auch **travelling wave solution** und der Konstante Vektor b ist die verallgemeinerte Transportgeschwindigkeit, mit der die Ausgangsinformation transportiert wird. Wenn also die Gleichung (4.14) eine glatte Lösung besitzt, so ist sie durch (4.16) gegeben. Daher der Name Transportgleichung: die Werte von g auf dem Rand werden in das Innere des Gebietes transportiert. Umgekehrt ist für jede Funktion $g \in C^1$ die Funktion u aus (4.16) eine **klassische Lösung** (alle notwendigen partiellen Ableitungen existieren).

Falls $g \notin C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, so besitzt (4.14) offenbar keine C^1 -Lösung (klassische Lösung) u . Trotzdem ist natürlich u aus (4.16) der einzige vernünftige Kandidat für eine Lösung von (4.14). Für $g \notin C^1$ oder sogar unstetiges g nennt man

$$u(x, t) = g(x - tb). \quad (4.17)$$

daher eine **schwache Lösung** (die partiellen Ableitungen brauchen nicht zu existieren).

Bestimme alle Lösungen $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ des **inhomogenen Anfangswertproblems** (Cauchy-Problems)

$$\begin{aligned} u_t(x, t) + \langle b, \nabla_x u(x, t) \rangle &= f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= g(x), \end{aligned} \quad (4.18)$$

mit gegebenem $b \in \mathbb{R}^n$ und bekannten Funktionen $f : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Wie oben betrachten wir für festes (x, t) wieder die Funktion

$$z(s) := u(x + sb, t + s) \quad (= u((x, t) + s(b, 1))). \quad (4.19)$$

Jetzt gilt aber

$$z'(s) = f(x + sb, t + s), \quad (4.20)$$

also nach Integration

$$\begin{aligned} z(0) - z(-t) &= \int_{-t}^0 z'(s) ds = \int_{-t}^0 f(x + sb, t + s) ds = \int_0^t f(x + (s-t)b, s) ds, \\ z(0) &= u(x, t), \quad z(-t) = u(x - tb, t - t) = u(x - tb, 0) = g(x - tb). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Daher erhalten wir für (4.18) die Lösung

$$u(x, t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + (s-t)b, s) ds. \quad (4.22)$$

Bestimme alle Lösungen $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ der eindimensionalen Wellengleichung (Schwingung einer Saite)

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) &= u_0(x), \\ u_t(x, 0) &= u_1(x). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Wir führen wieder neue Koordinaten ein: diesmal $\xi(x, y) = x + t$, $\eta(x, y) = x - t$ und definieren die neue Funktion

$$v(\xi(x, y), \eta(x, y)) := u(x, y). \quad (4.24)$$

Wie oben folgt leicht mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \cdot 1 + v_\eta \cdot 1, & u_t &= v_\xi \cdot 1 - v_\eta \cdot 1 \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} & u_{tt} &= v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Ausnutzen der PDE für u liefert

$$0 = u_{tt} - u_{xx} = -4v_{\xi\eta}. \quad (4.26)$$

Diese PDE für v haben wir bereits weiter oben gelöst mit dem Resultat, daß

$$v = v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) \quad (4.27)$$

mit willkürlichen Funktionen $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Damit ergibt sich als allgemeine Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung

$$u(x, t) = f(x + t) + g(x - t), \quad (4.28)$$

wobei wir aber beachten, daß f, g zweimal differenzierbar sein müssen, damit diese Lösung eine klassische Lösung sein kann. Der Anteil $g(x - t)$ definiert eine nach rechts laufende Welle, $f(x + t)$ dagegen eine nach links laufende Welle. In beiden Fällen bleibt die Gestalt der Welle erhalten.

Damit u die Anfangsbedingungen erfüllt, muss gelten

$$\begin{aligned} u_0(x) = u(x, 0) &= f(x) + g(x) \quad \Rightarrow \quad u'_0(x) = f'(x) + g'(x) \\ u_1(x) = u_t(x, 0) &= \frac{d}{dt}u(x, t)_{t=0} = [f'(x+t) + g'(x-t)(-1)]_{t=0} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Daraus ergibt sich eindeutig

$$f' = \frac{1}{2}(u'_0 + u_1), \quad g' = \frac{1}{2}(u'_0 - u_1) \quad (4.30)$$

und mit Integrationskonstanten $f_0, g_0 \in \mathbb{R}$ also

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2} \int_0^x u_1(s) \, ds + f_0 \\ g(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^x u_1(s) \, ds + g_0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Mit $f + g = u_0$ von oben muss $f_0 + g_0 = 0$ gelten. Somit können die Integrationskonstanten ($u = f + g + f_0 + g_0$) in der Lösungsformel weggelassen werden. Wir erhalten die **d'Alambertsche Lösungsformel**

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x+t) + u_0(x-t)) + \int_{x-t}^{x+t} u_1(s) \, ds. \quad (4.32)$$

Eine Probe zeigt, dass dies für $u_0 \in C^2$ und $u_1 \in C^1$ tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems liefert.

5 Wohlgestelltheit im Sinne von Hadamard

Eine partielle Differentialgleichung $L.u = f$, mit Randwerten $R(u) = g$ und gegebenenfalls Anfangswerten $A(u) = u_0$ heißt **wohlgestellt im Sinne von Hadamard**, falls die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

1. Die PDE besitzt mindestens eine Lösung u (Existenz) für die Daten f, g, u_0 .
2. Zu gegebenen Daten f, g, u_0 gibt es höchstens eine Lösung (Eindeutigkeit).
3. Die Lösung hängt stetig von den Daten f, g, u_0 ab, d.h. werden die Daten nur geringfügig geändert, dann ändert sich auch die Lösung nur wenig (stetige Abhängigkeit, Stabilität).

Die Erfüllung dieser Forderungen hängt nun entscheidend davon ab, welche Klasse von Daten und welche Funktionenräume man betrachtet. Vom physikalischen Standpunkt aus ist Stabilität eine wichtige Eigenschaft: Messungen der Daten können immer nur approximativ sein. Falls nun die PDE nicht stabil ist, könnte man zu approximativen Daten völlig andere Ergebnisse bekommen. Vorhersagen wären nicht möglich!

Beispiel: wir betrachten wieder die lineare Transportgleichung $u_t + c u_x = 0$ zusammen mit dem Anfangswert $u(x, 0) = u_0(x)$. Die Gleichung hat die eindeutige Lösung

$$u(x, t) = u_0(x - ct). \quad (5.1)$$

Ohne hier präziser zu werden, liefert uns die Lösungsformel auch die Stabilität: kleine Änderungen an u_0 ändern auch die Lösung u nur wenig.

Jetzt betrachten wir die Transportgleichung mit der "Anfangsbedingung"

$$u(cs, s) = u_0(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad (5.2)$$

auf der sogenannten charakteristischen Kurve (cs, s) . Man sieht sofort, daß die Gleichung $u_t + c u_x = 0$ überhaupt nur lösbar ist, wenn u_0 konstant ist, da u entlang der Charakteristik (cs, s) konstant sein muss. Darüberhinaus gibt es unter dieser Voraussetzung unendlich viele Lösungen, denn entfernt von der Charakteristik kann u jeden Wert annehmen. Wie man sieht, ist das Problem nicht wohlgestellt. Wir werden den Grund für den Unterschied bzgl. der Anfangsvorgabe bei der Behandlung der Charakteristikenmethode untersuchen.

6 Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

6.1 Homogene lineare PDE's 1. Ordnung

Jede lineare PDE 1. Ordnung kann in der Gestalt

$$\langle a(x), \nabla u(x) \rangle + b(x) u(x) + c(x) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad a, b : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad c : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \quad (6.1)$$

geschrieben werden. Die Koeffizientenfunktionen $a : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, b, c : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ seien in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stetig und in keinem Punkt des Gebietes gleichzeitig Null. Wir studieren zunächst die homogene, "verkürzte" PDE

$$\langle a(x), \nabla u(x) \rangle = 0. \quad (6.2)$$

Offenbar besitzt (6.2) die Lösungen $u(x_1, \dots, x_n) = \text{const}$.

Definition 6.1

Die Lösungen $u = \text{const}$ von (6.2) heißen **triviale** Lösungen. Jede andere Lösung heißt **nicht-trivial**. ■

Zunächst betrachten wir den Fall zweier unabhängiger Variablen, also

$$\begin{aligned} \langle a(x), \nabla u(x) \rangle &= 0, \\ a(x) &= (a_1(x_1, x_2), a_2(x_1, x_2))^T, \quad \nabla u(x) = (\partial_{x_1} u(x_1, x_2), \partial_{x_2} u(x_1, x_2))^T, \\ a_1(x_1, x_2) \partial_{x_1} u(x_1, x_2) + a_2(x_1, x_2) \partial_{x_2} u(x_1, x_2) &= 0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

der sich durch besondere Anschaulichkeit auszeichnet.

6.1.1 Das charakteristische System

In dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei uns eine nichttriviale Lösung $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ von (6.3) bekannt. Diese Lösung u können wir uns geometrisch als (krumme) Fläche über Ω in der Ebene vorstellen. Aus Ω denken wir uns alle stationären Punkte, i.e. $(x_1, x_2) \in \Omega$ mit $\nabla u(x_1, x_2) = 0$ entfernt.

Die Gleichung (6.3) bleibt erhalten, wenn wir sie mit $\frac{1}{\|a(x)\|}$ multiplizieren (nach Vor. ist $\|a(x)\| > 0$ in Ω). Wir können also auch annehmen, daß $a \in \mathbb{R}^2$ Einheitslänge hat. Wenn wir uns die Lösung u als ein Flächenstück (Berg) über der Ebene vorstellen (Integralfläche), so sagt die PDE (6.3) nichts anderes, als daß $a = (a_1, a_2)$ in jedem Punkt senkrecht auf ∇u steht. Also ist a ein Tangenteneinheitsvektor an die Höhenlinien von u ("Der Gradient ∇u steht senkrecht auf Höhenlinien").

Eine **Höhenlinie** von u besitzt die Darstellung

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2, \quad u(\gamma(s)) = u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = \text{const} \quad (6.4)$$

wobei der Parameter s ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ durchlaufe. Ausserdem sei γ so gewählt, daß $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$ (das geht immer, falls nötig nach Umparametrisieren). Für differenzierbares γ gilt in I

$$\frac{d}{ds}u(\gamma(s)) = \langle \nabla u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)), \frac{d}{ds}\gamma(s) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \\ \partial_{x_2} u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(s) \\ \dot{\gamma}_2(s) \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad (6.5)$$

weil $u(\gamma(s)) = \text{const.}$ für alle $s \in I$. Andererseits gilt für eine Lösung u der PDE aber

$$\left\langle \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \\ \partial_{x_2} u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \\ a_2(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \quad (6.6)$$

Für nicht-verschwindenden Gradienten $\nabla u = (\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u) \in \mathbb{R}^2$ folgt aus (6.5) und (6.6) im \mathbb{R}^2 aber, daß

$$\dot{\gamma}(s) = a(\gamma(s)). \quad (6.7)$$

Dieses Gleichungssystem enthält die Funktion u nicht mehr, es kann aber trotzdem als der PDE (6.2) zugeordnet angesehen werden. Es heißt das sogenannte charakteristische Dgl. System der PDE (6.2). Nach der Theorie der Lösungen von ODE-Systemen besitzt das System (6.7) in dem Intervall I -zumindest lokal- eine **zweiparametrische Schar**

$$\gamma = \gamma(s; C_1, C_2) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s; C_1, C_2) \\ \gamma_2(s; C_1, C_2) \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad (6.8)$$

von Lösungskurven, wobei die Konstanten C_1, C_2 (und damit die Lösungskurven) z.Bsp. durch Anfangswerte

$$\begin{pmatrix} \gamma_1(0; C_1, C_2) \\ \gamma_2(0; C_1, C_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \Omega \quad (6.9)$$

festgelegt sind. Nach Konstruktion ist klar, daß

$$u(\gamma_1(s; C_1, C_2), \gamma_2(s; C_1, C_2)) = \text{const.} \quad (6.10)$$

ist. Man erwartet nun, daß die **Schar der räumlichen Kurven**

$$s \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(s; C_1, C_2) \\ \gamma_2(s; C_1, C_2) \\ \zeta(s; C_1, C_2) = \zeta(0; C_1, C_2) = \text{const.} \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

auf einer Integralfläche $(x, y, u(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ liegen, diese Integralfläche mit hin also "aufspannen". Daß das stimmt, beweisen wir unten für den allgemeineren Fall des \mathbb{R}^n .

Definition 6.2

Das der PDE (6.2) zugeordnete System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung (ODE) für $\gamma : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{ds}\gamma(s) = a(\gamma(s)) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \gamma'_1(s) \\ \vdots \\ \gamma'_n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(\gamma_1(s), \dots, \gamma_n(s)) \\ \vdots \\ a_n(\gamma_1(s), \dots, \gamma_n(s)) \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

heißt **charakteristisches System** zu (6.2).

Definition 6.3

Jede Lösung $\gamma : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ heißt **charakteristische Grundkurve** oder **Grundcharakteristik** von (6.2). Als **Charakteristik** bezeichnet man dagegen jede Kurve $\tilde{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\tilde{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \vdots \\ \gamma_n(s) \\ \text{const.} \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Für den Fall zweier unabhängiger Variablen haben wir gezeigt, daß die Höhenlinien jeder Integralfäche Charakteristiken und deren Projektionen in die (x_1, x_2) -Ebene Grundcharakteristiken von (6.3) sind. Umgekehrt kann man beweisen, daß jede Funktion $u(x, y)$ mit stetigen partiellen Ableitungen 1. Ordnung eine Lösung von (6.3) ist, wenn die Höhenlinien ihrer Fläche Charakteristiken sind, d.h. wenn die Funktionswerte von u entlang jeder Grundcharakteristik konstant sind. Diese Aussagen sind übertragbar auf die allgemeinere PDE (6.2).

Theorem 6.4

Sind die Koeffizientenfunktionen $a_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1 \dots n$ stetig in dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und verschwinden in keinem Punkt von Ω gleichzeitig, so ist jede Funktion $u = u(x_1, \dots, x_n)$ mit stetigen partiellen Ableitungen 1. Ordnung genau dann eine Lösung von

$$\langle a(x), \nabla u(x) \rangle = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, u: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, \quad a: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n \tag{6.14}$$

falls u konstant ist entlang jeder Grundcharakteristik.

Beweis. Die Grundcharakteristik erfüllt

$$\frac{d}{ds} \gamma(s) = a(\gamma(s)), \quad s \in I, \tag{6.15}$$

also gilt

$$\frac{d}{ds} u(\gamma(s)) = \langle \nabla u(\gamma(s)), \frac{d}{ds} \gamma(s) \rangle = \langle \nabla u(\gamma(s)), a(\gamma(s)) \rangle = 0 \tag{6.16}$$

und u ist konstant entlang γ . Für die Rückrichtung: Sei u konstant entlang der Grundcharakteristiken, d.h. u ist eine Funktion, so daß gilt

$$u(\gamma(s)) = u(\gamma_1(s), \dots, \gamma_n(s)) = const. \tag{6.17}$$

Differenzieren nach s liefert

$$0 = \frac{d}{ds} u(\gamma(s)) = \langle \nabla u(\gamma(s)), \frac{d}{ds} \gamma(s) \rangle = \langle \nabla u(\gamma(s)), a(\gamma(s)) \rangle = 0, \tag{6.18}$$

weil γ Grundcharakteristik ist. Durch jeden Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ führt eine Grundcharakteristik γ mit $\gamma(0) = (x_1, \dots, x_n)$ (nach Voraussetzung über stationäre Punkte sogar genau eine). Für diese Grundcharakteristik folgt aber dann, daß

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} u(\gamma(s)) = \langle \nabla u(\gamma(s)), \frac{d}{ds} \gamma(s) \rangle = \langle \nabla u(\gamma(s)), a(\gamma(s)) \rangle = 0 \quad \text{für } s = 0 \Rightarrow \\ 0 &= \langle \nabla u(x_1, \dots, x_n), a(x_1, \dots, x_n) \rangle = 0. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Also erfüllt u die PDE im Punkt (x_1, \dots, x_n) . Weil (x_1, \dots, x_n) beliebig war, ist u eine Lösung der PDE. ■

Um Lösungen von (6.2) zu finden, hat man demnach zuerst die allgemeine Lösung des charakteristischen Systems zu berechnen und dann Funktionen u zu suchen, die einen konstanten Wert annehmen, wenn man für ihre Variablen die allgemeine Grundcharakteristik einsetzt. Wir demonstrieren diesen sehr allgemeinen Lösungsweg anhand mehrerer Beispiele.

1. Die PDE $xu_x + yu_y = 0$ ist zu lösen für $y > 0$. Es ist also $a(x, y) = (x, y)^T$. Das zugeordnete charakteristische System lautet daher

$$\gamma'(s) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(s) \\ \gamma'_2(s) \end{pmatrix} = a(\gamma(s)) = a(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \end{pmatrix}. \tag{6.20}$$

Die allgemeine Lösung des Systems mit zwei Konstanten ist

$$\gamma_1(s) = C_1 e^s, \quad \gamma_2(s) = C_2 e^s. \tag{6.21}$$

Eine Kombination davon, die immer konstant ist (unabhängig von $s \in I$) ist z.Bsp.

$$\zeta(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = \frac{\gamma_1(s)}{\gamma_2(s)} = \frac{C_1}{C_2} = const. \tag{6.22}$$

Also ergibt sich eine spezielle Lösung $u_1(x, y) = \frac{x}{y}$. Weitere Lösungen sind $u(x, y) = g(u_1(x, y))$ mit beliebigem differenzierbarem $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, da natürlich auch $g(u_1(x, y))$ konstant auf den Grundcharakteristiken ist, wenn u_1 das ist.

Es ist auch möglich, die direkte Lösung des charakteristischen Systems geschickt zu vermeiden. Dazu multiplizieren wir die erste Gleichung des charakt. Systems mit γ_2 und die zweite mit γ_1 und subtrahieren die beiden Gleichungen dann. Das liefert

$$\gamma_1'(s)\gamma_2(s) - \gamma_1(s)\gamma_2'(s) = 0, \quad (6.23)$$

für $\gamma_2(s) > 0$ aber dann auch

$$0 = \frac{\gamma_1'(s)\gamma_2(s) - \gamma_1(s)\gamma_2'(s)}{\gamma_2^2(s)} = \frac{d}{ds} \left[\frac{\gamma_1(s)}{\gamma_2(s)} \right] \Rightarrow \frac{\gamma_1(s)}{\gamma_2(s)} = \text{const.}, \quad (6.24)$$

woraus wieder $u_1(x, y) = \frac{x}{y}$ als spezielle Lösung folgt.

2. Die PDE $x u_x + y^2 u_y = 0$ ist zu lösen für $x > 0, y > 0$. Es ist also $a(x, y) = (x, y^2)^T$. Das zugeordnete charakteristische System lautet daher

$$\gamma'(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(s) \\ \gamma_2'(s) \end{pmatrix} = a(\gamma(s)) = a(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2^2(s) \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

Also folgt z.Bsp.

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_1'(s)}{\gamma_1(s)} - \frac{\gamma_2'(s)}{\gamma_2^2(s)} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{ds} \left(\log |\gamma_1(s)| + \frac{1}{\gamma_2(s)} \right) &= \text{const.} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Eine spezielle Lösung ist daher $u_1(x, y) = \log |x| + \frac{1}{y}$ und die allgemeine Lösung ist

$$u(x, y) = g\left(\log |x| + \frac{1}{y}\right). \quad (6.27)$$

3. Die PDE $y u_x - x u_y = 0$ ist zu lösen für $(x, y) \neq (0, 0)$. Es ist also $a(x, y) = (y, -x)^T$. Das zugeordnete charakteristische System lautet daher

$$\gamma'(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(s) \\ \gamma_2'(s) \end{pmatrix} = a(\gamma(s)) = a(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = \begin{pmatrix} \gamma_2(s) \\ -\gamma_1(s) \end{pmatrix}. \quad (6.28)$$

Die allgemeine Lösung des Systems mit zwei Konstanten ist

$$\gamma_1(s) = C_1 \sin(s + C_2), \quad \gamma_2(s) = C_1 \cos(s + C_2). \quad (6.29)$$

Die Grundcharakteristiken sind also Kreise um $(0, 0)$ mit Radius C_1 beliebig. Charakteristiken sind daher alle Kreise in zur (x, y) -Ebene parallelen Ebenen mit Mittelpunkt auf der z -Achse. Nach Theorem (6.4) ist die Integralfläche konstant entlang den Grundcharakteristiken. Eine Kombination der gefundenen Grundcharakteristiken, die immer konstant ist (unabhängig von $s \in I$) ist z.Bsp.

$$\zeta(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = \gamma_1^2(s) + \gamma_2^2(s) = C_1^2 = \text{const.} \quad (6.30)$$

Also ergibt sich eine spezielle Lösung $u_1(x, y) = x^2 + y^2$. Weitere Lösungen sind $u(x, y) = g(u_1(x, y))$ mit differenzierbarem $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, also vermuten wir, daß die allgemeine Lösung gegeben ist durch $u(x, y) = g(x^2 + y^2)$. Das sind Rotationsflächen um die z -Achse.

Schneller geht es wieder, wenn wir die erste Gleichung mit γ_1 und die zweite Gleichung mit γ_2 multiplizieren und beide Gleichungen addieren. Das liefert $\gamma_1'(s)\gamma_1(s) + \gamma_2'(s)\gamma_2(s) = 0$, was äquivalent zu

$$\frac{d}{ds} (\gamma_1^2(s) + \gamma_2^2(s)) = 0 \quad (6.31)$$

ist. Also ist $\gamma_1^2(s) + \gamma_2^2(s) = \text{const.}$ eine gesuchte Kombination der Grundcharakteristiken, die konstant ist.

4. Die PDE $x u_x + y u_y + (x^2 + y^2) u_z = 0$ ist zu lösen für $x > 0$. Es ist also $a(x, y, z) = (x, y, x^2 + y^2)^T$. Das zugeordnete charakteristische System lautet daher

$$\gamma'(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(s) \\ \gamma_2'(s) \\ \gamma_3'(s) \end{pmatrix} = a(\gamma(s)) = a(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \\ \gamma_1^2(s) + \gamma_2^2(s) \end{pmatrix}. \quad (6.32)$$

Das liefert (direkt gelöst für γ_1, γ_2)

$$\begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \\ \gamma_3'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^s \\ C_2 e^s \\ C_1^2 e^{2s} + C_2^2 e^{2s} \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

also $\gamma_3(s) = \frac{C_1^2 + C_2^2}{2} e^{2s} + C_3$. Wir suchen wieder konstante Kombinationen der Grundcharakteristiken. Es bietet sich an

$$\begin{aligned} \Psi_1(C_1, C_2) &= \frac{\gamma_1(s)}{\gamma_2(s)} = \frac{C_1}{C_2} = \text{const.}, \\ \Psi_2(C_1, C_2, C_3) &= \gamma_3(s) - \frac{\gamma_1^2(s) + \gamma_2^2(s)}{2} = C_3 = \text{const.} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Die Kombination Ψ_1 führt auf die spezielle Lösung $u_1(x, y, z) = \frac{x}{y}$, während die Kombination Ψ_2 auf die spezielle Lösung $u_2(x, y, z) = z - \frac{x^2 + y^2}{2}$ führt. Aus diesen zwei speziellen Lösungen ergeben sich beliebig viele weitere Lösungen, indem man mit einer differenzierbaren Funktion $G: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ansetzt

$$u(x, y, z) = G(u_1(x, y, z), u_2(x, y, z)). \quad (6.35)$$

In diesem Falle liefert z. Bsp. $G(\xi, \eta) = \xi \cdot \eta$ die weitere spezielle Lösung $u_3(x, y, z) = \frac{y}{x} \left(z - \frac{x^2 + y^2}{2} \right)$.

Wie wir im letzten Beispiel gesehen haben, können wir uns unter Umständen eine ganze Reihe von speziellen Lösungen der PDE (6.2) verschaffen und sogar durch Kombination derselben beliebig viele spezielle Lösungen erhalten. Trotzdem stellt sich die Frage, ob wir entscheiden können, ob wir schon alle möglichen Lösungen so gewinnen können, oder ob uns noch spezielle Lösungen "fehlen", die wir nicht aus den anderen, schon bekannten Lösungen kombinieren können. Dazu studieren wir weiter unten den Begriff der Abhängigkeit von Funktionen.

Für das Auffinden von Lösungen der homogenen, verkürzten PDE (6.2) mittels der sogenannten Charakteristikenmethode haben wir bis jetzt folgende Möglichkeiten kennengelernt:

1. Berechnung der allgemeinen Lösung des charakteristischen Systems, welche von n Konstanten C_1, \dots, C_n abhängt: $\gamma = \gamma(s; C_1, \dots, C_n)$. Also

$$\gamma(s; C_1, \dots, C_n) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s; C_1, \dots, C_n) \\ \vdots \\ \gamma_n(s; C_1, \dots, C_n) \end{pmatrix}$$

Diese n -Gleichungen $\gamma_i = \gamma_i(s; C_1, \dots, C_n)$ kann man unter Umständen (Satz über implizite Funktionen) lokal nach C_1, \dots, C_n auflösen (wobei man sich jetzt die Konstanten als Variablen denken muss), das heißt, man kann schreiben

$$\begin{aligned} C_1 &= C_1(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \\ &\vdots \\ C_n &= C_n(\gamma_1, \dots, \gamma_n). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Dann betrachtet man in den Ausdrücken für C_i eine Funktion $\Psi: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ die die explizite Abhängigkeit von s eliminiert (implizit über die γ_i ist s immer vorhanden) und schreibt

$$\begin{aligned} \text{const.} &= \Psi(C_1, \dots, C_n) \\ &= \Psi(C_1(\gamma_1, \dots, \gamma_n), \dots, C_n(\gamma_1, \dots, \gamma_n)) =: f(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \end{aligned} \quad (6.37)$$

mit einer so definierten Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Daraus folgt dann die klassische Lösung

$$u(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n), \quad (6.38)$$

falls f differenzierbar ist

2. Oder man manipuliert das charakteristische System so, daß man Ausdrücke der Form

$$\frac{d}{ds} f(\gamma_1(s), \dots, \gamma_n(s)) = 0 \quad (6.39)$$

erhält, so daß gilt

$$f(\gamma_1(s), \dots, \gamma_n(s)) = \text{const.} \quad (6.40)$$

Ein solches f heißt dann **Vorintegral**. Mit Theorem 6.4 ist dann

$$u(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \quad (6.41)$$

eine Lösung der homogenen PDE (6.2).

Die Beantwortung der Frage nach der allgemeinen Lösung von (6.2) setzt die Kenntnis des folgenden Abhängigkeitsbegriffes für Funktionen voraus, der eine Verallgemeinerung des Begriffs der linearen Abhängigkeit darstellt.

Definition 6.5 (Abhängigkeit)

Die in einer beschränkten, abgeschlossenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definierten Funktionen $u_1, \dots, u_k : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ heißen in Ω **voneinander abhängig**, wenn eine Funktion $F : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}$ existiert mit folgenden Eigenschaften:

1. Die partiellen Ableitungen $D_1 F, \dots, D_k F$ sind im \mathbb{R}^k stetig.
2. In keinem Teilgebiet des \mathbb{R}^k ist $F \equiv 0$ (in isolierten Punkten oder entlang Untermannigfaltigkeiten, die keine offene Menge sind, könnte das aber sein).
3. $F(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_k(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0$ in Ω .

Die Funktionen $u_1, \dots, u_k : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ heißen in einem offenen Gebiet Ω **voneinander abhängig**, wenn sie in jedem abgeschlossenen Teilbereich von Ω abhängig sind. ■

Falls nur lineare Funktionen $F : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}$,

$$F(\xi_1, \dots, \xi_k) = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k \quad (6.42)$$

zugelassen werden, so führt diese Definition zurück auf die lineare Abhängigkeit.

Falls nur die Frage nach Abhängigkeit oder Unabhängigkeit eine Rolle spielt, aber nicht die Struktur von F , so kann das folgende (linearisierte) Kriterium herangezogen werden. Dabei bezeichnen wir mit J_u die Funktionalmatrix/Jacobimatrix der u_1, \dots, u_k , i.e. die Matrix

$$J_u(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k, \quad (6.43)$$

$$J_u(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u_1(x_1, \dots, x_n) & \dots & \partial_{x_n} u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} u_k(x_1, \dots, x_n) & \dots & \partial_{x_n} u_k(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Theorem 6.6 (Kriterium für Abhängigkeit von Funktionen)

Haben die Funktionen $u_1, \dots, u_k : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ in einem Gebiet Ω stetige partielle Ableitungen

1. Ordnung, so sind sie in Ω

1. für $n = k$ genau dann abhängig, falls $\det[J_u(x_1, \dots, x_n)] \equiv 0$ in Ω .
2. für $n < k$ stets voneinander abhängig.
3. für $n > k$ voneinander unabhängig, falls J_u in Ω den Rang k besitzt, also in Ω nicht alle k -reihigen Unterdeterminanten der Jacobimatrix $J_u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$ identisch verschwinden.

Beweis. Wir machen uns wenigstens den 1. Fall (eine Richtung) klar um zu verstehen, welche Rolle die Jacobi-Matrix J_u spielt. Wir nehmen an, daß es eine nichtverschwindende glatte Funktion $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ gibt mit

$$F(u_1(x), \dots, u_n(x)) \equiv 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (6.44)$$

Außerdem gelte aber $\det[J_u(x)] \neq 0$ in Ω . Wir möchten das zum Widerspruch führen. Aus

$$F(u_1(x), \dots, u_n(x)) \equiv 0 \quad (6.45)$$

gewinnen wir durch partielle Differentiation die n -Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{x_1} [F(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n))] \\ &\vdots \\ 0 &= \partial_{x_n} [F(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n))] . \end{aligned} \quad (6.46)$$

Anwendung der Kettenregel liefert

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (D_1 F(u_1, \dots, u_n), \dots, D_n F(u_1, \dots, u_n)) \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u_1(x_1, \dots, x_n) & \dots & \partial_{x_n} u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} u_k(x_1, \dots, x_n) & \dots & \partial_{x_n} u_k(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}. \quad (6.47)$$

Nach transponieren läßt sich das mit $\nabla F = (D_1 F, \dots, D_n F) \in \mathbb{R}^n$ kürzer schreiben als

$$J_u(x_1, \dots, x_n)^T \nabla F(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n)) = 0, \quad (6.48)$$

womit wegen $\det[J_u] \neq 0$ folgt, daß

$$\nabla F(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n)) = 0 \quad (x_1, \dots, x_n) \in \Omega. \quad (6.49)$$

Wieder wegen $\det[J_u] \neq 0$ folgt, daß, wenigstens lokal um einen ausgezeichneten Punkt $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in \Omega$ die Bilder $u(x)$ eine offene Menge bilden (das System u ist diffeomorph). Also schließen wir, daß

$$\nabla F(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0 \quad \text{für } (\xi_1, \dots, \xi_n) \in U(u(\tilde{x})) \subset \mathbb{R}^n. \quad (6.50)$$

Weil F glatt vorausgesetzt ist, muß gelten $F = \text{const}$ in der offenen Menge (dem Teilgebiet des $\mathbb{R}^k, k = n$) U . Wegen (6.44) gilt sogar $F \equiv 0$ für $\xi \in U(\tilde{x})$. Das ist aber ein Widerspruch, da vorausgesetzt war, daß F nicht auf irgendeinem Gebiet identisch verschwindet. Somit haben wir gezeigt: Sind u_1, \dots, u_n abhängig, so muß $\det[J_u] = 0$ gelten. Die Rückrichtung ist übrigens bedeutend schwieriger zu zeigen. ■

Betrachten wir ein Beispiel. Wir zeigen, daß je zwei verschiedene Lösungen der PDE $a_1(x, y)u_x(x, y) + a_2(x, y)u_y(x, y) = 0$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ voneinander abhängig sind, falls $a_1^2(x, y) + a_2^2(x, y) > 0$, $(x, y) \in \Omega$. Dazu seien $u, v : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ solche verschiedenen Lösungen, also

$$\begin{aligned} a_1(x, y)u_x(x, y) + a_2(x, y)u_y(x, y) &= 0 \\ a_1(x, y)v_x(x, y) + a_2(x, y)v_y(x, y) &= 0 \quad \text{oder in Matrix-Notation} \\ \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Da $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ muß also

$$\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = 0 \quad (6.52)$$

sein womit die Aussage bewiesen ist. Wir sehen: für homogene, verkürzte PDE's 1. Ordnung im \mathbb{R}^2 gewinnt man mit einer speziellen Lösung alle Lösungen als davon abhängige Lösungen.

Beispiel: $u_1(x) = \sin x$ und $u_2(x) = \cos x$ sind auf jedem reellen Intervall abhängig, da mit $F(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + \xi_2^2 - 1$ in der Tat gilt, daß $F(u_1(x), u_2(x)) \equiv 0$, aber $F \neq 0$.

Beispiel: $u_1(x, y) = e^x y$ und $u_2(x, y) = x + y$ sind in der (x, y) -Ebene unabhängig, denn es gilt mit

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \begin{pmatrix} e^x y \\ x + y \end{pmatrix}, & J_u(x, y) &= \begin{pmatrix} e^x y & e^x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \det[J_u](x, y) &= e^x (y - 1), \end{aligned} \quad (6.53)$$

so daß $\det[J_u](x, y) = e^x (y - 1)$ zwar auf der Geraden $y = 1$ null wird, aber in keinem Gebiet Null ist (die Gerade $y = 1$ ist keine offene Menge, also kein Gebiet).

Beispiel: Die speziellen Lösungen $u_1(x, y, z) = \frac{y}{x}$ und $u_2(x, y, z) = z - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ sind für $x > 0$ unabhängig, denn mit

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \frac{y}{x} \\ z - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{pmatrix}, & J_u(x, y, z) &= \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \\ -x & -y & 1 \end{pmatrix}, \\ \det\left[\begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ -x & -y \end{pmatrix}\right] &= \frac{y^2}{x^2} + 1 > 0 \end{aligned} \quad (6.54)$$

so daß J_u den Rang zwei hat.

Theorem 6.7

Je n -Lösungen $u_1, \dots, u_n : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ der PDE $\langle a(x), \nabla u(x) \rangle = 0$ ($a : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$) in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sind abhängig.

Beweis. Da $u_1, \dots, u_n : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ Lösungen sind gilt offenbar

$$\begin{aligned} \langle a(x), \nabla u_1(x) \rangle &= 0 \\ &\vdots \\ \langle a(x), \nabla u_n(x) \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Das läßt sich auch schreiben als

$$\begin{pmatrix} \nabla u_1 & \dots \\ \vdots \\ \nabla u_n & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_n(x) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow J_u(x) \cdot a(x) = 0, \quad (6.56)$$

womit klar ist, daß der Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ im Kern von J_u liegt, somit J_u nicht invertierbar ist, also $\det[J_u] = 0$. Nach dem Kriterium aus Theorem 6.6 sind somit u_1, \dots, u_n abhängig.

Definition 6.8 (Fundamentalsystem)

Ein System von $n - 1$ Lösungen $u_1, \dots, u_{n-1} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ der PDE $\langle a(x), \nabla u(x) \rangle = 0$ in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein **Fundamentalsystem** oder eine **Integralbasis**, wenn die zugehörige Jacobi-Matrix J_u in jedem Teilgebiet von Ω den Rang $n - 1$ hat.

Bemerkung 6.9

Die Funktionen eines Fundamentalsystems sind nach Theorem 6.6 in Ω unabhängig. Bilden $u_1, \dots, u_{n-1} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ in Ω also eine Integralbasis und ist u eine weitere Lösung von $\langle a(x), \nabla u(x) \rangle = 0$, so existiert eine von null verschiedene Funktion $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$F(u_1, \dots, u_{n-1}, u) \equiv 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (6.57)$$

Mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen kann man beweisen, daß in einer hinreichend kleinen Umgebung eines Punktes $x_0 \in \Omega$, für den gilt

$$D_n F(u_1(x_0), \dots, u_{n-1}(x_0), u(x_0)) \neq 0 \quad (6.58)$$

sich die Relation (6.57) lokal eindeutig nach $u(x)$ auflösen läßt, d.h. es gibt eine Funktion $\tilde{F} : \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ so daß

$$u(x) = \tilde{F}(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)) \quad (6.59)$$

mit

$$F(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x), \tilde{F}(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x))) \equiv 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (6.60)$$

Wir bemerken noch, daß $D_n F \equiv 0$ nicht gelten kann, da sonst F gar nicht von der n -ten Variablen abhängen würde, mithin sich (6.57) als

$$F(u_1, \dots, u_{n-1}) \equiv 0 \quad \text{in } \Omega \quad (6.61)$$

schreiben ließe, womit die Funktionen u_1, \dots, u_{n-1} abhängig wären, also keine Integralbasis sein könnten. Umgekehrt wissen wir schon, daß jede Funktion mit einer Darstellung

$$u(x) = \tilde{F}(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)) \quad (6.62)$$

wieder eine Lösung der PDE $\langle a(x), \nabla u(x) \rangle = 0$ ist. In diesem Sinne kann man

$$u(x) = \tilde{F}(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)) \quad (6.63)$$

als **allgemeine Lösung** von $\langle a(x), \nabla u(x) \rangle = 0$ ansehen. In ihr tritt nicht wie bei einer ODE eine Konstante auf, sondern sogar eine frei wählbare Funktion \tilde{F} der $n-1$ Fundamentallösungen.

Für den Fall $n = 2$ hatten wir oben schon gesehen, daß eine spezielle Lösung $u_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ schon eine Integralbasis bildet, sofern sie nicht konstant ist. Jede weitere Lösung ergibt sich durch $u(x, y) = \tilde{F}(u_1(x, y))$.

6.2 Existenz einer Integralbasis

Es stellt sich natürlich die Frage, ob es zur PDE $\langle a(x), \nabla u(x) \rangle = 0$ immer auch eine Integralbasis gibt. Im Prinzip wissen wir ja nicht einmal, ob es überhaupt (eine) spezielle Lösungen zu $\langle a(x), \nabla u(x) \rangle = 0$ gibt.

Wir hatten das Auffinden von speziellen Lösungen allerdings zurückgeführt auf die Lösung des charakteristischen Systems (6.12). Falls die Koeffizientenfunktion $a : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ **global Lipschitz** ist, d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$ so daß

$$\forall \xi, \eta \in \Omega \subset \mathbb{R}^n : \quad \|a(\xi) - a(\eta)\| \leq C \|\xi - \eta\|, \quad (6.64)$$

dann hat das charakteristische System für die Unbekannte $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$,

$$\gamma'(s) = a(\gamma(s)), \quad \gamma(0) = \gamma_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (6.65)$$

genau eine Lösung. Mit der Vorgabe eines variablen $\gamma_0 \in \mathbb{R}^n$ finden wir also eine n -parametrische Schar von charakteristischen Grundkurven $\gamma(s; \gamma_0)$. Zu jedem γ_0 findet man also wenigstens eine spezielle Lösung. Wir wissen, daß sich jede Lösung der PDE als Fläche denken läßt, die durch Charakteristiken aufgespannt wird. Es ist nun möglich, durch geschickte Wahl von γ_0 $n - 1$ -viele spezielle Lösungen zu finden, die auch unabhängig sind.

6.3 Die quasilineare PDE 1. Ordnung in zwei unabhängigen Variablen

Unter der allgemeinen quasilinearen PDE 1. Ordnung in zwei unabhängigen Variablen für eine gesuchte Funktion $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ verstehen wir eine (nichtlineare) Gleichung der Form

$$a_1(x, y, u) u_x + a_2(x, y, u) u_y = a_3(x, y, u), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (6.66)$$

Wir können das umschreiben zu

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1(x, y, u) \\ a_2(x, y, u) \\ a_3(x, y, u) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0. \quad (6.67)$$

Eine Lösung zu (6.67) $(x, y) \mapsto u(x, y)$ fassen wir als Integralfläche im \mathbb{R}^3 auf indem wir die Fläche schreiben als

$$\mathcal{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3, \quad (6.68)$$

$$\mathcal{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u(x, y) \end{pmatrix}.$$

Der Normalenvektor an die Fläche \mathcal{F} ergibt sich aus dem Kreuzprodukt

$$\partial_x \mathcal{F}(x, y) \times \partial_y \mathcal{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_x(x, y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_x \\ -u_y \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.69)$$

Also ist ein Normaleneinheitsvektor an die Fläche gegeben durch

$$\vec{n}_{\mathcal{F}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (6.70)$$

Wir sehen jetzt, daß der Vektor $a = (a_1, a_2, a_3)$ immer senkrecht zur Normalen an die Integralfläche (6.68) ist. Der Vektor $a = (a_1(x, y, u(x, y)), a_2(x, y, u(x, y)), a_3(x, y, u(x, y)))$ muß also also in der Tangentialebene der Integralfläche im Punkt $(x, y, u(x, y))$ liegen.

Definition 6.10 (Charakteristisches System für quasilineare PDE)

Wir nennen $a = (a_1(x, y, u(x, y)), a_2(x, y, u(x, y)), a_3(x, y, u(x, y)))$ charakteristische Richtung zu (6.67) und definieren das zugehörige System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung, das sogenannte **charakteristische System** für $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$

$$\gamma'(s) = a(\gamma(s)) = \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \gamma_1'(s) \\ \gamma_2'(s) \\ \gamma_3'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \\ a_2(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \\ a_3(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \end{pmatrix}, \quad \gamma(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \quad (6.71)$$

■

Prüfen Sie nach, daß diese Definition mit der Definition im verkürzten Fall übereinstimmt, falls man die verkürzte Gestalt der PDE betrachtet.

Lemma 6.11

Sei $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ Lösung der quasilinearen PDE und sei $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ eine Lösung des zugehörigen charakteristischen Systems mit $\gamma(0) = (x_0, y_0, u(x_0, y_0))$, d.h. $\gamma(0)$ liegt auf der Integralfläche. Dann liegt $\gamma(s)$ immer auf der Integralfläche. Zwei Lösungen u_1, u_2 der PDE, die sich in einem Punkt treffen, d.h. $(x_0, y_0, u_1(x_0, y_0)) = (x_0, y_0, u_2(x_0, y_0)) = P$ schneiden sich sogar in der durch diesen Punkt $P \in \mathbb{R}^3$ gehenden Charakteristik.

Beweis. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) &= u_x(\gamma_1, \gamma_2) \gamma_1' + u_y(\gamma_1, \gamma_2) \gamma_2' \\ \gamma_1, \gamma_2 \text{ erfüllen die zugehörigen charakteristischen Gleichungen} &\Rightarrow \\ &= u_x(\gamma_1, \gamma_2) a_1(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) + u_y(\gamma_1, \gamma_2) a_2(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \\ u \text{ erfüllt die PDE} &\Rightarrow \\ &= a_3(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \\ \text{charakteristische Gleichung für } \gamma_3 \text{ einsetzen} &\Rightarrow \\ &= \gamma_3'(s) = \frac{d}{ds} \gamma_3(s). \end{aligned} \quad (6.72)$$

Also gilt nach Integration $u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = \gamma_3(s) + K$. Wegen $\gamma(0) = (\gamma_1(0), \gamma_2(0), \gamma_3(0)) = (x_0, y_0, u(x_0, y_0))$ folgt $u(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) = \gamma_3(0)$ also $K = 0$ und mithin

$$u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = \gamma_3(s), \quad (6.73)$$

also liegt $\gamma(s)$ auf der Integralfläche. ■

Betrachten wir eine einparametrische Schar von Charakteristiken. Das ist eine Familie von Kurven $\gamma = \gamma(s; c)$ die das System (6.71) erfüllen, wobei s der Kurvenparameter ist (wo befinde ich mich auf der Kurve) und c angibt, welche Kurve ausgewählt wird. Jede solche einparametrische Schar von Charakteristiken erzeugt also Integralfläche (die Kurven der Schar überdecken die Lösungsfläche).

Es gilt aber auch die Umkehrung, d.h. jede Integralfläche definiert eine Lösung des charakteristischen Systems.

Lemma 6.12

Sei $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ Lösung der quasilinearen PDE und $(\gamma_1, \gamma_2) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ erfülle

$$\begin{aligned}\gamma_1'(s) &= a_1(\gamma_1(s), \gamma_2(s), u(\gamma_1(s), \gamma_2(s))), \\ \gamma_2'(s) &= a_2(\gamma_1(s), \gamma_2(s), u(\gamma_1(s), \gamma_2(s))).\end{aligned}\quad (6.74)$$

Dann gilt, daß

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \\ u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \end{pmatrix} \quad (6.75)$$

das zugehörige charakteristische System löst.

Beweis. Sei $(x, y, (u(x, y)))$ die gegebene Integralfläche. Wir betrachten zuerst die Lösung $(\gamma_1, \gamma_2) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ von

$$\begin{aligned}\gamma_1'(s) &= a_1(\gamma_1(s), \gamma_2(s), u(\gamma_1(s), \gamma_2(s))) \\ \gamma_2'(s) &= a_2(\gamma_1(s), \gamma_2(s), u(\gamma_1(s), \gamma_2(s))).\end{aligned}\quad (6.76)$$

(Das sind noch nicht die beiden Gleichungen des charakteristischen Systems!). Nun setzen wir $\gamma_3(s) := u(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\gamma_3'(s) &= u_x(\gamma_1, \gamma_2)\gamma_1' + u_y(\gamma_1, \gamma_2)\gamma_2' \\ &= u_x(\gamma_1, \gamma_2)a_1(\gamma_1(s), \gamma_2(s), u(\gamma_1(s), \gamma_2(s))) + u_y(\gamma_1, \gamma_2)a_2(\gamma_1(s), \gamma_2(s), u(\gamma_1(s), \gamma_2(s))) \\ &\quad u \text{ erfüllt die PDE} \Rightarrow \\ &= a_3(\gamma_1(s), \gamma_2(s), u(\gamma_1(s), \gamma_2(s))) \\ \text{Definition von } \gamma_3 &\Rightarrow \\ &= a_3(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)).\end{aligned}\quad (6.77)$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}\gamma_1'(s) &= a_1(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \\ \gamma_2'(s) &= a_2(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \\ \gamma_3'(s) &= a_3(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)),\end{aligned}\quad (6.78)$$

und $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ löst tatsächlich das charakteristische System. \blacksquare

Da u längs einer Charakteristik nicht mehr konstant sein muß weil $u = \gamma_3(s)$, sind im Fall $n = 2$ die Charakteristiken im allgemeinen keine Höhenlinien der Integralfläche mehr, aber man kann sich leicht überlegen, daß unser Lösungsverfahren auf demselben Prinzip basiert wie bei der homogenen, linearen verkürzten PDE 1. Ordnung: eine Funktion $u = u(x, y)$ mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung ist genau dann eine Lösung der PDE $a_1(x, y, u)u_x + a_2(x, y, u)u_y = a_3(x, y, u)$, wenn ihre Fläche von Charakteristiken aufgespannt wird, d.h. u ist Lösung, wenn $\gamma_3(s) = u(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ identisch erfüllt ist.

Im allgemeineren Fall für n unabhängige Variablen können wir ganz genauso vorgehen. Es gilt

Theorem 6.13

Sind die Koeffizientenfunktionen $a_i(x_1, \dots, x_n, \xi)$, $i = 1 \dots (n + 1)$ stetig in dem Gebiet $\Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und verschwinden in keinem Punkt von Ω gleichzeitig, so ist jede Funktion $u = u(x_1, \dots, x_n)$ mit stetigen partiellen Ableitungen 1. Ordnung genau dann eine Lösung von

$$\langle a(x), \begin{pmatrix} \nabla u(x) \\ -1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, a : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^{n+1}, \quad (6.79)$$

falls für jede Lösung des zugehörigen charakteristischen Systems für $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\frac{d}{ds}\gamma(s) = a(\gamma(s)) \quad (6.80)$$

gilt, daß

$$\gamma_{n+1}(s) = u(\gamma_1(s), \dots, \gamma_n(s)) \quad (6.81)$$

ist.

Beweis. Eine Kombination der beiden vorherigen Lemmata sowie die offensichtliche Erweiterung auf mehr Variablen. ■

6.4 Spezielle Lösung durch Anfangskurve

Wir wollen verlangen, daß die Lösung u der quasilinearen PDE 1. Ordnung in zwei unabhängigen Variablen durch die Kurve $t \mapsto \vartheta(t) \in \mathbb{R}^3$ geht, daß also gilt $\vartheta_3(t) = u(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$.

In diesem Fall kann man zeigen (unter den üblichen Glattheitsannahmen an die Koeffizienten der PDE)

1. Ist $t \mapsto (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))$ **keine Grundcharakteristik**, d.h. es gilt

$$\det \begin{pmatrix} \vartheta_1'(t) & a_1(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t)) \\ \vartheta_1'(t) & a_2(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t)) \end{pmatrix} \neq 0 \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad (6.82)$$

dann gibt es **genau eine Lösung** zu $a_1(x, y, u)u_x + a_2(x, y, u)u_y = a_3(x, y, u)$.

2. Ist $t \mapsto (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t))$ **eine Charakteristik**, so gibt es unendlich viele Lösungen der PDE $a_1(x, y, u)u_x + a_2(x, y, u)u_y = a_3(x, y, u)$, weil man keine Bedingung transversal zu ϑ vorschreibt (siehe den linearen Fall).
3. Ist $t \mapsto (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t))$ **keine Charakteristik**, aber $t \mapsto (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))$ **ist Grundcharakteristik**, so gibt es **keine Lösung** durch ϑ , denn jede Lösung u der PDE würde über die Definition $\vartheta_3(t) := u(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))$ eine Lösung des charakteristischen Systems erzeugen.

Wir betrachten den ersten Fall genauer und beweisen:

Theorem 6.14

Die quasilineare PDE 1. Ordnung in zwei unabhängigen Variablen

$$a_1(x, y, u(x, y))u_x(x, y) + a_2(x, y, u(x, y))u_y(x, y) = a_3(x, y, u(x, y)) \quad (6.83)$$

mit glatten Koeffizientenfunktionen a_i sei gegeben. Die glatte Anfangskurve $t \mapsto \vartheta(t) \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Die Grundanfangskurve $t \mapsto (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ sei **nicht-charakteristisch**, d.h.

$$\det \begin{pmatrix} \vartheta_1'(t) & a_1(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t)) \\ \vartheta_2'(t) & a_2(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t)) \end{pmatrix} \neq 0 \quad t \in I \subset \mathbb{R}. \quad (6.84)$$

Dann existiert eine Umgebung der Anfangskurve $t \mapsto \vartheta(t) \in \mathbb{R}^3$ und in dieser Umgebung **genau eine Lösung** $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zur quasilinearen PDE mit

$$u(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)) = \vartheta_3(t) \quad \text{Anfangsbedingung.} \quad (6.85)$$

Beweis. Wir konstruieren die Lösung lokal mit Hilfe der Charakteristiken. Für ein fixiertes $t \in I \subset \mathbb{R}$ betrachten wir das zugehörige charakteristische System

$$\begin{pmatrix} \gamma_1'(s) \\ \gamma_2'(s) \\ \gamma_3'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \\ a_2(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \\ a_3(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \end{pmatrix} \quad (6.86)$$

mit der Anfangsbedingung $\gamma(0) = \vartheta(t)$. Wegen der Glattheit der Koeffizientenfunktionen a_i hat dieses Problem lokal eine eindeutige, glatte Lösung (Satz v. Picard-Lindelöf), die auch glatt von den Daten abhängt. Für variables t ergibt sich die einparametrische Lösungsschar

$$\gamma = \gamma(s; \vartheta(t)) =: \begin{pmatrix} X(s, t) \\ Y(s, t) \\ U(s, t) \end{pmatrix} \quad (6.87)$$

Die Funktionen X, Y, U sind glatt in s und t . Außerdem, wegen der Anfangsbedingung,

$$\begin{pmatrix} X(0, t) \\ Y(0, t) \\ U(0, t) \end{pmatrix} = \gamma(0; \vartheta(t)) = \vartheta(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R}. \quad (6.88)$$

Wir zeigen als erstes, daß die Abbildung $(s, t) \mapsto (X(s, t), Y(s, t))$ in einer Umgebung der Anfangskurve (also in der Nähe von $s = 0$ lokal invertierbar ist. Dazu betrachten wir die Jacobi-Determinante

$$J_{(X, Y)} = \det \frac{\partial(X, Y)}{\partial(s, t)} = \det \begin{pmatrix} X_s(s, t) & X_t(s, t) \\ Y_s(s, t) & Y_t(s, t) \end{pmatrix} = X_s(s, t) Y_t(s, t) - X_t(s, t) Y_s(s, t) \quad (6.89)$$

Mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} X_s(s, t) &= \frac{d}{ds} X(s, t) = \frac{d}{ds} \gamma_1(s; \vartheta(t)) = \gamma_1'(s; \vartheta(t)) = a_1(\gamma_1(s; \vartheta(t)), \gamma_2(s; \vartheta(t)), \gamma_3(s; \vartheta(t))) \\ X_s(0, t) &= a_1(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t)) \\ X_t(0, t) &= \frac{d}{dt} X(0, t) = \frac{d}{dt} \vartheta_1(t) = \vartheta_1'(t) \\ Y_t(0, t) &= \frac{d}{dt} Y(0, t) = \frac{d}{dt} \vartheta_2(t) = \vartheta_2'(t) \\ Y_s(s, t) &= \frac{d}{ds} Y(s, t) = \frac{d}{ds} \gamma_2(s; \vartheta(t)) = \gamma_2'(s; \vartheta(t)) = a_2(\gamma_1(s; \vartheta(t)), \gamma_2(s; \vartheta(t)), \gamma_3(s; \vartheta(t))) \\ Y_s(0, t) &= a_2(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t)) \end{aligned} \quad (6.90)$$

folgt

$$J_{(X, Y)}|_{s=0} = a_1(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t)) \vartheta_2'(t) - \vartheta_1'(t) a_2(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t)) \neq 0 \quad (6.91)$$

wegen der Bedingung, daß ϑ_1, ϑ_2 keine Grundcharakteristik sind. Aus der Stetigkeit folgt auch $J_{(X, Y)} \neq 0$ in einer ganzen Umgebung um $s = 0$. Also kann man lokal schreiben, z. Bsp. für $t \in I \subset \mathbb{R}$ und $s \in (\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$

$$X = X(s, t), Y = Y(s, t) \Leftrightarrow s = s(X, Y), t = t(X, Y). \quad (6.92)$$

Damit können wir eindeutig eine (glatte) Funktion definieren (die Funktionen U, s, t sind ja glatt)

$$\Phi : V \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \quad \Phi(x, y) = U(s(x, y), t(x, y)). \quad (6.93)$$

Wir behaupten, daß diese Funktion Φ die PDE und die Anfangsbedingung erfüllt.

Nebenrechnung: Da X, Y und (s, t) lokal zueinander invers sind, können wir schreiben

$$s(X(s, t), Y(s, t)) = st(X(s, t), Y(s, t)) = t. \quad (6.94)$$

Differenzieren nach s und t der beiden Gleichungen ergibt die Relationen

$$\begin{aligned} s_X(X, Y) X_s(s, t) + s_Y(X, Y) Y_s(s, t) &= 1, \\ s_X(X, Y) X_t(s, t) + s_Y(X, Y) Y_t(s, t) &= 0, \\ t_X(X, Y) X_s(s, t) + t_Y(X, Y) Y_s(s, t) &= 0, \\ t_X(X, Y) X_t(s, t) + t_Y(X, Y) Y_t(s, t) &= 1. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Die Funktion Φ erfüllt die Anfangsbedingung, d.h. für $t \in I$ gilt $\vartheta_3(t) = \Phi(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))$ weil nach Definition $\vartheta_3(t) = U(0, t) = \Phi(X(0, t), Y(0, t)) = \Phi(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))$ ist. Nun überprüfen wir die Differentialgleichung: es muß gelten

$$\begin{aligned} a_1(X, Y, \Phi(X, Y)) \Phi_X(X, Y) + a_2(X, Y, \Phi(X, Y)) \Phi_Y(X, Y) &= a_2(X, Y, \Phi(X, Y)) \Leftrightarrow \\ a_1(X(s, t), Y(s, t), \Phi(X(s, t), Y(s, t))) \Phi_X(X(s, t), Y(s, t)) & \\ + a_2(X(s, t), Y(s, t), \Phi(X(s, t), Y(s, t))) \Phi_Y(X(s, t), Y(s, t)) &= a_2(X(s, t), Y(s, t), \Phi(X(s, t), Y(s, t))) \end{aligned} \quad (6.96)$$

Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} \Phi(X, Y) &= U(s(X, Y), t(X, Y)) \Rightarrow \\ \Phi_X(X, Y) &= U_s(s, t) s_X(X, Y) + U_t(s, t) t_X(X, Y) \\ \Phi_Y(X, Y) &= U_s(s, t) s_Y(X, Y) + U_t(s, t) t_Y(X, Y). \end{aligned} \quad (6.97)$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
& a_1(X(s, t), Y(s, t), U(s, t)) [U_s(s, t) s_X(X, Y) + U_t(s, t) t_X(X, Y)] \\
& + a_2(X(s, t), Y(s, t), U(s, t)) [U_s(s, t) s_Y(X, Y) + U_t(s, t) t_Y(X, Y)] \\
& \text{weil } a_1(X(s, t), Y(s, t), U(s, t)) = a_1(\gamma(s; \vartheta(t)) = \gamma'_1(s; \vartheta) = X_s(s, t) \\
& = X_s(s, t) [U_s(s, t) s_X(X, Y) + U_t(s, t) t_X(X, Y)] + Y_s(s, t) [U_s(s, t) s_Y(X, Y) + U_t(s, t) t_Y(X, Y)] \\
& = U_s [X_s s_X + Y_s s_Y] + U_t [X_s t_X + Y_s t_Y] \\
& \text{benutze die Relationen (6.95)} \\
& = U_s \cdot 1 + U_t \cdot 0 \\
& = \frac{d}{ds} U(s, t) = \frac{d}{ds} [\gamma_3(s; \vartheta(t))] = \vartheta'_3(s; \vartheta(t)) = a_3(\gamma(s; \vartheta(t)) \\
& = a_3(X(s, t), Y(s, t), U(s, t)) = a_3(X, Y, \Phi(X, Y))
\end{aligned} \tag{6.98}$$

was die Erfüllung der PDE zeigt.

Die Lösung ist auch eindeutig. Denn seien Φ und Ψ zwei Lösungen der PDE zur selben Anfangskurve. Zu jeder Integralfläche korrespondieren Lösungen des charakteristischen Systems, denn wenn man löst

$$\begin{pmatrix} \bar{\gamma}'_1(s) \\ \bar{\gamma}'_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(\bar{\gamma}_1(s), \bar{\gamma}_2(s), \Psi(\bar{\gamma}_1(s), \bar{\gamma}_2(s))) \\ a_2(\bar{\gamma}_1(s), \bar{\gamma}_2(s), \Psi(\bar{\gamma}_1(s), \bar{\gamma}_2(s))) \end{pmatrix}, \tag{6.99}$$

dann erfüllt $\bar{\gamma}_1(s), \bar{\gamma}_2(s), \bar{\gamma}_3(s)$ mit

$$\bar{\gamma}_3(s) := \Psi(\bar{\gamma}_1(s), \bar{\gamma}_2(s)) \tag{6.100}$$

das charakteristische System. Für die Lösung zur Anfangskurve ϑ schreiben wir also

$$\begin{pmatrix} \bar{\gamma}_1(s; \vartheta(t)) \\ \bar{\gamma}_2(s; \vartheta(t)) \\ \bar{\gamma}_3(s; \vartheta(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X}(s, t) \\ \bar{Y}(s, t) \\ \bar{U}(s, t) \end{pmatrix}. \tag{6.101}$$

Da die Anfangskurve für Ψ mit der von Φ übereinstimmt und die Lösungen des charakteristischen Systems eindeutig sind, folgt aber, daß

$$\begin{pmatrix} \bar{X}(s, t) \\ \bar{Y}(s, t) \\ \bar{U}(s, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(s, t) \\ Y(s, t) \\ U(s, t) \end{pmatrix}. \tag{6.102}$$

Also

$$\Psi(X, Y) = \Psi(X(s, t), Y(s, t)) =: \bar{U}(s, t) = U(s, t) = \Phi(X(s, t), Y(s, t)) = \Phi(X, Y). \tag{6.103}$$

Das ist die Behauptung. ■

Bemerkung 6.15

Die eindeutige Lösung existiert i.A. nicht global, sondern nur in einer lokalen Umgebung der Anfangskurve. Selbst wenn die Auflösung nach X, Y in allen Punkten lokal geht, braucht es nicht global eindeutig umkehrbar zu sein.

6.5 Die allgemeine nichtlineare PDE 1. Ordnung

Wir studieren nun die Lösungstheorie zur allgemeinen nichtlinearen PDE 1. Ordnung

$$\begin{aligned}
F(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n), \nabla u(x_1, \dots, x_n)) &= 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\
u((x_1, \dots, x_n)) &= g(x_1, \dots, x_n) \quad \text{auf } x \in \Gamma \subset \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{6.104}$$

Die bisherige leitende Idee war, die Lösung entlang von Kurven zu bestimmen, die vom Rand in das Innere laufen (die charakteristischen Kurven). Wie soll man nun im allgemeinen Fall die Kurve $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ wählen, damit man $u(\gamma(s))$ bestimmen kann? Wir definieren

$$\begin{aligned}
\gamma(s) &\in \mathbb{R}^n, \\
z(s) &:= u(\gamma(s)) \in \mathbb{R}, \\
p(s) &:= \nabla u(\gamma(s)) \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Differentiation von p nach s ergibt

$$p'_i(s) = \sum_{j=1}^n u_{x_i x_j}(\gamma(s)) \gamma'_j(s). \quad (6.105)$$

Partielle Differentiation nach x_i der PDE liefert

$$\begin{aligned} D_{x_i} F(x, u, \nabla u) 1 + D_z F(x, u, \nabla u) u_{x_i} + \sum_{j=1}^n D_{p_j} F(x, u, \nabla u) u_{x_i x_j} &= 0, i = 1 \dots n \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n D_{p_j} F(x, u, \nabla u) u_{x_i x_j} &= -D_{x_i} F(x, u, \nabla u) 1 - D_z F(x, u, \nabla u) u_{x_i}. \end{aligned} \quad (6.106)$$

Nehmen wir weiter an, daß

$$\gamma'_j(s) = D_{p_j} F(\gamma(s), z(s), p(s)) \quad (6.107)$$

gilt, dann folgt entlang $\gamma(s)$ unter Einsetzen von (6.106) in (6.105), daß

$$\begin{aligned} p'_i(s) &= \sum_{j=1}^n u_{x_i x_j}(\gamma(s)) D_{p_j} F(\gamma(s), z(s), p(s)) \\ &= -D_{x_i} F(\gamma(s), u(\gamma(s)), \nabla u(\gamma(s))) 1 - D_z F(\gamma(s), u(\gamma(s)), \nabla u(\gamma(s))) u_{x_i}(\gamma(s)) \\ &= -D_{x_i} F(\gamma(s), z(s), p(s)) - D_z F(\gamma(s), z(s), p(s)) p_i(s). \end{aligned} \quad (6.108)$$

Zu letzt liefert differenzieren von $z(s) = u(\gamma(s))$ die Beziehung

$$z'(s) = \langle \nabla u(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle = \langle p(s), D_p F(\gamma(s), z(s), p(s)) \rangle, \quad (6.109)$$

wobei wir die Annahme über γ' benutzt haben.

Definition 6.16

Das charakteristische System der allgemeinen PDE 1. Ordnung (6.104) lautet für das $2n + 1$ -Tupel γ, z, p

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= D_p F(\gamma(s), z(s), p(s)) \in \mathbb{R}^n, \\ z'(s) &= \langle D_p F(\gamma(s), z(s), p(s)), p(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}, \\ p'(s) &= -D_x F(\gamma(s), z(s), p(s)) - D_z F(\gamma(s), z(s), p(s)) p(s) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (6.110)$$

Theorem 6.17

Sei $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ eine Lösung von (6.104). Definiere $z(s) := u(\gamma(s))$, $p(s) := \nabla u(\gamma(s))$ und $\gamma : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ löse die ersten n -Gleichungen von (6.110). Dann lösen $p(s), z(s)$ die weiteren $n + 1$ -Gleichungen von (6.110).

Beweis. Das ist zusammengefasst gerade das Ergebnis der letzten Herleitung. ■

Wir spezialisieren unsere Überlegungen im Folgenden wieder auf den Fall von 2 unabhängigen Variablen

Definition 6.18 (Streifen)

Ein 5-Tupel $t \mapsto (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t), p(t), q(t))$ heißt **Streifen**, falls die Streifenbedingung

$$\vartheta_3'(t) = p(t)\vartheta_1'(t) + q(t)\vartheta_2'(t) \quad t \in I \subset \mathbb{R} \quad (6.111)$$

identisch erfüllt ist. Die ersten drei Komponenten $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ stellen die Trägerkurve des Streifens dar.

Motivation: Sei $t \mapsto \vartheta(t) \in \mathbb{R}^3$ eine Kurve, die ganz auf einer Fläche $(x, y, u(x, y))$ liegt, d.h. es gilt

$$\vartheta_3(t) = u(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)). \quad (6.112)$$

Dann folgt durch differenzieren nach t , daß

$$\frac{d}{dt}\vartheta_3(t) = \vartheta_3'(t) = u_x(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))\vartheta_1'(t) + u_y(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))\vartheta_2'(t). \quad (6.113)$$

also ist $(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t), p(t), q(t))$ ein Streifen, falls $p(t) = u_x(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))$ und $q(t) = u_y(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))$ sind. Wir stellen uns vor, daß an der Trägerkurve $\vartheta \in \mathbb{R}^3$ kleine Flächenstücke angeheftet sind, die in jedem Punkt tangential zur Fläche liegen, falls man $p = u_x$ und $q = u_y$ wählt.

Trotzdem bezieht sich die Definition des Streifens nicht auf eine Fläche!

Definition 6.19 (Integralstreifen)

Ein 5-Tupel $t \mapsto (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t), p(t), q(t))$ heißt **Integralstreifen** zu $F : \mathbb{R}^5 \mapsto \mathbb{R}$, falls es ein Streifen ist und $F = 0$ entlang des Streifens gilt. Also falls

$$\begin{aligned} 0 &= F(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t), p(t), q(t)), \\ \vartheta_3'(t) &= p(t)\vartheta_1'(t) + q(t)\vartheta_2'(t) \quad t \in I \subset \mathbb{R} \end{aligned} \quad (6.114)$$

gilt.

Definition 6.20 (Charakteristisches System zu $F = 0$)

Zur nichtlinearen PDE 1. Ordnung in zwei Variablen

$$F(x, y, u, u_x(x, y), u_y(x, y)) = 0, \quad F(x, y, z, p, q) \in \mathbb{R}, \quad (6.115)$$

definieren wir für das 5-Tupel $s \mapsto (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s))$ das charakteristische System

$$\begin{aligned} \gamma_1'(s) &= F_p(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)), \\ \gamma_2'(s) &= F_q(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)), \\ \gamma_3'(s) &= p(s)F_p(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)) + q(s)F_q(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)), \quad \text{Streifen,} \\ p'(s) &= -F_x(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)) - p(s)F_z(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)), \quad (6.116) \\ q'(s) &= -F_y(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)) - q(s)F_z(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)). \end{aligned}$$

Wegen $\gamma_3'(s) = p(s)F_p(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)) + q(s)F_q(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)) = p(s)\gamma_1'(s) + q(s)\gamma_2'(s)$ bestimmt dieses System einen ausgezeichneten Streifen, den sogenannten **charakteristischen Streifen**. (Dieser Streifen sollte transversal zum Anfangsstreifen liegen, damit unsere Lösungstheorie klappen kann).

Bemerkung 6.21

Im quasilinearen Fall $0 = F(x, y, z, p, q) = a_1(x, y, z)p + a_2(x, y, z)q = a_3(x, y, z)$ erhalten wir aus der obigen Beziehung gerade

$$\begin{aligned} \gamma_1' &= a_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \\ \gamma_2' &= a_2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \\ \gamma_3' &= p(s)a_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) + q(s)a_2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = a_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) + q(s)a_2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \\ p' &= -F_x(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)) - p(s)F_z(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)), \\ q' &= -F_y(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)) - q(s)F_z(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)), \quad (6.117) \end{aligned}$$

das heißt die üblichen charakteristischen Gleichungen für γ und 2 entkoppelte Gleichungen für p und q . Hier spielen also p, q nur eine passive Rolle.

Korollar 6.22

Wenn das 5-Tupel $s \mapsto (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s))$ ein charakteristischer Streifen ist, dann gilt $\frac{d}{ds}F(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)) = 0$, also ist F konstant entlang des charakteristischen Streifens (aber es gilt nicht unbedingt $F = 0$.)

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}F &= F_x\gamma_1' + F_y\gamma_2' + F_z\gamma_3' + F_pp' + F_qq' \\ &= F_xF_p + F_yF_q + F_z(pF_p + qF_q) + F_p(-F_x - pF_z) + F_q(-F_y - qF_z) = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Theorem 6.23

Die nichtlineare PDE 1. Ordnung in zwei unabhängigen Variablen

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = 0 \quad (6.118)$$

sei gegeben. Die Anfangskurve $t \mapsto \vartheta(t) \in \mathbb{R}^3$ sei gegeben sowie die Funktionen $t \mapsto (p_0(t), q_0(t))$. Die glatte Grundanfangskurve $t \mapsto (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ sei **nicht-charakteristisch**, d.h.

$$\det \begin{pmatrix} \vartheta_1'(t) & F_p(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t), p_0(t), q_0(t)) \\ \vartheta_2'(t) & F_q(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t), p_0(t), q_0(t)) \end{pmatrix} \neq 0 \quad t \in I \subset \mathbb{R} \quad (6.119)$$

und die Funktionen $t \mapsto (p_0(t), q_0(t))$ so bestimmt, daß

$$\begin{aligned} 0 &= F(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t), p_0(t), q_0(t)) \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \\ \vartheta_3'(t) &= p_0(t)\vartheta_1'(t) + q_0(t)\vartheta_2'(t) \quad \text{Anfangs-Streifenbedingung.} \end{aligned} \quad (6.120)$$

Dann existiert eine Umgebung der Anfangskurve $t \mapsto \vartheta(t) \in \mathbb{R}^3$ und in dieser Umgebung **genau eine** Lösung $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ zu $F = 0$ mit

$$\begin{aligned} u(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)) &= \vartheta_3(t), \\ u_x(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)) &= p_0(t), \\ u_y(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)) &= q_0(t) \quad \text{Anfangsbedingung.} \end{aligned} \quad (6.121)$$

Beweis. Eine direkte Konstruktion, ähnlich dem quasilinearen Sonderfall. ■

Bemerkung 6.24

Das heißt nicht, daß $F = 0$ eine eindeutige Lösung besitzt, denn zu der eindeutig gegebenen Anfangskurve ϑ könnte es verschiedene Anfangs-Integralstreifen geben, d.h. verschiedene Ergänzungen p_0, q_0 so daß

$$\begin{aligned} 0 &= F(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t), p_0(t), q_0(t)) \quad t \in I \subset \mathbb{R} \\ \vartheta_3'(t) &= p_0(t)\vartheta_1'(t) + q_0(t)\vartheta_2'(t) \end{aligned} \quad (6.122)$$

gilt. Dieses System stellt bei gegebenem ϑ zwei Bedingungen an p_0, q_0 , welche daraus aber eventuell nicht eindeutig bestimmt sind. Sobald aber der Anfangs-Integralstreifen eindeutig festgelegt ist, gibt es nur eine Lösung.

Das Problem, durch eine vorgegebene Kurve $t \mapsto \vartheta(t) \in \mathbb{R}^3$ eine Lösung zu $F = 0$ zu bestimmen, kann nun wie folgt gelöst werden:

1. Die vorgegebene Kurve wird zu einem Integral-Streifen von $F = 0$ ergänzt, indem man die dazu noch erforderlichen Funktionen $p_0(t)$ und $q_0(t)$ aus der Integralstreifenbedingung berechnet. Eventuell gibt es dazu mehrere Lösungen, man muß sich für eine Lösung entscheiden. Man hat also das 5-Tupel $(\vartheta(t), p_0(t), q_0(t))$ vorliegen.
2. Man löst das charakteristische System (6.20) für das 5-Tupel $(\gamma(s), p(s), q(s))$ unter der Anfangsbedingung $(\gamma(0), p(0), q(0)) = (\vartheta(t), p_0(t), q_0(t))$. Weil $F = 0$ für $(\vartheta(t), p_0(t), q_0(t))$ folgt entlang $(\gamma(s), p(s), q(s))$, daß $F = 0$ erfüllt ist, als Konsequenz aus Korollar 6.22. Somit hat man eine einparametrische Schar von Charakteristiken erhalten, die eine zwei-parametrische Mannigfaltigkeit darstellen. Wir definieren

$$\gamma(s; \theta(t)) = \begin{pmatrix} X(s, t) \\ Y(s, t) \\ U(s, t) \end{pmatrix} \quad (6.123)$$

und lösen lokal nach s und t auf: $s = s(X, Y)$, $t = t(X, Y)$.

3. Die Lösung ergibt sich, wie im quasilinearen Fall, aus

$$\Phi(x, y) = U(s(x, y), t(x, y)) \quad (6.124)$$

Wir bemerken noch, daß die Funktionen $p(s), q(s)$ nur indirekt die Lösung beeinflussen, indem sie die Komponenten γ beeinflussen.

Beispiel: "Burgers-Gleichung". Zu lösen

$$u(x, y) u_x(x, y) + u_y(x, y) = 1, \quad u(t, t) = \frac{1}{2}t, \quad \in [0, 1]. \quad (6.125)$$

In der gewohnten Schreibweise:

$$\left\langle \begin{pmatrix} u \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad a(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} \eta_3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.126)$$

Die Anfangskurve ist

$$\vartheta(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ \frac{1}{2}t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]. \quad (6.127)$$

Wir überprüfen zuerst, ob die Anfangsvorgabe nicht-charakteristisch ist:

$$\det \begin{pmatrix} \vartheta'_1(t) & a_1(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t)) \\ \vartheta'_2(t) & a_2(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t)) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & \vartheta_3(t) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}t \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - \frac{1}{2}t \neq 0 \quad t \in [0, 1] \quad (6.128)$$

Das charakteristische System lautet

$$\begin{pmatrix} \gamma'_1(s) \\ \gamma'_2(s) \\ \gamma'_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_3(s) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6.129)$$

mit der Lösung

$$\begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \\ \gamma_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s^2 + C_2 s + C_3 \\ s + C_1 \\ s + C_2 \end{pmatrix}. \quad (6.130)$$

Eine spezielle Lösung, die durch die Anfangskurve geht, d.h. $\gamma(0) = \vartheta(t)$ bestimmt die Konstanten C_i :

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} C_3 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \vartheta(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ \frac{1}{2}t \end{pmatrix}. \quad (6.131)$$

Damit definiert man die einparametrische Schar von Charakteristiken

$$\gamma(s; \vartheta(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}st + t \\ s + t \\ 1 + \frac{1}{2}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(s, t) \\ Y(s, t) \\ U(s, t) \end{pmatrix}. \quad (6.132)$$

Die Relation

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}st + t \\ s + t \end{pmatrix} \quad (6.133)$$

auflösen nach (s, t) liefert:

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X-Y}{\frac{Y}{2}-1} \\ \frac{X-\frac{Y^2}{2}}{1-\frac{Y}{2}} \end{pmatrix}. \quad (6.134)$$

Die Auflösung von s, t in die Darstellung für $U(s, t)$ einsetzen, liefert die Lösung

$$\Phi(x, y) = U(s(x, y), t(x, y)) = s(x, y) + \frac{1}{2}t(x, y) = \frac{2(x-y) - (x - \frac{y^2}{2})}{y-2}. \quad (6.135)$$

Die Lösung wird für $y \rightarrow 2$ singularär. Das entspricht dem Wert $\vartheta_2(t) = 2, t = 2$. Für $t = 2$ ist die nicht-charakteristische Bedingung verletzt.

7 Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

7.1 Typeinteilung

Die allgemeine PDE zweiter Ordnung für eine gesuchte glatte Funktion $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ stellt eine Relation der Art

$$F(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n), \nabla u(x_1, \dots, x_n), D^2 u(x_1, \dots, x_n)) = 0 \quad (7.1)$$

dar, wobei F als stetige Funktion der $2n+1 + \frac{1}{2}n(n+1)$ angenommen wird. $D^2 u$ bezeichne hier die $\frac{1}{2}n(n+1)$ -unabhängigen Einträge in der symmetrischen Matrix der zweiten Ableitungen von u . Für den Fall von zwei unabhängigen Veränderlichen beachten wir folgende Klassifizierung:

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{21}(x, y)u_{yx} + a_{22}(x, y)u_{yy} + \langle b(x, y), \nabla u(x, y) \rangle + c(x, y)u(x, y) + f(x, y) = 0 \quad \text{linear} \quad (7.2)$$

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{21}(x, y)u_{yx} + a_{22}(x, y)u_{yy} + f(x, y, u(x, y), \nabla u(x, y)) = 0 \quad \text{semilinear} \quad (7.3)$$

$$a_{11}(x, y, u, \nabla u)u_{xx} + a_{12}(x, y, u, \nabla u)u_{xy} + a_{21}(x, y, u, \nabla u)u_{yx} + a_{22}(x, y, u, \nabla u)u_{yy} + f(x, y, u(x, y), \nabla u(x, y)) = 0 \quad \text{quasilinear} \quad (7.4)$$

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \quad \text{nichtlinear.} \quad (7.5)$$

Da für $u \in C^2$ gilt $u_{xy} = u_{yx}$, können wir die Koeffizienten a_{12} und a_{21} als gleich annehmen. Die quasilineare PDE zweiter Ordnung sind dann so aus:

$$a_{11}(x, y, u, \nabla u)u_{xx} + 2a_{12}(x, y, u, \nabla u)u_{xy} + a_{22}(x, y, u, \nabla u)u_{yy} + f(x, y, u(x, y), \nabla u(x, y)) = 0. \quad (7.6)$$

Die symmetrische Koeffizienten-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(x, y, u, \nabla u) & a_{12}(x, y, u, \nabla u) \\ a_{12}(x, y, u, \nabla u) & a_{22}(x, y, u, \nabla u) \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

kann reell orthonormal diagonalisiert werden (Hauptachsentransformation), d.h. es gibt eine orthonormale Matrix Q , so daß

$$A = Q^T \text{Diag} Q, \quad \text{Diag} = \begin{pmatrix} \lambda_1(x, y, u, \nabla u) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x, y, u, \nabla u) \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Mit Hilfe dieser Transformation kann die quasilineare PDE punkt- und lösungsweise (im Moment noch formal) klassifiziert werden. Sie heißt im Punkt x, y und der Lösung $u(x, y)$

1. **hyperbolisch**, falls kein Eigenwert λ_1, λ_2 Null ist und die beiden Eigenwerte verschiedenes Vorzeichen haben.
2. **parabolisch**, falls ein Eigenwert Null ist.
3. **elliptisch**, falls beide Eigenwerte echt positiv sind.

Bemerkung 7.1

Im linearen und semilinearen Fall kann die Klassifizierung unabhängig von der Lösung u vorgenommen werden, so daß man von einer elliptischen/parabolischen/hyperbolischen PDE im Gebiet Ω sprechen kann. Die Potentialgleichung $0 = \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ ist im ganzen \mathbb{R}^2 elliptisch (Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$), während die sogenannte "Tricomi-Gleichung"

$$y u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = y \quad \lambda_2 = 1 \quad (7.9)$$

für $y > 0$ elliptisch, für $y < 0$ hyperbolisch ist und für die Linie $y = 0$ parabolisch ist. Die Wellengleichung $u_{xx} - u_{yy} = 0$ ist hyperbolisch und die Wärmeleitungsgleichung $u_y - u_{xx} = 0$ ist parabolisch. Im Allgemeinen kann man sagen, daß PDE's die den Typ wechseln können, wesentlich schwieriger zu behandeln sind als solche, die ihren Typ beibehalten.

Wenn wir die Eigenwerte der Matrix A ausrechnen, ergibt sich die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0, \quad (7.10)$$

mit der Lösung

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left((a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4 \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}_D} \right), \quad (7.11)$$

so daß die quasilineare PDE zweiter Ordnung

1. **hyperbolisch** ist, falls $D < 0$ und $a_{11} a_{22} > 0$ oder $a_{12} \neq 0$ für $a_{11} a_{22} = 0$.
2. **parabolisch** ist, falls $D = 0$ und $a_{11} > 0$ oder $a_{11} = a_{12} = 0$, aber $a_{22} \neq 0$.
3. **elliptisch** ist, falls $D > 0$ (zwei positive EW's).

7.2 Charakteristische Kurven für PDE zweiter Ordnung

Die vorhergehende Klassifikation war erst einmal rein formal. Es ist nicht klar, daß damit auch qualitative Eigenschaften der PDE erfasst werden. Um dies nun einzusehen, untersuchen wir die lineare PDE

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (7.12)$$

Wir betrachten nun eine Kurve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \mapsto \Omega \subset \mathbb{R}^2$ und geben entlang dieser Kurve die Werte der Lösung u und ihrer beiden ersten partiellen Ableitungen vor, d.h. wir kennen

$$u(\gamma(t)), \quad u_x(\gamma(t)), \quad u_y(\gamma(t)). \quad (7.13)$$

Wir fragen uns: wie muß die Kurve γ aussehen, so daß mit dieser Vorgabe der Lösung u entlang γ die Lösung der PDE in einem Streifen lokal um γ schon eindeutig bestimmt ist? Eine solche Kurve γ nennen wir **nicht-charakteristisch**.

Um diese Frage zu beantworten, differenzieren wir entlang γ nach t , das ergibt z.Bsp

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_x(\gamma(t)) &= u_{xx}(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + u_{xy}(\gamma(t)) \gamma_2'(t), \\ \frac{d}{dt} u_y(\gamma(t)) &= u_{yx}(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + u_{yy}(\gamma(t)) \gamma_2'(t). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Gleichzeitig gilt aber auch die PDE entlang der Kurve γ , also können wir zusammenfassend schreiben

$$\begin{pmatrix} a(\gamma(t)) & 2b(\gamma(t)) & c(\gamma(t)) \\ \gamma_1'(t) & \gamma_2'(t) & 0 \\ 0 & \gamma_1'(t) & \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{xx}(\gamma(t)) \\ u_{yx}(\gamma(t)) \\ u_{yy}(\gamma(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\gamma(t)) \\ \frac{d}{dt} u_x(\gamma(t)) \\ \frac{d}{dt} u_y(\gamma(t)) \end{pmatrix}. \quad (7.15)$$

Falls die höchsten partiellen Ableitungen (hier die zweiten) aus diesem System nicht eindeutig bestimmbar sind (unter der Annahme daß es Lösungen der PDE gibt), muß die Matrix

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} a(\gamma(t)) & 2b(\gamma(t)) & c(\gamma(t)) \\ \gamma_1'(t) & \gamma_2'(t) & 0 \\ 0 & \gamma_1'(t) & \gamma_2'(t) \end{pmatrix}, \quad \det B(\gamma(t)) = \det \begin{pmatrix} a(\gamma(t)) & 2b(\gamma(t)) & c(\gamma(t)) \\ \gamma_1'(t) & \gamma_2'(t) & 0 \\ 0 & \gamma_1'(t) & \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \\ &= a(\gamma(t)) (\gamma_2'(t))^2 - 2b(\gamma(t)) \gamma_1'(t) \gamma_2'(t) + c(\gamma(t)) (\gamma_1'(t))^2 \end{aligned} \quad (7.16)$$

verschwindende Determinante haben. Das ist eine Bedingung an die Kurve γ . Wir nennen Kurven γ mit $\det B(\gamma(t)) = 0$ **charakteristische Grundkurven**. Falls $\gamma_1' \neq 0$ läßt sich die Bedingung schreiben als

$$\begin{aligned} \det B(\gamma(t)) = 0 &\Leftrightarrow a(\gamma(t)) \left(\frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_1'(t)} \right)^2 - 2b(\gamma(t)) \left(\frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_1'(t)} \right) + c(\gamma(t)) = 0, \\ \left(\frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_1'(t)} \right)_{1,2} &= \frac{1}{a(\gamma(t))} \left(b(\gamma(t)) \pm \sqrt{\underbrace{b(\gamma(t))^2 - a(\gamma(t))c(\gamma(t))}_{-D(t)}} \right), \end{aligned} \quad (7.17)$$

für $a(\gamma(t)) > 0$. Es gibt

1. zwei charakteristische Richtungen, falls $D(t) < 0$ und $a(t)c(t) > 0$ oder $b(t) \neq 0$ für $a(t)c(t) = 0$.
2. eine charakteristische Richtung, falls $D(t) = 0$ und $a(t) > 0$ oder $a(t) = b(t) = 0$, aber $c(t) \neq 0$.
3. keine charakteristische Richtungen, falls $D(t) > 0$

und wir sehen, daß die Klassifikation über Charakteristiken mit derjenigen über Eigenwerte zusammenfällt. Es ist die quasilineare PDE zweiter Ordnung

1. **hyperbolisch**, falls es zwei charakteristische Richtungen gibt.
2. **parabolisch**, falls es eine charakteristische Richtung gibt.
3. **elliptisch**, falls es keine charakteristische Richtungen gibt.

7.3 Transformation auf Normalform

Wir betrachten wieder die Gleichung

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f. \quad (7.18)$$

Auf ein anderes Koordinatensystem transformiert (wie gehabt: schreibe $(u(x, y) = v(\xi(x, y), \eta(x, y)))$) ergeben sich die Umrechnungen

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \eta_x + v_\eta \eta_x \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + v_{\eta\eta} \eta_x^2 + v_\xi \xi_{xx} + v_\eta \eta_{xx} \\ u_{xy} &= v_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + v_{\xi\eta} (\eta_x \xi_y + \xi_x \eta_y) + v_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + v_\xi \xi_{xy} + v_\eta \eta_{xy} \\ u_{yy} &= v_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + v_{\eta\eta} \eta_y^2 + v_\xi \xi_{yy} + v_\eta \eta_{yy}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

wobei wir den Satz von Schwarz benutzt haben. Damit schreibt sich die PDE (7.18) nach einsetzen der Terme für die Ableitungen in der Form

$$\alpha v_{\xi\xi} + 2\beta v_{\xi\eta} + \gamma v_{\eta\eta} = \Phi^*(\xi, \eta, v, \mathbf{v}_\xi, \mathbf{v}_\eta, \xi_x, \xi_y, \xi_{xx}, \xi_{xy}, \xi_{yy}, \eta_x, \eta_y, \eta_{xx}, \eta_{xy}, \eta_{yy}), \quad (7.20)$$

wobei Φ^* alle bekannten Terme niedrigerer Ableitungsordnung in v beinhaltet sowie die rechte Seite f . Die Funktionen α, β, γ sind

$$\begin{aligned} \alpha(\xi, \eta) &= a \xi_x^2 + 2b \xi_x \xi_y + c \xi_y^2 \\ \beta &= a(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \xi_x \eta_x + b(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + c \xi_y \eta_y \\ \gamma &= a \eta_x^2 + 2b \eta_x \eta_y + c \eta_y^2, \end{aligned} \quad (7.21)$$

wobei $a = a(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), b = b(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), c = c(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ zu lesen ist. Aus der ursprünglich linearen PDE (7.18) ist somit eine semilineare PDE in den neuen Variablen ξ, η geworden. Wir halten fest, daß die Klassifizierung in lineare/nichtlineare PDE's nicht koordinatenunabhängig ist!

Wir klassifizieren jetzt den transformierten Hauptteil. Dazu rechnen wir

$$\alpha\gamma - \beta^2 = \dots = (ac - b^2) (\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x)^2 = (ac - b^2) \det^2 \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}. \quad (7.22)$$

Falls die Koordinatentransformation zulässig ist, gilt $\det \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \neq 0$, also stimmt die Klassifikation bzgl. $ac - b^2$ mit der Klassifikation bzgl. $\alpha\gamma - \beta^2$ überein.

Man kann nun versuchen, die Koordinatentransformation (ξ, η) so geschickt zu wählen, daß die neuen Koeffizienten (7.21) eine möglichst einfache Form haben, z.Bsp. so daß $\alpha = 0$ wird. Dies führt auf eine nichtlineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung für $\xi = \xi(x, y)$:

$$0 = a(x, y) \xi_x^2 + 2b(x, y) \xi_x \xi_y + c(x, y) \xi_y^2, \quad (7.23)$$

die, in Abhängigkeit von a, b, c Lösungen besitzt oder nicht. Es gilt für die verschiedenen Fälle:

1. hyperbolisch: ist die PDE (7.18) im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ hyperbolisch, so gibt es eine Koordinatentransformation welche die PDE in den neuen Koordinaten überführt auf die Gestalt

$$0 = v_{\eta\xi} + \Phi^*(\xi, \eta, v, \mathbf{v}_\xi, \mathbf{v}_\eta, \xi_x, \xi_y, \xi_{xx}, \xi_{xy}, \xi_{yy}, \eta_x, \eta_y, \eta_{xx}, \eta_{xy}, \eta_{yy}) \quad (7.24)$$

oder

$$0 = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \Phi^*(\xi, \eta, v, \mathbf{v}_\xi, \mathbf{v}_\eta, \xi_x, \xi_y, \xi_{xx}, \xi_{xy}, \xi_{yy}, \eta_x, \eta_y, \eta_{xx}, \eta_{xy}, \eta_{yy}). \quad (7.25)$$

2. elliptisch: ist die PDE (7.18) im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ elliptisch, so gibt es eine Koordinatentransformation welche die PDE in den neuen Koordinaten überführt auf die Gestalt

$$0 = v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \Phi^*(\xi, \eta, v, \mathbf{v}_\xi, \mathbf{v}_\eta, \xi_x, \xi_y, \xi_{xx}, \xi_{xy}, \xi_{yy}, \eta_x, \eta_y, \eta_{xx}, \eta_{xy}, \eta_{yy}). \quad (7.26)$$

3. parabolisch: ist die PDE (7.18) im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ parabolisch, so gibt es eine Koordinatentransformation welche die PDE in den neuen Koordinaten überführt auf die Gestalt

$$0 = v_{\xi\xi} + \Phi^*(\xi, \eta, v, \mathbf{v}_\xi, \mathbf{v}_\eta, \xi_x, \xi_y, \xi_{xx}, \xi_{xy}, \xi_{yy}, \eta_x, \eta_y, \eta_{xx}, \eta_{xy}, \eta_{yy}). \quad (7.27)$$

Also können wir die Prototypen

1. hyperbolisch: $u_{yy} = u_{xx} + f(\dots)$ Wellengleichung
2. elliptisch: $u_{xx} + u_{yy} = f(\dots)$ Poissongleichung
3. parabolisch: $u_y - u_{xx} = f(\dots)$ Wärmeleitungsgleichung

unterscheiden.

7.4 Die Poissongleichung

Unser Ziel ist es jetzt, die Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{Laplace-Gleichung} \\ \Delta u &= f(x) && \text{Poisson-Gleichung} \end{aligned} \quad (7.28)$$

für $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ auf dem \mathbb{R}^n zu lösen (d.h. keine Randbedingungen). In den Anwendungen tritt die Poisson-Gleichung an prominenter Stelle auf.

7.4.1 Motivation

Betrachten wir ein Gebiet des \mathbb{R}^n . In diesem Gebiet sei eine Flußfunktion (ein Vektorfeld) $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ definiert. Dieser Fluß beschreibe das Richtungsfeld einer sich ändernden skalaren Variable u (Dichte, chemische Konzentration, elektrisches Potential, Temperatur etc.). Betrachten wir nun ein beliebiges Testvolumen $V \subset \mathbb{R}^n$ im Gebiet, dann gilt nach dem Satz von Gauß

$$\int_{\partial V} \langle F(x), \vec{n} \rangle dS = \int_V \text{Div } F \, dV \quad (7.29)$$

Der Term $\int_{\partial V} \langle F(x), \vec{n} \rangle dS$ misst, was über den Rand von V hinaus und hinein strömt. Falls im Gebiet V keine Produktion von chem. Konzentration/Ladung, Dichte, Wärme auftritt, so strömt genausoviel hinein wie heraus, also

$$0 = \int_{\partial V} \langle F(x), \vec{n} \rangle dS. \quad (7.30)$$

In den einfachsten Fällen kann man den Fluß F in der Form

$$F(x) = -a \nabla u(x) \quad (7.31)$$

annehmen; das bedeutet, daß sich die "Träger" der Eigenschaft Dichte/Temperatur etc. von Regionen mit hoher Dichte/hoher Temperatur weg bewegen (wollen). (Stichwort: der Gradient steht senkrecht auf den Höhenlinien und $-\nabla u$ zeigt in die Richtung des (lokal) steilsten Abstiegs). Setzen wir diese konstitutive (physikalische) Annahme ein, so erhalten wir

$$0 = \int_{\partial V} \langle F(x), \vec{n} \rangle dS = \int_V \operatorname{Div} F dV = \int_V \operatorname{Div} -\nabla u(x) dV = - \int_V \Delta u(x). \quad (7.32)$$

Da das Testvolumen beliebig ist (insbesondere beliebig klein), können wir unter der Annahme, daß Δu glatt ist, lokalisieren, d.h. schließen, daß

$$0 = \int_{\partial V} \langle F(x), \vec{n} \rangle dS = \int_V \operatorname{Div} F dV = \int_V \operatorname{Div} -\nabla u(x) dV = - \int_V \Delta u(x) \Rightarrow \Delta u = 0. \quad (7.33)$$

Für den Fall daß

1. u die Temperatur ist, ist (7.31) das Fouriersche Wärmeleitungsgesetz.
2. u die chemische Konzentration ist, ist (7.31) das Ficksche Gesetz der Diffusion.
3. u das elektrische Potential ist, ist (7.31) das Ohmsche Gesetz.

7.4.2 Herleitung der Fundamentallösung

Bemerkung 7.2

Der Laplace-Operator ist invariant unter der Koordinatentransformation $x \mapsto R \cdot x$ wobei $R \in \operatorname{SO}(3, \mathbb{R})$ eine eigentliche Drehung ist. Das heißt, daß $\Delta u(x) = 0$ impliziert daß auch $\Delta [u(R \cdot x)] = 0$.

Es liegt deshalb Nahe, zuerst Lösungen zu $\Delta u = 0$ zu suchen, die invariant unter Drehungen sind. Solcherart sind z. Bsp. Funktionen $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ die die radiale Darstellung haben

$$u(x_1, \dots, x_n) = v(\|\vec{x}\|) = v(r), \quad r = \|\vec{x}\| \quad (7.34)$$

mit einer eindimensionalen Funktion $v : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, definiert auf der Länge des Vektors \vec{x} . Für dieses u gilt

$$u(R \cdot x) = v(\|R \cdot \vec{x}\|) = v(\|\vec{x}\|) = u(x). \quad (7.35)$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= v'(\|x\|) \cdot \frac{x_i}{\|x\|}, \\ u_{x_i x_i} &= v''(\|x\|) \cdot \frac{x_i^2}{\|x\|^2} + v'(\|x\|) \cdot \left[\frac{1}{\|x\|} - \frac{x_i^2}{\|x\|^3} \right], \\ u_{x_i} &= v'(r) \frac{x_i}{r} \\ u_{x_i x_i} &= v''(r) \cdot \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \cdot \left[\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right], \\ \Delta u &= \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = v''(\|x\|) \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\|x\|^2} + v'(r) \frac{n}{\|x\|} - v'(r) \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\|x\|^3} = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) \quad (7.36) \end{aligned}$$

Also haben wir zu lösen:

$$\begin{aligned} v''(r) &= -\frac{n-1}{r} v'(r) \\ \frac{v''(r)}{v'(r)} &= -\frac{n-1}{r}, \quad \text{setze } u(s) := v'(s) \\ \frac{u'(r)}{u(r)} &= -\frac{n-1}{r} \\ \ln |u(s)| &= (1-n) \ln s + C_1 \Rightarrow |u(s)| = C_2 s^{1-n} \\ v(s) &= \int^s C_2 s^{1-n} ds \Rightarrow v(r) = \begin{cases} b \ln r + C & n = 2 \\ \frac{b}{r^{n-2}} + C & n \geq 3. \end{cases} \quad (7.37) \end{aligned}$$

Definition 7.3 (Fundamentallösung)

Die Funktion

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln \|x\| & n = 2 \\ \frac{1}{n\alpha(n)\|x\|^{n-2}} & n \geq 3. \end{cases} \quad (7.38)$$

heißt die Fundamentallösung zu $\Delta u = 0$, wobei $\alpha(n)$ das Volumen der Einheitskugel im \mathbb{R}^n ist,

$$\alpha(n) = \int_{\|x\|=1} 1 \, dV. \quad (7.39)$$

Es gelten die einfachen Abschätzungen

$$\|D\phi(x)\| \leq \frac{C}{\|x\|^{n-1}}, \quad \|D^2\phi(x)\| \leq \frac{C}{\|x\|^n}, \quad x \neq 0, \quad (7.40)$$

für beide Fälle $n = 2$ und $n \geq 3$ (nachrechnen!) mit einer positiven Konstante $C > 0$.

Nach Konstruktion ist $x \mapsto \Phi(x)$ harmonisch für $x \neq 0$. Genauso ist $x \mapsto \Phi(x - y)$ harmonisch solange $x \neq y$ für ein festes $y \in \mathbb{R}^n$. Desweiteren ist $x \mapsto \Phi(x - y) f(y)$ harmonisch für $x \neq y$. Genauso ist die Summe von endlich vielen solcher Ausdrücke wieder harmonisch, i.e.

$$\Delta \sum_{i=1}^n \Phi(x - y_i) f(y_i) = 0 \quad y_i \neq x. \quad (7.41)$$

Man könnte nun versucht sein, von der endlichen Summe auf ein Faltungsintegral überzugehen:

$$u(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi(x - y) f(y) \, dV = 0, \quad (7.42)$$

und zu meinen, daß u harmonisch ist. Das ist aber nicht der Fall, weil Φ ja für $x = y$ nicht integrierbar ist.

Sei im folgenden $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, d.h. f ist zweifach stetig differenzierbar und verschwindet außerhalb einer begrenzten Teilmenge. Dann gilt

Satz 7.4

Sei $u(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi(x - y) f(y) \, dV$. Dann ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und u löst die Gleichung

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (7.43)$$

Beweis. Es ist

$$u(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi(x - y) f(y) \, dy = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} \Phi(\xi) f(x - \xi) \, d\xi = \int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x - y) \, dy, \quad (7.44)$$

wobei man die Substitution $\xi = x - y$ verwendet und nutzt das $|\det J_\xi| = 1$ ist. Wir schreiben

$$\frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} = \int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi(y) \left[\frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} \right] \, dy. \quad (7.45)$$

Dann geht die eckige Klammer für $h \rightarrow 0$ gegen $f_{x_i}(x - y)$, gleichmäßig. Daher gilt

$$u_{x_i}(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi(y) f_{x_i}(x - y) \, dy. \quad (7.46)$$

Genauso verfahren wir mit den zweiten partiellen Ableitungen von u , also ist $u \in C^2$.

Da Φ in der Nähe der 0 unbeschränkt ist, müssen wir in den folgenden Rechnungen die Singularität isolieren, indem wir einen Ball mit Radius $\varepsilon > 0$ gesondert betrachten:

$$\begin{aligned} \Delta_x u(x) &= \Delta_x \int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi(x - y) f(y) \, dV = \Delta_x \int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x - y) \, dV \\ &= \int_{B(0, \varepsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x - y) \, dV + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x - y) \, dV = I_\varepsilon + J_\varepsilon. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Für I_ε ergibt sich die Abschätzung

$$|I_\varepsilon| \leq C \|D^2 f\|_\infty \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| \, dV, \quad (7.48)$$

und

$$\int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| \, dV, \quad (7.49)$$

kann mithilfe expliziter Rechnung und Transformation auf Polarkoordinaten ausgerechnet werden. Daher

$$|I_\varepsilon| \leq C \|D^2 f\|_\infty \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| \, dV, \leq \begin{cases} C\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| & (n=2) \\ C\varepsilon^2 & (n \geq 3) \end{cases} \quad (7.50)$$

und wir notieren schon, daß $I_\varepsilon \rightarrow$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Für $n=2$ schreibe $\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| = \frac{\ln \varepsilon}{1/\varepsilon^2}$ und wende de L'Hospital an. Wenden wir uns J_ε zu. Dazu erinnern wir an die Produktregel und den Satz v. Gauß in der Form

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}(v\phi) &= \langle v, \nabla \phi \rangle + \Phi \operatorname{Div} v, \quad v: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \phi: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, \\ \int_{\Omega} \operatorname{Div}(v\phi) \, dV &= \int_{\Omega} \langle v, \nabla \phi \rangle \, dV + \int_{\Omega} \Phi \operatorname{Div} v \, dV \\ \int_{\Omega} \operatorname{Div}(v\phi) \, dV &= \int_{\partial\Omega} \langle \phi v, \vec{n} \rangle \, dS, \end{aligned} \quad (7.51)$$

wobei \vec{n} der nach außen weisende Normalenvektor an den Rand des Gebietes Ω ist. Jetzt läßt sich schreiben

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) \, dV = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \Delta_y f(x-y) \, dV \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \operatorname{Div} \nabla_y f(x-y) \, dV \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \langle \nabla_y \Phi(y), \nabla_y f(x-y) \rangle \, dV + \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon))} \Phi(y) \langle \nabla_y f(x-y), \vec{n} \rangle \, dS \\ &= K_\varepsilon + L_\varepsilon. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Wie oben schließen wir, daß

$$|L_\varepsilon| \leq C \|Df\|_\infty \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| \, dS \leq \begin{cases} C\varepsilon |\ln \varepsilon| & (n=2) \\ C\varepsilon & (n \geq 3) \end{cases}, \quad (7.53)$$

und wir notieren schon, daß $L_\varepsilon \rightarrow$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Für $n=2$ schreibe $\varepsilon |\ln \varepsilon| = \frac{\ln \varepsilon}{1/\varepsilon}$ und wende de L'Hospital an.

Es bleibt K_ε zu untersuchen. Nochmalige partielle Integration liefert (Satz v. Gauß)

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \langle \nabla_y \Phi(y), \nabla_y f(x-y) \rangle \, dV \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \operatorname{Div} \nabla_y \Phi(y) f(x-y) \, dV - \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon))} f(x-y) \langle \nabla_y \Phi(y), \vec{n} \rangle \, dS \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Delta_y \Phi(y) f(x-y) \, dV - \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon))} f(x-y) \langle \nabla_y \Phi(y), \vec{n} \rangle \, dS \\ &= - \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon))} f(x-y) \langle \nabla_y \Phi(y), \vec{n} \rangle \, dS \end{aligned} \quad (7.54)$$

weil Φ harmonisch ist weg von der 0. Es ist $\nabla\Phi(y) = \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{y}{\|y\|^n}$ für $y \neq 0$ und der Normalenvektor auf der Kugel mit Radius ε ist $\vec{n} = \frac{-y}{\|y\|} = -\frac{y}{\varepsilon}$. Also gilt $\langle \nabla_y \Phi(y), \vec{n} \rangle = \langle \frac{-y}{\|y\|} \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{y}{\|y\|^n}, -\frac{y}{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}$ auf $\partial(\mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon))$. Weil $\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}$ das Maß der Oberfläche von $\partial B(0, \varepsilon) = \partial(\mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon))$ ist, folgt

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= - \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon))} f(x-y) \langle \nabla_y \Phi(y), \vec{n} \rangle dS \\ &= - \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \int_{y \in \partial(\mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon))} f(x-y) dS \\ &= - \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \int_{\xi \in \partial(\mathbb{R}^n \setminus B(x, \varepsilon))} f(\xi) dS(\xi) \rightarrow -f(x) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (7.55)$$

In der letzten Zeile haben wir die Verallgemeinerung von $\frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s) ds \rightarrow f(x)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ benutzt. Insgesamt zeigt $\varepsilon \rightarrow 0$ daß $-\Delta u = f$ gilt.

7.5 Mittelwertformeln

Sei u eine harmonische Funktion auf einer offenen Menge Ω . Wir leiten jetzt wichtige Mittelwertformeln her, welche Aussagen, daß der Wert $u(x)$ als Mittelwert von u über Kugeloberflächen $\partial B(x, r)$ zentriert in x mit Radius r oder als Mittelwert von u über Kugeln $B(x, r)$ zentriert in x mit Radius r berechnet werden kann, falls die Kugeln ganz im Gebiet liegen, in denen u harmonisch ist.

Satz 7.5 (Mittelwertformel für die Laplace-Gleichung)

Sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch, dann gilt für jede Kugel $B(x, r) \subset \Omega$

$$u(x) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{y \in \partial B(x, r)} u(y) dS = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{y \in B(x, r)} u(y) dV \quad (7.56)$$

wobei $n\alpha(n)r^{n-1}$ das Oberflächenmaß der Kugel mit Radius r ist und $\alpha(n)r^n$ das Kugelvolumen der Kugel mit Radius n ist. (N.B. $n\alpha(n)$ Oberflächenmaß der Einheitskugel im \mathbb{R}^n , $\alpha(n)$ Kugelvolumen der Einheitskugel im \mathbb{R}^n .)

Beweis. Setze

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{y \in \partial B(x, r)} u(y) dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{z \in \partial B(0, 1)} u(x+rz) \cdot r^{n-1} dS(z) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{z \in \partial B(0, 1)} u(x+rz) dS(z), \end{aligned} \quad (7.57)$$

wobei wir die Substitutionsformel bzgl. $y = x + rz$ für Oberflächenintegrale $dS(y) = r^{n-1} dS(z)$ benutzt haben. Es folgt

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{z \in \partial B(0, 1)} \langle \nabla u(x+rz), z \rangle dS(z) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{z \in \partial B(0, 1)} \langle \nabla u(x+rz), z \rangle r^{n-1} dS(z) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{y \in \partial B(x, r)} \langle \nabla u(y), \frac{y-x}{r} \rangle r^{n-1} dS(z) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{y \in \partial B(x, r)} \langle \nabla u(y), \frac{y-x}{r} \rangle dS(y) \end{aligned}$$

partielle Integration, Satz von Gauß: $\frac{y-x}{r}$ ist Einheitsnormale auf der Kugeloberfläche (7.58)

$$= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{y \in \partial B(x, r)} \langle \nabla u(y), \vec{n} \rangle dS(y)$$

$$= \frac{1}{n \alpha(n) r^{n-1}} \int_{y \in B(x,r)} \operatorname{Div}_y \nabla u(y) dV = \frac{1}{n \alpha(n) r^{n-1}} \int_{y \in B(x,r)} \Delta_y u(y) dV = 0. \quad (7.59)$$

Daher ist ϕ konstant und wir können schreiben

$$\phi(r) = \lim_{s \rightarrow 0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{n \alpha(n) s^{n-1}} \int_{y \in \partial B(x,s)} u(y) dS(y) = u(x) \quad (7.60)$$

weil u stetig ist (Mittelung über immer kleinere Oberflächen von stetigen Funktionen liefert den Funktionswert in der Grenze). Damit ist die erste Behauptung gezeigt. Für den zweiten Teil beachten wir, daß (Polarkoordinaten und "Zwiebelintegration"/Satz v. Fubini)

$$\begin{aligned} \int_{y \in B(x,r)} u(y) dV &= \int_0^r \left[\int_{y \in \partial B(x,s)} u(y) dS(y) \right] ds \\ &\text{vorheriges Resultat für } u \text{ benutzen: Oberflächenmittel} \\ &= \int_0^r n \alpha(n) s^{n-1} u(x) ds = n \alpha(n) u(x) \frac{1}{n} [s^n]_0^r = \alpha(n) r^n u(x) \end{aligned} \quad (7.61)$$

womit der Beweis beendet ist.

Satz 7.6 (Umkehrung der Mittelwertformel)

Falls $u \in C^2(\Omega)$ für jede Kugel $B(x, r) \subset \Omega$ die Gleichung

$$u(x) = \frac{1}{n \alpha(n) r^{n-1}} \int_{y \in \partial B(x,r)} u(y) dS(y) \quad (7.62)$$

erfüllt, dann ist u harmonisch.

Beweis. Wir nehmen an, es gelte $\Delta u \neq 0$ irgendwo in Ω . Dann gibt es eine ganze Kugel $B(x, r) \subset \Omega$ so daß $\Delta u > 0$ dort ist, weil $u \in C^2(\Omega)$. Die Funktion

$$\phi(r) = \frac{1}{n \alpha(n) r^{n-1}} \int_{y \in \partial B(x,r)} u(y) dS(y) \quad (7.63)$$

ist nach Voraussetzung des Satzes konstant in r , also $\phi'(r) = 0$. Es gilt aber

$$\phi'(r) = \frac{1}{n \alpha(n) r^{n-1}} \int_{y \in B(x,r)} \Delta_y u(y) dV > 0 \quad (7.64)$$

ein Widerspruch.

Es folgen nun weitere wichtige Eigenschaften harmonischer Funktionen, die wir aus den Mittelwertigenschaften folgern können.

Satz 7.7 (Starkes Maximumprinzip)

Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch in Ω .

1.

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial \Omega} u \quad \text{und} \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial \Omega} u$$

2. Falls Ω zusammenhängend ist und es einen Punkt $x_0 \in \Omega$ gibt (Ω ist offen, also x_0 im Inneren von Ω) mit

$$u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u, \quad (u(x_0) = \min_{\overline{\Omega}} u) \quad (7.65)$$

dann ist u konstant in Ω

Die min-Eigenschaften erhält man beim Übergang zu $-u$, welches ja auch harmonisch ist.

Beweis. Wir zeigen zuerst (2). Wir nehmen an es gäbe einen Punkt $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = M = \max_{\overline{\Omega}} u$. Die Mittelwertformel sagt dann aus, daß für ein $r > 0$ (x_0 liegt im Innern)

$$M = u(x_0) = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{y \in B(x_0, r)} u(y) \, dV \leq M \quad (7.66)$$

wobei Gleichheit nur gelten kann, falls $u \equiv M$ in $B(x_0, r)$. daher muß $u(y) \equiv M$ für alle $y \in B(x_0, r)$. Wir können Ω mit (sich überschneidenden) Kugeln vom Radius $r > 0$ überdecken (Ω ist zusammenhängend). u muß jetzt von Kugel zu Kugel konstant sein, also ist u konstant auf Ω .

Zu Fall (1) bemerken wir, daß das auf dem Abschluß von Ω stetige u sein Maximum auf dem Abschluß auch annimmt. Nun gibt es entweder kein x_0 mit der Eigenschaft aus Fall (2). Dann gilt Aussage (1). Falls umgekehrt solch ein x_0 existiert, dann ist u konstant in Ω und wegen der Stetigkeit auch konstant auf $\overline{\Omega}$. Also gilt Aussage (1) dann auch.

Bemerkung 7.8

Das starke Maximum-Prinzip impliziert im besonderen für zusammenhängendes Gebiet Ω und einer Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ von

$$\Delta u = 0, x \in \Omega, u = g, x \in \partial\Omega \quad (7.67)$$

mit $g \geq 0$, daß u überall positiv ist falls g irgendwo positiv ist auf dem Rand $\partial\Omega$.

Eine wichtige Anwendung des Maximumprinzips ist die Eideutigkeit für die Poisson-Gleichung zu implizieren.

Satz 7.9 (Eindeutigkeit)

Sei $g \in C(\partial\Omega)$, $f \in C(\Omega)$. Dann gibt es höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ von

$$-\Delta u = f, x \in \Omega, u = g, x \in \partial\Omega. \quad (7.68)$$

Beweis. Falls es zwei Lösungen u_1, u_2 zu der Gleichung gibt, dann erfüllt die Differenz die Gleichung

$$-\Delta u_1 - u_2 = 0, x \in \Omega, u_1 - u_2 = 0, x \in \partial\Omega, \quad (7.69)$$

auf die Differenz können wir nun max / min-Aussagen anwenden und erhalten $u_1 - u_2 = 0$.

7.6 Das Dirichletsche Prinzip

Nun zeigen wir, daß Lösungen u der Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ in Ω und $u = g$ auf $\partial\Omega$ als Minimierer eines Funktionals betrachtet werden können.

Dazu betrachten wir das Energie-Funktional

$$I(u) = \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^2 - f(x) \cdot u(x) \, dV \quad (7.70)$$

auf der Menge der zulässigen Funktionen

$$\mathcal{A} := \{w \in C^2(\overline{\Omega}) : u(x) = g(x) x \in \partial\Omega\} \quad (7.71)$$

Satz 7.10 (Dirichletsches Prinzip)

Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$-\Delta u = f, \quad x \in \Omega, u = g, x \in \partial\Omega, \quad (7.72)$$

dann gilt

$$I(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} I(w). \quad (7.73)$$

Umgekehrt gilt: falls u ein Minimum von I ist, dann löst u die Poisson-Gleichung.

Beweis. Sei $w \in \mathcal{A}$ und u erfülle die Poisson-Gleichung. Dann gilt

$$0 = \int_{\Omega} (-\Delta u - f)(u - w) \, dV. \quad (7.74)$$

Partielle Integration liefert

$$0 = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla u - w \rangle - f(u - w) \, dV \quad (7.75)$$

wobei keine Randterme auftreten da $u - w = g - g = 0$ auf $\partial\Omega$. Also ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla u \rangle - u f \, dV &= \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla w \rangle - w f \, dV \\ \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 - f u \, dV &= \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla w \rangle - w f \, dV \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla w\|^2 - w f \, dV. \end{aligned} \quad (7.76)$$

Hierbei haben wir die Ungleichung für Vektoren

$$\langle \xi, \eta \rangle \leq |\langle \xi, \eta \rangle| \leq \|\xi\| \|\eta\| \leq \frac{1}{2} \|\xi\|^2 + \frac{1}{2} \|\eta\|^2 \quad (7.77)$$

benutzt. Weiter gilt daher

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - f u \, dV \leq \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|\nabla w\|^2 - w f \, dV, \quad (7.78)$$

also

$$I(u) \leq I(w) \quad w \in \mathcal{A}. \quad (7.79)$$

Nun nehmen wir an, wir hätten einen Minimierer u des Funktionals I . Wir betrachten irgendeine Funktion $v \in C_0^\infty(\Omega)$ und schreiben

$$j(t) = I(u + tv), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (7.80)$$

Es ist $u + tv \in \mathcal{A}$ da v am Rand verschwindet. Die skalare Funktion $j : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ nimmt ihr Minimum für $t = 0$ an, daher

$$\frac{d}{dt} j(t) \Big|_{t=0} = j'(0) = 0, \quad (7.81)$$

falls diese Ableitung existiert. Wir rechnen formal und schreiben die Taylorentwicklung bzgl. t auf:

$$\begin{aligned} j(t) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|\nabla u + t\nabla v\|^2 - (u + tv)f \, dV \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + t \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \frac{t^2}{2} \|\nabla v\|^2 - (u + tv)f \, dV. \end{aligned} \quad (7.82)$$

Daraus

$$0 = j'(t) = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle - f v \, dV = \int_{\Omega} (-\Delta u - f)v \, dV. \quad (7.83)$$

Weil v beliebig ist und $u \in C^2$ angenommen wurde, muß die Klammer identisch verschwinden, also

$$-\Delta u = f. \quad (7.84)$$

7.7 Die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t(x, t) = \Delta_x u(x, t) \quad x \in \Omega \quad (7.85)$$

$$(7.86)$$

sowie die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$u_t(x, t) = \Delta_x u(x, t) + f(x, t) \quad x \in \Omega \quad (7.87)$$

$$(7.88)$$

zu geeigneten Anfangs- und Randbedingungen.

7.7.1 Die Fundamentallösung

Ist u Lösung zu (7.85), dann auch für $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$v(x, t) := u(\lambda x, \lambda^2 t). \quad (7.89)$$

Die Größe $\frac{\|x\|^2}{t}$ ist ebenfalls invariant unter der Skalierung $(x, t) \mapsto (\lambda x, \lambda^2 t)$, denn

$$\frac{\|\lambda x\|^2}{\lambda^2 t} = \frac{\lambda^2 \|x\|^2}{\lambda^2 t} = \frac{\|x\|^2}{t}, \quad (7.90)$$

eventuell spielt also die Größe $\frac{\|x\|^2}{t}$ eine wichtige Rolle. Wir suchen im Folgenden Lösungen von (7.85) in der Form

$$u(x, t) := w(t) \cdot v\left(\frac{\|x\|^2}{t}\right) \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (7.91)$$

wobei v, w skalarwertige Funktionen sind. Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= w'(t) v\left(\frac{\|x\|^2}{t}\right) - w(t) v' v\left(\frac{\|x\|^2}{t}\right) \frac{\|x\|^2}{t^2}, \\ u_{x_i} &= w(t) \cdot v' v\left(\frac{\|x\|^2}{t}\right) \frac{2x_i}{t}, \\ u_{x_i x_i} &= w(t) \cdot v'' v\left(\frac{\|x\|^2}{t}\right) \frac{4x_i^2}{t^2} + w(t) v' v\left(\frac{\|x\|^2}{t}\right) \frac{2}{t}, \end{aligned} \quad (7.92)$$

so daß

$$u_t - \Delta u = w'v - wv' \frac{\|x\|^2}{t^2} - wv'' \frac{4\|x\|^2}{t^2} - wv' \frac{2n}{t}. \quad (7.93)$$

Also ist u Lösung von (7.85) wenn wir v, w so wählen können, daß gilt

$$w'v - \frac{w(t)}{t} \left[v'' \frac{4\|x\|^2}{t} + v' \frac{\|x\|^2}{t} + v' 2n \right] = 0. \quad (7.94)$$

Dazu wählen wir

$$v(z) e^{-\frac{z}{4}}, \quad (7.95)$$

d.h. v löst die ODE $4v''(z) + v'(z) = 0$. Damit reduziert sich (7.94) auf

$$0 = w'v - \frac{w(t)}{t} v' 2n = w'v - \frac{w(t)}{t} \frac{n}{2}. \quad (7.96)$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$w(t) = t^{-\frac{n}{2}}. \quad (7.97)$$

Daher schließen wir, daß

$$u(x, t) = w(t) \cdot v \left(\frac{\|x\|^2}{t} \right) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \quad (7.98)$$

bzw. allgemeiner

$$u(x, t) = \frac{a}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} + b, \quad (7.99)$$

für beliebige Konstanten a, b Lösungen von (7.85) sind.

Definition 7.11 (Fundamentallösung)

Die Funktion

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n, t = 0 \end{cases} \quad (7.100)$$

heißt die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t = \Delta u$.

Die Normalisierungskonstante $(4\pi)^{-n/2}$ hat zur Folge das

Lemma 7.12

Für jedes $t > 0$ ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dV = 1. \quad (7.101)$$

Beweis.

$$\int_{x \in \mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dV = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{x \in \mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} dV$$

Substitution $z = \frac{x}{2\sqrt{t}}$ (eindimensional $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ also $dx = 2\sqrt{t} dz$ führt mehrdimensional auf

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{z \in \mathbb{R}^n} e^{-z^2} (2\sqrt{t})^n dV(z)$$

$$= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{z \in \mathbb{R}^n} e^{-z^2} dV(z)$$

$$= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{z \in \mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n z_i^2} dV(z)$$

$$= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{z \in \mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n e^{-z_i^2} (dz_1, \dots, dz_n)$$

iterierte Integration

$$= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^n \int_{z_i \in \mathbb{R}} e^{-z_i^2} dz_i = \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^n \int_{z=-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = 1. \quad (7.102)$$

Wir verwenden Φ , um eine Darstellungsformel für die Lösung des Anfangswertproblems (Cauchy-Problem) zu erhalten:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \Delta_x u(x, t) \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x) \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (7.103)$$

Da $\Phi(x, t)$ Lösung von (7.85) ist, ist auch für $y \in \mathbb{R}^n$ fest die Funktion $x \mapsto \Phi(x - y, t)$ Lösung, desweiteren ist dann auch $x \mapsto \Phi(x - y, t)g(y)$ sowie für abzählbar viele $y_i \in \mathbb{R}^n$ wegen der Linearität der Wärmeleitungsgleichung auch $\sum_i \Phi(x - y_i, t)g(y_i)$ eine Lösung und somit sollte auch die Faltung

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{y \in \mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} g(y) dV(y) \quad (7.104)$$

eine Lösung sein.

Theorem 7.13 (Lösung des Cauchy-Problems)

Es sei $g \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (g ist stetig und beschränkt) und u sei für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ gegeben durch

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{y \in \mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} g(y) dV(y). \quad (7.105)$$

Dann ist

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, d.h. u ist beliebig oft differenzierbar.
2. $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.
3. $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x, t) = g(x_0)$, die Anfangswerte werden stetig angenommen.

Beweis. Zunächst bemerken wir, daß die Funktion $t^{-n/2} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}}$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$ beliebig oft differenzierbar ist. Ausserdem sind ihre Ableitungen beliebiger Ordnung gleichmäßig beschränkt auf jeder für t von der Nullwegbeschränkten Menge. Also ist nach einem Satz aus der Theorie der Faltungen u beliebig oft differenzierbar für $t > 0$. Desweiteren gilt für $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$ dass

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi_t(x - y, t) g(y) - \Delta_x \Phi(x - y, t) g(y) dV(y) \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} [\Phi_t(x - y, t) - \Delta_x \Phi(x - y, t)] g(y) dV(y) = 0, \end{aligned} \quad (7.106)$$

da die Differentiation für glatte Integranden in das Integral hineingezogen werden darf.

Nun wollen wir zeigen, daß die Anfangswerte stetig angenommen werden. Dazu fixieren wir ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und eine (kleine) Zahl $\varepsilon > 0$ und wählen ein $\delta > 0$ passend, so dass gilt

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |y - x_0| < \delta. \quad (7.107)$$

So ein $\delta > 0$ gibt es immer, da g als stetig Vorausgesetzt ist.

Für $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ folgt dann

$$\begin{aligned} |u(x, t) - g(x_0)| &= \left| \int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi(x - y) g(y) dV(y) - g(x_0) \right| \\ &= \left| \int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi(x - y) g(y) dV(y) - g(x_0) \int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi(x - y) dV(y) \right| \\ &\text{weil } \int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi(x - y) dV(y) = 1 \text{ ist} \\ &= \left| \int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi(x - y) [g(y) - g(x_0)] dV(y) \right| \\ &\leq \int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi(x - y) |g(y) - g(x_0)| dV(y) \\ &\text{weil } \Phi \text{ positiv ist.} \\ &\leq \int_{\|y-x_0\| < \delta} \Phi(x - y) |g(y) - g(x_0)| dV(y) + \int_{\|y-x_0\| \geq \delta} \Phi(x - y) |g(y) - g(x_0)| dV(y) \\ &\text{Annahme für } \|y - x_0\| < \delta \text{ nutzen} \\ &\leq \varepsilon \int_{\|y-x_0\| < \delta} \Phi(x - y) dV(y) + \int_{\|y-x_0\| \geq \delta} \Phi(x - y) |g(y) - g(x_0)| dV(y) \\ &\leq \varepsilon \int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi(x - y) dV(y) + \int_{\|y-x_0\| \geq \delta} \Phi(x - y) |g(y) - g(x_0)| dV(y) \end{aligned}$$

weil Φ positiv ist wird der erste Term durch Vergrößerung des Integrationsbereiches höchstens größer

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon 1 + \int_{\|y-x_0\| \geq \delta} \Phi(x-y) |g(y) - g(x_0)| \, dV(y) \\
&\leq \varepsilon 1 + \int_{\|y-x_0\| \geq \delta} \Phi(x-y) (|g(y)| + |g(x_0)|) \, dV(y) \\
&\leq \varepsilon 1 + \int_{\|y-x_0\| \geq \delta} 2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \Phi(x-y) \, dV(y) \\
&\leq \varepsilon 1 + 2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_{\|y-x_0\| \geq \delta} \Phi(x-y) \, dV(y) \\
&\leq \varepsilon + \frac{K}{t^{n/2}} \int_{\|y-x_0\| \geq \delta} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} \, dV(y). \tag{7.108}
\end{aligned}$$

Wir analysieren den zweiten Teil genauer: wegen

$$\begin{aligned}
\|y-x\| &= \|y-x_0 + x_0-x\| \geq \|y-x_0\| - \|x_0-x\| \\
&\text{unsere Betrachtung läuft für } \|x-x_0\| \leq \frac{\delta}{2}, \text{ daher} \\
&\geq \|y-x_0\| - \frac{\delta}{2} \\
&\text{auf dem Integrationsbereich ist } \delta \leq \|y-x_0\|, \text{ also folgt} \\
&\geq \|y-x_0\| - \frac{1}{2}\|y-x_0\| = \frac{1}{2}\|y-x_0\|. \tag{7.109}
\end{aligned}$$

Das Integral wird größer, falls wir den Integranden vergrößern, daher

$$\begin{aligned}
\frac{K}{t^{n/2}} \int_{\|y-x_0\| \geq \delta} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} \, dV(y) &\leq \frac{K}{t^{n/2}} \int_{\|y-x_0\| \geq \delta} e^{-\frac{\frac{1}{2}\|y-x_0\|^2}{4t}} \, dV(y) \\
&= \frac{K}{t^{n/2}} \int_{\|y-x_0\| \geq \delta} e^{-\frac{\|y-x_0\|^2}{16t}} \, dV(y) \\
&\text{Polarkoordinaten einführen} \qquad = \frac{K}{t^{n/2}} \int_{r \geq \delta} e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} \, dr \\
&\text{Substitution } s = \frac{r}{4\sqrt{t}} \text{ liefert} \\
&= K_2 \int_{s \geq \frac{\delta}{4\sqrt{t}}} s^{n-1} e^{-s^2} \, ds \tag{7.110}
\end{aligned}$$

Es gilt, dass $\int_0^\infty s^{n-1} e^{-s^2} \, ds$ endlich ist, also muß

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{s \geq \frac{\delta}{4\sqrt{t}}} s^{n-1} e^{-s^2} \, ds = 0. \tag{7.111}$$

Insgesamt können wir für $\|x-x_0\| \leq \frac{\delta}{2}$ und für hinreichend kleine $t > 0$ die Abschätzung

$$|u(x, t) - g(x_0)| \leq 2\varepsilon \tag{7.112}$$

erreichen. Da ε beliebig klein gewählt werden kann, folgt, dass die Lösungsformel die Anfangsdaten stetig annimmt.

Satz 7.14 (Eindeutigkeit der Wärmeleitungsgleichung)

Es gibt höchstens eine Lösung $u \in C_1^2(\Omega \times (0, T])$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \Delta u(x, t) + f(x, t), & x \in \Omega, 0 < t \leq T, \\ u(x, t) &= g(x, t), & x \in \Omega, t = 0, \\ u(x, t) &= g(x, t), & x \in \partial\Omega, 0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (7.113)$$

wobei $C_1^2(\Omega \times (0, T])$ alle Funktionen $u : \Omega \times (0, T] \mapsto \mathbb{R}$ bezeichne, für die gilt

$$\begin{aligned} u(x, t), \nabla_x u(x, t), D_x^2 u(x, t) &\in C^2(\Omega) \quad \text{für jedes } 0 < t \leq T \\ u(x, t), u_t(x, t) &\in C^1(\mathbb{R}) \quad \text{für jedes } x \in \Omega. \end{aligned} \quad (7.114)$$

Hier beinhaltet g die Anfangstemperaturverteilung im Körper $g(x, 0)$, sowie die Randtemperaturverteilung.

Beweis. Seien u_1, u_2 zwei Lösungen zu (7.113). Dann löst die Differenz $w = u_1 - u_2$ die Gleichung

$$\begin{aligned} w_t(x, t) &= \Delta w(x, t), & x \in \Omega, 0 < t \leq T, \\ w(x, t) &= 0, & x \in \Omega, t = 0, \\ w(x, t) &= 0, & x \in \partial\Omega, 0 < t \leq T. \end{aligned} \quad (7.115)$$

Wir definieren

$$e(t) := \int_{\Omega} w^2(x, t) \, dV \quad 0 < t \leq T. \quad (7.116)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e(t) &= 2 \int_{\Omega} w(x, t) w_t(x, t) \, dV \\ &= 2 \int_{\Omega} w(x, t) \Delta w(x, t) \, dV \\ &\quad \text{partiell integrieren bzgl. } x: \text{ zu jeder Zeit } t \text{ hat } w(x, t) \text{ Randwerte null} \\ &= -2 \int_{\Omega} \langle \nabla_x w(x, t), \nabla_x w(x, t) \rangle \, dV = -2 \int_{\Omega} \|\nabla_x w(x, t)\|^2 \, dV \leq 0. \end{aligned} \quad (7.117)$$

Also folgt nach Integration von e bzgl. t

$$e(t) \leq e(0) = \int_{\Omega} \Omega w(x, 0) \, dV = 0, \Rightarrow e(t) \equiv 0 \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7.118)$$

weil $w(x, 0) = 0$ und damit $w(x, t) \equiv 0$ für alle $0 \leq t \leq T$. ■

Bemerkung 7.15

Die Darstellung der Lösung des Ganzraumproblems erlaubt uns, eine interessante Schlussfolgerung zu ziehen: ist die Anfangsvorgabe für die Temperatur g irgendwo (z.Bsp. nur in einem beschränkten Teilgebiet des \mathbb{R}^n) echt positiv (irgendwo eine Wärmequelle), so ist die Temperatur für jeden Zeitpunkt $t > 0$ und in jedem Punkt des \mathbb{R}^n (z.Bsp. beliebig weit weg von der Wärmequelle) schon positiv. Man sagt dazu, dass die Wärmeleitungsgleichung eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzt. Das ist natürlich unphysikalisch, es zeigt die Grenzen der vereinfachten Gleichung zur Wärmeleitung.

7.8 Rückwärtige Eindeutigkeit

Eine etwas schwierigere Frage betrifft die rückwärtige Eindeutigkeit der Wärmeleitungsgleichung. Damit ist folgendes gemeint: Wir betrachten den Körper Ω und geben die Temperaturverteilung g am Rand des Körpers vor:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= 0 & x \in \Omega, 0 \leq t \leq T \\ u(x, t) &= g(x, t) & x \in \partial\Omega, 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (7.119)$$

Satz 7.16 (Rückwärtige Eindeutigkeit)

Seien u_1, u_2 zwei glatte Lösungen des Problems (7.119) mit der Eigenschaft, dass zu einer gewissen Zeit $T > 0$

$$u_1(x, T) = u_2(x, T) \quad x \in \Omega. \quad (7.120)$$

Dann gilt

$$u_1(x, t) \equiv u_2(x, t) \quad x \in \Omega \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7.121)$$

In anderen Worten: wenn zwei Temperaturverteilungen zu denselben Randtemperaturen zu einer gewissen Zeit im Körper übereinstimmen, dann waren sie schon zu allen früheren Zeiten $t \leq T$ gleich. Das ist eigentlich nicht klar. Nochmal anders formuliert: es ist nicht möglich, zwei ansonsten gleiche Körper, die zu einem Zeitpunkt unterschiedliche Temperatur haben, durch gleiche Vorgabe der Randtemperatur auf die gleiche innere Temperatur zu bekommen.

Man beachte, dass nicht angenommen wird, dass $u_1 = u_2$ zum Startzeitpunkt $t = 0$ gilt, denn dann würde uns die vorherige Eindeutigkeit dieses Resultat schon liefern. **Beweis.** Wie vorher definieren wir die Funktion

$$e(t) := \int_{\Omega} w^2(x, t) \, dV \quad 0 < t \leq T. \quad (7.122)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e(t) &= 2 \int_{\Omega} w(x, t) w_t(x, t) \, dV \\ &= 2 \int_{\Omega} w(x, t) \Delta w(x, t) \, dV \\ &\quad \text{partiell integrieren bzgl. } x: \text{ zu jeder Zeit } t \text{ hat } w(x, t) \text{ Randwerte null} \\ &= -2 \int_{\Omega} \langle \nabla_x w(x, t), \nabla_x w(x, t) \rangle \, dV = -2 \int_{\Omega} \|\nabla_x w(x, t)\|^2 \, dV \leq 0. \end{aligned} \quad (7.123)$$

Genauso aber

$$\begin{aligned} e''(t) &= -4 \int_{\Omega} \langle \nabla w(x, t), \nabla w_t(x, t) \rangle \, dV \\ &\quad \text{partiell integrieren} \\ &= 4 \int_{\Omega} \langle \Delta w(x, t), w_t(x, t) \rangle \, dV \\ &= 4 \int_{\Omega} (\Delta w(x, t))^2 \, dV \end{aligned} \quad (7.124)$$

Wegen $w = 0$ auf $\partial\Omega$ gilt wiederum

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|\nabla w\|^2 \, dV &= \int_{\Omega} \langle \nabla w, \nabla w \rangle \, dV = \int_{\Omega} (-w) \Delta w \, dV \\ \text{Höldersche Ungleichung: } \int_{\Omega} f(x) g(x) \, dV &\leq \left[\int_{\Omega} f(x)^2 \, dV \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega} g(x)^2 \, dV \right]^{1/2} \\ &\leq \left[\int_{\Omega} w^2(x, t) \, dV \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega} (\Delta w(x, t))^2 \, dV \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (7.125)$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
(e'(t))^2 &= 4 \left[\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \, dV \right]^2 \\
&\leq \left[\int_{\Omega} w^2(x, t) \, dV \right] \left[4 \int_{\Omega} (\Delta w(x, t))^2 \, dV \right] \\
&= e(t) e''(t),
\end{aligned} \tag{7.126}$$

also

$$e''(t) e(t) \geq (e'(t))^2 \quad 0 \leq t \leq T. \tag{7.127}$$

Falls $e(t) = 0$ für $0 \leq t \leq T$, dann sind wir fertig. Wir wissen: $e(T) = 0$ und $e(t)$ ist monoton fallend und positiv. Also gibt es andernfalls ein $0 \leq t_2 \leq T$ mit $e(t) > 0$, $0 \leq t < t_2$ und $e(t_2) = 0$. Wir schreiben jetzt

$$f(t) := \log e(t) \quad 0 \leq t < t_2, \tag{7.128}$$

und erhalten

$$f''(t) = \frac{e''(t)}{e(t)} - \frac{(e'(t))^2}{(e(t))^2} \geq 0, \tag{7.129}$$

wegen (7.127). Das heisst, das f konvex auf $(0, t_2)$ ist. Daher gilt für $\lambda \in (0, 1)$ und $t \in [0, t_2)$

$$f(\lambda t) = f((1 - \lambda)0 + \lambda t) \leq (1 - \lambda) f(0) + \lambda f(t). \tag{7.130}$$

Die Exponentialfunktion erhält Ungleichungen, also gilt auch

$$\begin{aligned}
\exp f(\lambda t) &\leq \exp((1 - \lambda) f(0) + \lambda f(t)) = \exp((1 - \lambda) f(0)) \exp(\lambda f(t)) \Rightarrow \\
e(\lambda t) &\leq e(0)^{1-\lambda} e(t)^\lambda.
\end{aligned} \tag{7.131}$$

Aus der Stetigkeit von e folgt aber weiter

$$e(\lambda t_2) \leq e(0)^{1-\lambda} e(t_2)^\lambda, \quad \lambda \in (0, 1). \tag{7.132}$$

Nach Konstruktion ist $e(t_2) = 0$, also

$$e(\lambda t_2) = 0, \quad \lambda \in (0, 1), \tag{7.133}$$

womit über variables λ folgt, dass $e(t) = 0$ für alle $t \in (0, t_2)$ und mithin auch (Stetigkeit nochmal) $e(t) = 0$ für alle $t \in [0, T]$. Ein Widerspruch zum angenommenen Fall.

7.9 Fouriertransformation

Bekanntlich ist die Fouriertransformation für glatte Funktionen $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit beschränktem Träger definiert als

$$g^\wedge(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{x \in \mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} g(x) \, dV, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{7.134}$$

so dass $\widehat{g} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ wiederum wenigstens glatt ist. Die Fouriertransformierte von g kann komplexwertig sein, auch wenn g reellwertig ist.

Die **inverse Fouriertransformation** ist formal definiert durch

$$f^\vee(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} e^{+i\langle \xi, x \rangle} f(\xi) \, dV, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{7.135}$$

Es ist leicht zu sehen, dass

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |u^\wedge(\xi)| &\leq (2\pi)^{-n/2} \int_{x \in \mathbb{R}^n} |e^{-i\langle \xi, x \rangle}| |u(x)| \, dV \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| \, dV = (2\pi)^{-n/2} \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u^\vee(x)| &\leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} |e^{+i\langle \xi, x \rangle}| |u(\xi)| \, dV \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} |u(\xi)| \, dV = (2\pi)^{-n/2} \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (7.136)$$

Wir erinnern auch an einige elementare weitere Eigenschaften der Fouriertransformation: Im folgenden seien der Einfachheit halber $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

1. $(D^\alpha u)^\wedge(\xi) = (i\xi)^\alpha u^\wedge(\xi) = i^{|\alpha|} \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} u^\wedge(\xi)$ für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.
2. $(u * v)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{n/2} u^\wedge(\xi) v^\wedge(\xi)$, wobei $u * v$ das Faltungsprodukt von u und v ist, d.h.

$$(u * v)(x) := \int_{\eta \in \mathbb{R}^n} u(x - \eta) v(\eta) \, dV. \quad (7.137)$$

3. $u(x) = (u^\wedge)^\vee(x)$.

Beweis.

$$\begin{aligned} (\partial_{x_k} u)^\wedge(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{x \in \mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \partial_{x_k} g(x) \, dV \\ &\text{partielle Integration, keine Randwerte} \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{x \in \mathbb{R}^n} -\partial_{x_k} \left[e^{-i\langle x, \xi \rangle} \right] g(x) \, dV \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{x \in \mathbb{R}^n} -i \xi_k e^{-i\langle x, \xi \rangle} g(x) \, dV \\ &= -i \xi_k (2\pi)^{-n/2} \int_{x \in \mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} g(x) \, dV \\ &= -i \xi_k u^\wedge(\xi). \end{aligned} \quad (7.138)$$

Mehrfache partielle Ableitungen, geschrieben in Multiindex-Notation ergeben das allgemeine Resultat.

Desweiteren

$$\begin{aligned} (u * v)^\wedge(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{x \in \mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} (u * v)(x) \, dV \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{x \in \mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \int_{\eta \in \mathbb{R}^n} u(x - \eta) v(\eta) \, dV_\eta \, dV_x \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{x \in \mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \int_{\eta \in \mathbb{R}^n} u(\eta) v(x - \eta) \, dV_\eta \, dV_x \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\eta \in \mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \mathbf{u}(\eta) v(x - \eta) \, dV_\eta \, dV_x \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\eta \in \mathbb{R}^n} e^{-i\langle x - \eta, \xi \rangle} e^{-i\langle \eta, \xi \rangle} \mathbf{u}(\eta) v(x - \eta) \, dV_\eta \, dV_x \end{aligned}$$

Integrationsreihenfolge vertauschen

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\eta \in \mathbb{R}^n} \int_{x \in \mathbb{R}^n} e^{-i\langle x - \eta, \xi \rangle} e^{-i\langle \eta, \xi \rangle} \mathbf{u}(\eta) v(x - \eta) \, dV_x \, dV_\eta$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\eta \in \mathbb{R}^n} e^{-i\langle \eta, \xi \rangle} u(\eta) \int_{x \in \mathbb{R}^n} e^{-i\langle x-\eta, \xi \rangle} v(x-\eta) dV_x dV_\eta \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\eta \in \mathbb{R}^n} e^{-i\langle \eta, \xi \rangle} u(\eta) \int_{\zeta \in \mathbb{R}^n} e^{-i\langle \zeta, \xi \rangle} v(\zeta) dV_\zeta dV_\eta \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\eta \in \mathbb{R}^n} e^{-i\langle \eta, \xi \rangle} u(\eta) (2\pi)^{n/2} v^\wedge(\xi) dV_\eta \\
&= (2\pi)^{n/2} v^\wedge(\xi) u^\wedge(\xi). \tag{7.139}
\end{aligned}$$

7.10 Anwendung der Fouriertransformation

Wir betrachten das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung im Ganzraum. Sie lautet

$$\begin{aligned}
u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\
u(x, 0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7.140}
\end{aligned}$$

Fouriertransformation der PDE bzgl. der räumlichen Variablen x_i liefert

$$\begin{aligned}
(u_t - \Delta u)^\wedge(\xi) &= 0 \Rightarrow u_t^\wedge(\xi, t) - i^2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 u^\wedge(\xi, t) = 0, \\
u^\wedge(\cdot, 0) &= g^\wedge(\xi), \tag{7.141}
\end{aligned}$$

also die ODE für u^\wedge

$$\begin{aligned}
u_t^\wedge(\xi, t) + \|\xi\|^2 u^\wedge(\xi, t) &= 0, \\
u^\wedge(\cdot, 0) &= g^\wedge(\xi) \tag{7.142}
\end{aligned}$$

mit der Lösung

$$u^\wedge(\xi, t) = e^{-t\|\xi\|^2} g^\wedge(\xi). \tag{7.143}$$

Somit ist die Lösung u gegeben durch inversion

$$u(x, t) = (u^\wedge)^\vee(x, t) = \left(e^{-t\|\xi\|^2} g^\wedge(\xi) \right)^\vee. \tag{7.144}$$

Da die Fouriertransformation einer Faltung das Produkt der Fouriertransformationen ist, wäre

$$u(x, t) = \frac{g * F}{(2\pi)^{n/2}}, \tag{7.145}$$

falls

$$F^\wedge(\xi) = e^{-t\|\xi\|^2}. \tag{7.146}$$

Dann ist aber

$$\begin{aligned}
F(x, t) &= \left(e^{-t\|\xi\|^2} \right)^\vee(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} e^{-t\|\xi\|^2} dV_\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle - t\|\xi\|^2} dV_\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_j \xi_j - t\xi_j^2} d\xi_j. \tag{7.147}
\end{aligned}$$

Wir untersuchen für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ gesondert das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ias - bs^2} ds. \tag{7.148}$$

Mit

$$z = \sqrt{b}s - \frac{a}{2\sqrt{b}}i, \quad z^2 = bs^2 - ais - \frac{a^2}{4b}, \quad dz = \sqrt{b} ds, \quad (7.149)$$

folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ias - bs^2} ds = \frac{e^{-a^2/4b}}{b^{1/2}} \int_{\Gamma} e^{-z^2} dz, \quad (7.150)$$

wobei $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = -\frac{a}{2\sqrt{b}}\}$ (Transformationsformel). Wir betrachten einen endlichen Teil von Γ , symmetrisch zur komplexen Achse mit Länge $2R$ und vervollständigen ihn zu einem Rechteck welches die reelle Achse einschliesst. Das geschlossene Wegintegral darüber ist 0, was aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt. Der Beitrag der beiden Seiten wird für großes R beliebig klein, woraus folgt

$$\frac{e^{-a^2/4b}}{b^{1/2}} \int_{\Gamma} e^{-z^2} dz = \frac{e^{-a^2/4b}}{b^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (7.151)$$

Wie aber bekannt ist, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (7.152)$$

Daher gilt insgesamt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ias - bs^2} ds = \frac{e^{-a^2/4b}}{b^{1/2}} \int_{\Gamma} e^{-z^2} dz = e^{-a^2/4b} \left(\frac{\pi}{b}\right)^{1/2}. \quad (7.153)$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_j \xi_j - t \xi_j^2} d\xi_j \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\|x\|^2/4t} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2} \\ &= \frac{1}{(2t)^{n/2}} e^{-\|x\|^2/4t} \end{aligned} \quad (7.154)$$

Daraus ergibt sich die (schon bekannte) Lösungsdarstellung

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} g(y) dV_y \quad (7.155)$$