

Kurzskript: Mathematische Modellierung und
Differentialgleichungen. Gehalten im Wintersemester
2005/2006 an der Uni Duisburg-Essen, Campus Essen

Priv. Doz. Dr. Patrizio Neff *
Department of Mathematics
University of Technology
Darmstadt

8. Februar 2006

1 Zusammenfassung ODE

Eine gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung ist eine Relation der Form

$$G(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

mit $G : I \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ und $I = [a_1, a_2] \subset \mathbb{R}$, zusammen mit Anfangsbedingungen

$$y'(a) = y_a^0, \dots, y^{(n-1)}(a) = y_a^{n-1}, a \in (a_1, a_2),$$

zur Bestimmung einer unbekannten Funktion $y : I \mapsto \mathbb{R}$. Der explizite Fall 1. Ordnung schreibt sich besonders einfach. Zu lösen ist

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(a) = y_a^0, \tag{1.1}$$

mit einer Funktion

$$f : I \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}.$$

Man kann sich die Differentialgleichung geometrisch veranschaulichen. Dazu ordnet man jedem Punkt der (x, y) -Ebene den Vektor $(1, f(x, y))$ zu; so entsteht das **Richtungsfeld** der Differentialgleichung. Eine Lösung der Differentialgleichung ist dann eine Kurve $y(x)$, so daß das Richtungsfeld in jedem Punkt ihres Graphen tangential an die Kurve liegt. Mittels der **Anfangsbedingung** $y(a) = y_a^0$ wird im günstigen Fall eine eindeutige Kurve mit dieser Eigenschaft ausgewählt.

Wir geben nun Standardresultate aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen an.

Satz 1.1 (Peanoscher Existenzsatz)

Sei $f : I \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ stetig. Dann besitzt (1.1) mindestens eine Lösung $y : I \mapsto \mathbb{R}$ und y ist differenzierbar.

Satz 1.2 (Existenz und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelof)

Sei $f : I \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ stetig und f erfülle bezüglich der zweiten Variablen eine Lipschitzbedingung, d.h.

$$\exists L > 0 \forall x \in I : \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|.$$

Dann besitzt (1.1) lokal eine eindeutige Lösung $y : I \mapsto \mathbb{R}$ und y ist differenzierbar. Lokal meint hier: es gibt eine Umgebung des Punktes $(a, y(a)) \subset I \times \mathbb{R}$, so dass die Lösung dort definiert ist.

Die Beweise dazu finden sich z. Bsp. in Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer.

*Patrizio Neff, Fachbereich Mathematik, Uni Duisburg-Essen, email: neff@mathematik.tu-darmstadt.de, Tel.: 049-201-183 2532

2 Populationsmodelle

In diesem ersten Paragraphen wollen wir die zeitliche Entwicklung der Populationsgröße verschiedener Spezies beschreiben. Die Modelle werden mit Hilfe gewöhnlicher Differentialgleichungen formuliert sein. Die Lösungen der Differentialgleichungen geben die zeitliche Entwicklung der Größe der jeweiligen Population, d.h. deren Anzahl an. Wie noch oft in dieser Vorlesung verwenden wir die Kontinuumsnäherung an die Wirklichkeit. Die Größe der einzelnen Population ist natürlich ganzzahlig und unstetig als Funktion der Zeit. Wir nähern die Größe nun durch eine stetige Funktion an, die wir als Lösung einer Differentialgleichung gewinnen wollen. Grundlegende Resultate zu gewöhnlichen Differentialgleichungen (Existenz von Lösungen, Eindeutigkeit der Lösungen, stetige Abhängigkeit von den Daten etc. finden sich in vielen klassischen Abhandlungen (Walter, ODE) und sind Gegenstand eigener Vorlesungen im Fachbereich.

2.1 Lineare Wachstumsmodelle, Zeitskalen und Dimensionsanalyse

Es sei $p(t)$ die Größe der Population zum Zeitpunkt t , (z.Bsp. die Erdbevölkerung, eine Bakterienkultur oder die Karpfen in einem Teich) in der Kontinuumsnäherung. Wir wollen einen Ausdruck für die zeitliche Änderung $p' = \frac{dp}{dt}$ (die absolute Änderungsrate) der Population finden. Dabei machen wir die Voraussetzung, daß das System abgeschlossen ist, d.h. es gibt keine Zu- und Abwanderung. Ist die absolute Änderungsrate allein eine Funktion der Zeit und der Populationsgröße, so gilt

$$p'(t) = r(t, p(t)),$$

wobei

$$r(t, p) = g(t, p) - s(t, p)$$

mit der **absoluten Geburtsrate** $g(t, p)$ und der **absoluten Sterberate** $s(t, p)$. Sind p und s bekannte Funktionen, so ist eine Funktion

$$p : I \mapsto \mathbb{R} \quad (I \subset \mathbb{R} \text{ ein Intervall})$$

gesucht, so daß die gewöhnliche Differentialgleichung

$$p'(t) = r(t, p(t))$$

erfüllt ist. Ist die Größe der Population zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ bekannt, so weiß man aus der Grundvorlesung, daß das Anfangswertproblem

$$p'(t) = r(t, p(t)), \quad p(t_0) = p_0$$

eine Lösung besitzt, falls r eine stetige Funktion ist (Satz v. Peano). Ist außerdem r **Lipschitzstetig**, bezüglich der Variablen p , d. h. es gibt eine Konstante $L > 0$ mit der Eigenschaft

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad |r(t, x) - r(t, y)| \leq L |x - y|,$$

so ist die Lösung sogar eindeutig (Satz von Picard-Lindelöf).

Im einfachsten Fall ist die absolute Wachstumsrate proportional zu p selbst (die Population wächst umso schneller, je größer die Population schon ist). In diesem Fall ist die **spezifische Wachstumsrate** $p'(t)/p(t)$ konstant. Dann lautet die Differentialgleichung

$$p'(t) = \alpha p(t) \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \text{ konstant}$$

Die Zahl α ist die auf die Population bezogene Wachstumsrate (spezifische Wachstumsrate). Dann gilt, falls $p(t_0) = p_0 \neq 0$

$$\begin{aligned} p'(t) &= \alpha p(t) \\ \Leftrightarrow \frac{p'}{p}(t) &= \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \log |p(t)| &= \alpha \\ \Leftrightarrow \log |p(t)| &= \alpha(t - t_0) + \log |p_0| \\ \Leftrightarrow |p(t)| &= e^{\alpha(t - t_0) + \log |p_0|} = |p_0| e^{\alpha(t - t_0)}. \end{aligned}$$

Da die rechte Seite immer verschieden von Null ist, gilt

$$p(t) = |p_0| e^{\alpha(t-t_0)}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} p(t) &\rightarrow \infty \quad \text{für } t \rightarrow \infty, \text{ falls } \alpha > 0 \text{ (unbeschränktes Wachstum),} \\ p(t) &\rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty, \text{ falls } \alpha < 0 \text{ (Ausssterben).} \end{aligned}$$

Für Bakterienkulturen, radioaktiven Zerfall und selbst für die Entwicklung der Erdbevölkerung liefert eine konstante Wachstumsrate für große Bereiche der Größe p ein brauchbares Modell. Die Entwicklung der Erdbevölkerung bis zum heutigen Tag genügt dabei diesem Gesetz recht gut mit $\alpha \approx 0.02$.

Um eine Vorstellung für **typische Zeitspannen** zu bekommen, in denen Wachstumsphänomene ablaufen, wollen wir eine **geeignete Zeitskala** einführen. Der Begriff Zeitskala (oder auch der Längenskala) ist fundamental in der Angewandten Mathematik und er wird uns noch einige Male begegnen. Wir suchen eine Größe \bar{t} , die eine typische Zeitspanne beschreibt, über welche die signifikanten Veränderungen stattfinden. Wir definieren \bar{t} als die Zeit, die für eine Änderung der Gesamtpopulation um den Faktor e benötigt wird. Würden wir den Faktor 2 wählen, so wäre \bar{t} die Halbwertzeit, falls $\alpha < 0$ ist.

Ohne Einschränkung sei nun $t_0 = 0$, dann gilt für $p(t) = e^{\alpha t}$:

$$\frac{p(\bar{t})}{p(0)} = e \quad (\alpha > 0) \quad \text{bzw.} \quad \frac{p(0)}{p(\bar{t})} = e \quad (\alpha < 0) \Leftrightarrow \bar{t} = \frac{1}{|\alpha|}.$$

Die Größe $\bar{t} = \frac{1}{|\alpha|}$ ist also eine geeignete Zeitskala für den linearen Wachstumsprozeß. Hätten wir \bar{t} so gewählt, daß sich die Population verdoppelt bzw. halbiert, so wäre $\bar{t} = \frac{\ln 2}{|\alpha|}$, d.h. wir hätten bis auf den Faktor $\ln 2$ die gleiche Abhängigkeit von α . Es ergibt sich z.Bsp., daß sich die Erdbevölkerung ungefähr alle 35 Jahre verdoppelt.

2.2 Einheiten

Die Größe $\bar{t} = \frac{1}{|\alpha|}$ hat tatsächlich die Dimension der Zeit, da $[\alpha] = \frac{1}{T}$ (hier steht T für die Dimension der Zeit). Jede naturwissenschaftliche Größe hat eine Dimension. Für jede Dimension wählt man eine Basiseinheit, um diese Größe zu messen. Naturwissenschaftliche Gesetze sind unabhängig von der Wahl der Einheit (sogenanntes **Kovarianzprinzip**). Diese Tatsache hat einige wichtige Konsequenzen. So müssen z.Bsp. in einer Gleichung alle Terme die gleiche Dimension haben (klar: Äpfel kann man nicht zu Birnen addieren) und es müssen gewisse Homogenitätsbeziehungen gelten.

Wir verwenden in dieser Vorlesung die folgenden Dimensionen:

- T : Zeit (Einheit: Sekunde)
- A : Anzahl (Einheit: eine gewisse Anzahl eines Stoffes oder einer Population)
- L : Länge (Einheit: m)
- M : Masse (Einheit: Kilo)
- Θ : Temperatur (Einheit: Kelvin)

Zu jeder Dimension haben wir eine Einheit gewählt. Diese sind allerdings beliebig und wir hätten statt Sekunde auch Minute oder Stunde wählen können.

Die Dimension einer Größe f bezeichnen wir mit $[f]$. Daher gilt

$$\begin{aligned} [t] &= T, \\ [p] &= A, \end{aligned}$$

und weiter

$$[p'] = \left[\frac{dp}{dt} \right] = \left[\lim \frac{p - \text{Differenzen}}{t - \text{Differenzen}} \right] = \frac{A}{T}.$$

Da

$$p' = \alpha p, \quad (2.1)$$

folgt

$$[p'] = [\alpha] \cdot [p],$$

und somit

$$[\alpha] = \frac{[p']}{[p]} = \frac{A/T}{A} = \frac{1}{T}. \quad (2.2)$$

Es gibt zwei weitere Möglichkeiten die relevante Zeitskala zu bestimmen. Diese benötigen keine explizite Lösungsformel.

1. **Entdimensionieren der Gleichung:** Es sei $p(t_0) = p_0$. Dann führen wir dimensionslose Größen ein. Dabei messen wir die Größe der Population und die Zeit unter Benutzung gewisser intrinsischer Referenzgrößen, d.h. wir messen Größen in Bezug auf eine feste Referenzgröße, die typisch ist für das auftretenden Problem. Diese Größen benutzen wir als neue intrinsische Einheiten. Für die Größe der Population benutzen wir die Größe der Population zum Zeitpunkt t_0 als Referenzgröße und für die Zeit benutzen wir eine noch zu bestimmende Zeit \bar{t} . Hier machen wir uns die unmittelbar einleuchtenden Tatsache zu nutze, daß es sinnvoller ist, Länge und Zeit mittels intrinsischer Referenzgrößen zu messen, statt mit einem fest vorgegebenen Standard (wie dem Meter oder der Sekunde). Wir definieren also

$$q = p/p_0 \quad \text{und} \quad \tau = (t - t_0)/\bar{t},$$

dabei sei \bar{t} eine typische Zeitspanne, über den der Vorgang (Wachstum, Abnahme der Population) stattfindet.

Wir erhalten mit $q(\tau) = \frac{p}{p_0}(\tau \bar{t} + t_0)$ sofort

$$\frac{\partial}{\partial \tau} q(\tau) = \frac{1}{p_0} \frac{\partial}{\partial \tau} p(\tau \bar{t} + t_0) = \bar{t} \alpha q(\tau).$$

Die Wahl $\bar{t} = \frac{1}{\alpha}$ bringt die Gleichung auf eine einfache Form. Es gilt dann

$$q' = q, \quad q(0) = 1.$$

Dieses Vorgehen hat einen großen Vorteil: ich brauche nur die Lösung des Anfangswertproblems $q' = q, q(0) = 1$ zu kennen und ich kenne schon alle Lösungen des ursprünglichen Problems für alle möglichen Parameter (setze $p(t) = p_0 q(\frac{t-t_0}{\bar{t}})$). Das mag hier trivial erscheinen, ist aber bei komplexen Situationen sehr wichtig. Der Vorteil ist, daß nur eine Lösung berechnet werden muß. Diese Vereinfachung ist dann interessant, wenn die Lösung nicht mehr explizit berechnbar ist (was meistens der Fall ist).

Die Lösung q definiert eine **normalisierte Lösung**. Insbesondere ist die Zeit so skaliert, daß relevante Veränderungen auf der Zeitskala der Ordnung 1 ablaufen. In der dimensionsbehafteten Gleichung laufen Vorgänge in der Zeitvariablen

$$t = \tau \bar{t} + t_0 = \frac{\tau}{\alpha} + t_0$$

ab. Relevante Veränderungen laufen also in der Zeitskala $\frac{1}{\alpha}$ ab.

2. **Dimensionsanalyse:** Wir nehmen an, es gäbe ein Gesetz, das die Zeit \bar{t} , mit der sich die Größe der Population um einen festen Faktor ändert, mit den Parametern des Problems in beziehung setzt. Genauer: wir nehmen an, die Zeit \bar{t} in der sich die Population um den Faktor e ändert, sei eine Funktion der auftretenden Parameter von der folgenden Form:

$$\bar{t} = \alpha^n p_0^m, \quad n, m \in \mathbf{Z}.$$

Damit die Dimensionen übereinstimmen, d.h. damit

$$[\bar{t}] = [\alpha^n p_0^m] = [\alpha]^n [p_0]^m$$

ist, gilt notwendigerweise

$$n = -1, m = 0$$

und damit

$$\bar{t} = \frac{1}{\alpha}.$$

Wieder ist dies ein ganz einfaches Beispiel. Es soll demonstrieren, wie man bei der Dimensionsanalyse vorgeht, um für komplexe Situationen gerüstet zu sein.

2.3 Beschränktes Wachstum und lineare Stabilitätsanalyse

Wird die Population zu groß, so ist eine konstante Wachstumsrate nicht mehr realistisch. Durch Beschränkung des Lebensraums, Nahrungsknappheit oder andere Mechanismen sind dem unbeschränkten Wachstum Grenzen gesetzt. Nehmen wir also α , daß es eine gewisse Kapazität ξ gibt, für die die Ressourcen des Lebensraums ausreichen. Für Werte von p kleiner als ξ kann die Population noch wachsen und für Werte größer als ξ nimmt die Population ab. Dies bedeutet für die spezifische Wachstumsrate, die wir $R(t, p)$ nennen wollen, daß

$$\begin{aligned} R(t, p) &> 0, & 0 < p < \xi, \\ R(t, p) &< 0, & p > \xi. \end{aligned}$$

Im einfachsten Fall machen wir einen linearen Ansatz für R , d.h.

$$R(t, p) = \beta(\xi - p),$$

mit einer Zahl $\beta > 0$ (typischerweise ist β klein). Mit diesem Ansatz erhalten wir

$$p' = \beta(\xi - p)p = \alpha - \beta p^2, \quad \alpha := \beta \xi.$$

Der Term $-\beta p^2$ kann auch wie folgt interpretiert werden. Er ist proportional zur Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Kontakte zweier Exemplare der Population pro Zeiteinheit. Dieser Term beschreibt die zunehmende Konkurrenzsituation bei zunehmender Populationsgröße (**sozialer Reibungsterm**).

Die Gleichung

$$p' = \alpha p - \beta p^2$$

wurde vom holländischen Mathematiker Verhulst vorgeschlagen und sie wird als **logistische Differentialgleichung** oder als **Gleichung des beschränkten Wachstums** bezeichnet.

Bei der Analyse von zeitabhängigen Differentialgleichungen sollte man zunächst nach zeitunabhängigen (stationären) Lösungen suchen. Diese sind Lösungen, für die die rechte Seite der Differentialgleichung verschwindet. Im Fall der logistischen Differentialgleichung erhalten wir $p(t) \equiv 0$ (keine Population) und $p(t) = \alpha/\beta = \xi$ (Grenzpopulation) als stationäre Lösungen.

Um die logistische Differentialgleichung im allgemeinen Fall zu lösen, kann die Methode der **Trennung der Variablen** benutzt werden. Aus

$$\frac{p'}{(\alpha - \beta p)p} = 1$$

folgt, daß

$$\frac{d}{dt} F(p(t)) = 1,$$

falls $F'(p) = \frac{1}{(\alpha - \beta p)p}$. Wir erhalten also

$$F(p(t)) = t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Mittels Partialbruchzerlegung sehen wir, daß

$$F(p) = \log \left| \frac{p}{\alpha - \beta p} \right|^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Auflösen nach p liefert dann (mit $p(t_0) = p_0$)

$$p(t) = \frac{\alpha p_0}{\beta p_0 + (\alpha - \beta p_0) e^{-\alpha(t-t_0)}}.$$

Die ausführliche Rechnung ist Teil der Übung. Wir stellen fest, daß

$$\begin{aligned} p(t) &\rightarrow \xi \quad \text{für } t \rightarrow \infty \quad 0 < p_0 < \xi, \\ p(t) &\rightarrow \xi \quad \text{für } t \rightarrow \infty \quad p_0 > \xi. \end{aligned}$$

Wie sieht der Graph von p aus? Es gilt

$$p'' = (p')' = (\alpha - 2\beta p)(\alpha - \beta p)p.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} p'' > 0 \quad p \in (0, \xi/2) \cup (\xi, \infty) &\quad \text{konvex gebogen} \\ p'' < 0 \quad p \in (\xi/2, \xi) &\quad \text{konkav gebogen.} \end{aligned}$$

Diese Aussage über die Lösung haben wir hergeleitet ohne die Lösung explizit zu kennen! Übung: Stellen Sie die Lösungen der logistischen Differentialgleichung dar.

Betrachten wir nun allgemeinere Situationen der Form

$$p' = r(p),$$

so bestimmen wir zunächst Nullstellen von r . Dies sind zeitunabhängige (stationäre) Lösungen. Die Frage ist nun: Ist eine stationäre Lösung p^* stabil gegen kleine Störungen? Eine erste Antwort gibt die **lineare Stabilitätsanalyse**. Dazu linearisieren wir um p^* , d.h. wir suchen eine Funktion

$$q(t) \approx p(t) - p^*,$$

als Lösung eines linearen Näherungsproblems

$$p' = r(p) = r(p^* + q) \approx \underbrace{r(p^*)}_{=0} + r'(p^*)q + O(q^2),$$

(wir nehmen an, daß $r \in C^2(\mathbb{R})$). Wegen $p = p^* + q$ folgt $p' = (p^*)' + q' = q'$. Also gilt

$$q' = r'(p^*)q,$$

mit der Lösung

$$q(t) = c e^{r'(p^*)t}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt: In der linearen Näherung wächst oder fällt die Störung q je nachdem, ob

$$r'(p^*) > 0 \quad \text{oder} \quad r'(p^*) < 0$$

gilt. Wir sagen dazu: p^* ist **linear stabil**, falls $r'(p^*) < 0$ und p^* ist **linear instabil**, falls $r'(p^*) > 0$. Es kann gezeigt werden, daß für p mit $p(t_0)$ nahe p^* gilt:

$$\begin{aligned} p(t) &\rightarrow p^*, \text{ falls } r'(p^*) < 0, \\ p(t) &\not\rightarrow p^*, \text{ falls } r'(p^*) > 0. \end{aligned}$$

Ablesen können wir das qualitative Verhalten der Lösungen einer Differentialgleichung auch an einem **Phasenporträt**: wir tragen in jedem Punkt $(p, 0)$ einen Vektor $(r(p), 0)$ an. Das entsprechende Vektorfeld nennt man **Richtungsfeld**. Es zeigt in welche Richtung sich die Lösung entwickelt und die Länge des Vektors gibt an, wie schnell sich p ändert. Mit Hilfe des Richtungsfeldes sieht man auch sehr schön, welche Ruhepunkte (das sind die Nullstellen von r) stabil und welche instabil sind. Dies hängt davon ab, ob das Vektorfeld in der Nähe der Nullstelle in Richtung der Nullstelle zeigt oder nicht. Die letzten Überlegungen zeigen sehr deutlich, daß man ein sehr gutes Bild von der Lösungsvielfalt und dem qualitativen Verhalten von Lösungen erzielen kann, ohne die Differentialgleichung explizit gelöst zu haben.

2.4 Räuber-Beute Modelle und Phasenportraits

Wir wollen nun ein einfaches Modell betrachten, das die zeitliche Entwicklung zweier Populationen beschreibt. Jedem mathematischen Modell liegen Modellannahmen zu Grunde und es beschreibt eine Vereinfachung (Idealisierung) der Wirklichkeit. Die Modellannahmen geben die wesentlichen Charakteristika an, die erfüllt sein müssen, damit ein Modell die Wirklichkeit zumindest annähernd beschreiben kann. Bei der Formulierung eines mathematischen Modells sollten daher stets die Modellannahmen mit angegeben werden.

Im weiteren gehen wir von den folgenden Modellannahmen aus: Es kommen zwei Populationen vor. Eine ist eine Räuber- und die andere eine Beutepopulation, z.Bsp. Hechte und Karpfen, Füchse und Hasen, Löwen und Antilopen. Es sei

$$\begin{aligned} x(t) : & \text{ Größe der Beutespezies zur Zeit } t, \\ y(t) : & \text{ Größe der Räuberspezies zur Zeit } t. \end{aligned}$$

Die Räuberpopulation ernährt sich ausschließlich von der Beutespezies. Ist keine Beute vorhanden, so sterben die Räuber mit der konstanten spezifischen Wachstumsrate $-\gamma$ ($\gamma > 0$), d.h. dann wäre

$$y'(t) = -\gamma y(t).$$

Ist nun Beute vorhanden, so ernähren sich die Räuber von der Beute und es kommt nicht so häufig zum Tod durch Verhungern. Wie häufig Räuber Beute machen ist nun proportional zur Größe der Räuberpopulation und zur Größe der Beutepopulation, d.h. ein Term

$$\delta x y$$

muß zur Gleichung addiert werden. Dies ist Ausdruck der folgenden Tatsache: Sind viele Räuber da, so machen sie insgesamt mehr Beute (doppelt so viele Räuber reißen doppelt so häufig Beute). Ist viel Beute da, so trifft die gleiche Anzahl Räuber häufiger auf Beute - ist doppelt soviel Beute vorhanden, so ist die Wahrscheinlichkeit auf einen Räuber zu treffen doppelt so hoch. Damit vervierfachen sich die Begegnungen zwischen Räuber und Beute, wenn sich sowohl Räuber als auch Beute verdoppeln. Dies drückt das gemischte Produkt $\delta x y$ aus. Insgesamt erhalten wir

$$y' = -\gamma y + \delta x y = y(\delta x - \gamma).$$

Die Beutespezies hat stets ausreichend Nahrung zur Verfügung und die Geburtenrate ist (falls kein Räuber vorhanden ist) höher als die Sterberate, d.h. ist $y = 0$ (keine Räuber), so gilt

$$x'(t) = \alpha x(t).$$

Sind Räuber da, so vermindert sich die Beutepopulation durch Räuber-Beute Kontakt durch den Term

$$-\beta x y.$$

Analog zu den Räubern ist die Anzahl der Kontakte proportional zu x und y . Insgesamt ergibt sich folgendes System von Differentialgleichungen

$$x' = (\alpha - \beta y) x, \quad y' = (\delta x - \gamma) y.$$

Wieder betrachten wir zunächst die Ruhepunkte des Systems. Wir suchen also Nullstellen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha - \beta y) x \\ 0 &= (\delta x - \gamma) y. \end{aligned}$$

Es ergeben sich zwei Lösungen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma/\delta \\ \alpha/\beta \end{pmatrix}$$

Das sind die beiden konstanten Lösungen. Im weiteren wollen wir versuchen, die Lösungsvielfalt des Differentialgleichungssystems zu bestimmen. Dazu bietet es sich zunächst an, die Anzahl der Freiheitsgrade durch Entdimensionalisierung zu reduzieren. Folgende Dimensionen ergeben sich:

$$[x] = A, [y] = A, [t] = T, \\ [\alpha] = [\gamma] = 1/T, [\beta] = [\delta] = 1/AT.$$

Wählen wir die Gleichgewichtslösung $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ als intrinsische Referenzgröße, so bietet sich folgende Entdimensionalisierung an

$$u = \frac{x}{(\gamma/\delta)}, \quad v = \frac{y}{(\alpha/\beta)}, \quad \tau = \frac{t - t_0}{t}.$$

Es zeigt sich, daß $\bar{t} = 1/\alpha$ eine gute Wahl ist und wir erhalten folgendes entdimensionalisiertes System

$$u' = (1 - v)u, \quad v' = a(u - 1)v \quad \text{mit} \quad a = \gamma/\alpha.$$

Hilfreich bei der Analyse eines Systems von zwei Differentialgleichungen

$$u' = f(u, v), \quad v' = g(u, v)$$

ist, sich das Richtungsfeld anzusehen. Dabei heften wir jedem Punkt in der (u, v) -Ebene den Vektor $(f(u, v), g(u, v))$ an. Eine Lösung des Differentialgleichungssystems ist dann eine parametrisierte Kurve im \mathbb{R}^2 , die in jedem Punkt den Vektor $(f(u, v), g(u, v))$ als Tangentialvektor besitzt. Zeichnen Sie das Richtungsfeld dieses Differentialgleichungssystems.

In einigen ausgezeichneten Fällen existiert für ein System von zwei Differentialgleichungen ein sogenanntes **erstes Integral H**. Dies ist eine Funktion H , so daß

$$\frac{d}{dt}H(u(t), v(t)) = 0 \tag{2.3}$$

für alle Lösungen des (u, v) des Differentialgleichungssystems. In unserem Fall ist

$$H(u, v) = -au - v + \ln u^a + \ln v$$

ein erstes Integral auf der Menge $(0, \infty)^2$. Die Funktion H hat ein Maximum im Ruhpunkt $(1, 1)$ und strebt gegen $-\infty$, wenn u oder v gegen 0 konvergieren. Zeichnen Sie die Niveaulinien von H und machen Sie sich die Beziehung zum Richtungsfeld klar.

Nichtkonstante Lösungen des Differentialgleichungssystems durchlaufen Niveaulinien von H . Die Gesamtheit der durch Lösungen eines Differentialgleichungssystems parametrisierten Kurven nennt man auch das **Phasenporträt** der Differentialgleichung. Das Phasenporträt vermittelt einen schnellen Überblick über das Lösungsverhalten.

Es lässt sich zeigen, daß Lösungen des behandelten Systems periodisch sind. Die Populationen durchlaufen also periodische Schwankungen. Sind viele Räuber und wenig Beute da, so nimmt die Räuberpopulation ab, da nicht genug Nahrung vorhanden ist. Wenn dann wenig Räuber da sind, kann die Beutepopulation wieder zunehmen, da sie nicht soviel gejagt wird. Überschreitet die Beutepopulation einen gewissen Schwellenwert, so ist wieder genügend Beute für die Räuber da, so daß die Anzahl zunehmen kann. Sind dann aber zuviele Räuber da, so nimmt die Beute wieder ab und wir sind wieder in der Situation wie am Periodenanfang.

2.5 Räuber-Beute-Modelle mit beschränktem Wachstum

Führen wir in dem Modell aus dem vorhergehenden Abschnitt nun soziale Reibungsterme ein, die zunehmende Konkurrenz beschreiben, so erhalten wir

$$x' = (\alpha - \beta y)x - \lambda x^2 = (\alpha - \beta y)x - \lambda x)x, \\ y' = (\delta x - \gamma)y - \mu y^2 = (\delta x - \gamma - \mu y)y$$

mit positiven Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$. Zur Bestimmung des Richtungsfeldes nutzen wir, daß entlang der Geraden

$$G_x : \alpha - \beta y - \lambda x = 0$$

die rechte Seite der ersten Gleichung verschwindet und entlang der Geraden

$$G_y : \delta x - \gamma - \mu y = 0$$

die rechte Seite der zweiten Gleichung verschwindet. Die Gerade G_x hat negative Steigung (als Funktion von x) und die Gerade G_y hat positive Steigung (auch als Funktion von x). Falls die Geraden keinen Schnittpunkt im positiven Quadranten haben, so ist das Richtungsfeld wie in Abb. 6?? gegeben. In diesem Fall gibt es zwei im Sinne der Anwendungen sinnvolle stationäre Lösungen, nämlich $(0, 0)$ und $(\alpha/\delta, 0)$. Es lässt sich zeigen, daß alle Lösungen mit Anfangswerten (x_0, y_0) , $(x_0 > 0, y_0 \geq 0)$ gegen $(\alpha/\delta, 0)$ konvergieren (für $t \rightarrow \infty$). D.h. die Räuberpopulation stirbt stets aus. Das werden Sie in der Übung zeigen. Die stationären Lösungen in $(0, \infty)^2$ sind $(0, 0)$, $(\alpha/\lambda, 0)$ und der Schnittpunkt

$$(\xi, \eta) = \left(\frac{\alpha \mu + \beta \gamma}{\lambda \mu + \beta}, \frac{\alpha \delta - \lambda \gamma}{\lambda \mu + \beta \gamma} \right),$$

, der Geraden G_x und G_y .

Wir wollen nun untersuchen, ob die stationären Lösungen stabil sind, d.h. wir müssen untersuchen, wie sich die Lösung verhält wenn wir in der Nähe von (ξ, η) starten. Wir wollen bestimmen, ob jede Lösung, die zu einem Zeitpunkt nahe bei (ξ, η) liegt, auch zu allen späteren Zeiten nahe bei (ξ, η) liegt. Um diese Frage zu beantworten, wollen wir das Prinzip der linearisierten Stabilität verwenden.

2.6 Prinzip der linearisierten Stabilität

Es sei ein System von Differentialgleichungen

$$p' = f(p), \quad f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n, f \in C^2, \Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega \text{ offen}, \quad (2.4)$$

gegeben. Uns interessiert in diesem Abschnitt die Stabilität von stationären Lösungen, d.h. von Lösungen p^* von (11.7) die zeitunabhängig sind. Es gilt daher $f(p^*) = 0$. Das Studium der Stabilität von Gleichgewichtslösungen ist ein wichtiger Teil der sogenannten **qualitativen Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen**. Wir wollen die Stabilität von stationären Lösungen studieren **ohne** die Differentialgleichung explizit zu lösen (was in den meisten Fällen sowieso nicht möglich ist). Es zeigt sich, daß es ausreicht, die um p^* linearisierte Differentialgleichung zu betrachten, um schon gute Resultate über das Stabilitätsverhalten der stationären Lösung zu erhalten. Zunächst aber müssen wir den Begriff der Stabilität präzise formulieren.

Definition 2.1 (Stabilität)

Eine stationäre Lösung p^* der Differentialgleichung $p' = f(p)$ heißt

1. **stabil**, wenn zu jeder Umgebung U von p^* eine Umgebung V von p^* existiert, so daß für jede Lösung der Anfangswertprobleme

$$p' = f(p), \quad p(0) = \tilde{p} \in V$$

gilt:

$$p(t) \in U \quad \text{für alle } t > 0,$$

2. **instabil**, falls sie nicht stabil ist.

3. Eine stationäre Lösung heißt **asymptotisch stabil**, falls eine Umgebung W von p^* existiert, so daß für jede Lösung der Anfangswertprobleme

$$p' = f(p), \quad p(0) = \tilde{p} \in W$$

gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p^*.$$

Beispiele:

1. Die stationäre Lösung ξ der Gleichung des beschränkten Wachstums

$$p' = r(p) := \beta(\xi - p) p$$

ist stabil und die stationäre Lösung 0 des gleichen Systems ist instabil. Wie wir schon anschaulich im Abschnitt 1.2 gesehen haben, bestimmt das Vorzeichen von $r'(p^*)$, ob eine stationäre Lösung p^* stabil oder instabil ist. Die Beobachtung, daß die erste Ableitung für die Stabilität wichtig ist, werden wir in Kürze verallgemeinern.

2. Der Ruhepunkt $(1, 1)$ des entdimensionalisierten Räuber-Beute Modells

$$\begin{aligned} u' &= (1 - v) u \\ v' &= a(u - 1) v \end{aligned}$$

ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil, da nicht jede Lösung, die in der Nähe der $(1, 1)$ startet, für große Zeiten gegen $(1, 1)$ konvergiert.

Das Prinzip der linearisierten Stabilität beruht nun darauf, daß man die Differentialgleichung bzgl. p^* linearisiert. Wir suchen

$$q(t) = p(t) - p^*$$

als Lösung eines linearen Näherungsproblems. Es gilt

$$p' = f(p) = f(q + p^*) = f(p^*) + Df(p^*) q + O(q^2).$$

Wir suchen nun q als Lösung von

$$q' = Df(p^*) q.$$

Das ist ein System von linearen Differentialgleichungen. Der Ursprung (die Null-Lösung) ist stationäre Lösung dieses Differentialgleichungssystems und wir können die Stabilität dieser Lösung untersuchen.

Definition 2.2 (Lineare Stabilität)

Wir sagen p^* ist linear stabil (linear instabil oder linear asymptotisch stabil), falls 0 stabile (instabile oder asymptotisch stabile) Lösung der linearisierten Gleichung ist.

Das Prinzip der **linearisierten Stabilität** lautet nun:

1. p^* ist linear asymptotisch stabil $\Rightarrow p^*$ ist asymptotisch stabil.
2. $Df(p^*)$ besitzt Eigenwerte λ mit $re(\lambda) > 0 \Rightarrow p^*$ ist instabil.

Analoge Aussagen des obigen Prinzips lassen sich für allgemeine Evolutionsgleichungen formulieren (z. Bsp. auch für partielle Differentialgleichungen und für Integralgleichungen). Diese Aussagen sind allerdings oft schwierig zu beweisen. Für gewöhnliche Differentialgleichungen gilt allerdings die folgende Aussage:

Satz 2.3

Das Prinzip der linearisierten Stabilität ist in der oben formulierten Fassung gültig. ■

Beweis. Siehe das Buch von Amman.

2.7 Stabilität linearer Systeme

Die Aufgabe, die Stabilität stationärer Lösungen zu bestimmen, ist nun also im wesentlichen darauf zurückgeführt, die Stabilität der Null-Lösung von linearen Differentialgleichungssystemen zu untersuchen.

Gegeben sei nun das lineare Differentialgleichungssystem

$$x' = A \cdot x \quad \text{mit } A \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

In diesem Abschnitt betrachten wir Differentialgleichungen, deren Lösungen Werte im Raum \mathbb{C}^n besitzen. Dies führt dann auf eine Gleichung für den Real- und Imaginärteil.

Sei nun \tilde{x} eine Eigenvektor von A zum Eigenwert λ , d.h.

$$A\tilde{x} = \lambda \tilde{x}.$$

Dann ist

$$x(t) = e^{\lambda t} \tilde{x}$$

Lösung von

$$x' = A.x,$$

da

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t} \tilde{x} = A.e^{\lambda t} \tilde{x} = A.x(t).$$

Sei nun $|x|$ die euklidische Norm von $x \in \mathbb{C}^n$, dann gilt

$$|x(t)| = |e^{\lambda t} \tilde{x}| = |e^{(re(\lambda) + i \operatorname{im}(\lambda))t}| |\tilde{x}| = e^{re(\lambda)t} |\tilde{x}|.$$

Das Vorzeichen von $re(\lambda)$ legt fest, ob $e^{re(\lambda)t}$ gegen Null oder gegen unendlich strebt.

Annahme: A ist diagonalisierbar (z.Bsp. falls A symmetrisch wäre), d.h. es existiert eine Basis $\{x_1, \dots, x_n\}$ aus Eigenvektoren zu Eigenwerten $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ (eventuell alles komplex). Sei nun $x_0 \in \mathbb{C}^n$ beliebig. Dann finden wir eine Darstellung von x_0 in dieser Basis

$$x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

Dann löst

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} x_i,$$

das Anfangswertproblem

$$x'(t) = A.x(t), \quad x(0) = x_0.$$

(jedes x_i ist ja Eigenvektor). Gilt nun

$$re(\lambda_i) < 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

so schließen wir

$$|x(t)| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| e^{re(\lambda_i)t} |x_i| \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Dies zeigt, daß der Punkt 0 in diesem Fall asymptotisch stabil ist. Gilt andererseits

$$re(\lambda_j) > 0 \quad \text{für ein } j,$$

so gilt für $x_0 = \alpha x_j$, $\alpha \neq 0$

$$|x(t)| = |\alpha| e^{re(\lambda_j)t} |x_j| \rightarrow \infty \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Dies zeigt, daß der Punkt 0 in diesem Fall instabil ist. Es gilt der folgenden Satz

Satz 2.4

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ beliebig. Insbesondere ist in i) und ii) nicht vorausgesetzt, daß A diagonalisierbar ist.

- Der stationäre Punkt 0 ist asymptotisch stabile Lösung von $x' = A.x$ genau dann wenn $re(\lambda) < 0$ für alle Eigenwerte von A .

2. Gilt $re(\lambda) > 0$ für einen Eigenwert λ von A , so ist der stationäre Punkt 0 instabile Lösung von $x' = Ax$.
3. Ist A zusätzlich diagonalisierbar, so gilt: der stationäre Punkt 0 ist stabile Lösung von $x' = Ax$ genau dann wenn $re(\lambda) \leq 0$ für alle Eigenwerte von A .

Für diagonalisierbare Matrizen A haben wir den Satz oben gezeigt. Falls A nicht diagonalisierbar ist, ist der Beweis der Aussagen *i*) und *ii*) etwas aufwendiger. Wir verweisen auf das Buch von Amann. Zusammen mit dem Prinzip der linearisierten Stabilität erlaubt dieser Satz die Analyse des Stabilitätsverhaltens von stationären Punkten nichtlinearer Systeme. Wir weisen aber darauf hin, daß wir im Fall

$$\begin{aligned} re(\lambda) &\leq 0 && \text{für alle Eigenwerte } \lambda \text{ der Linearisierung,} \\ re(\lambda) &= 0 && \text{für mindestens einen Eigenwert } \lambda \text{ der Linearisierung,} \end{aligned}$$

im allgemeinen keine Aussage über die Stabilität von Ruhepunkten machen können.

2.8 Stabilität der Ruhepunkte im Räuber-Beute-Modell

Das System

$$\begin{aligned} x'(t) &= (\alpha - \beta y) x \\ y'(t) &= (\delta x - \gamma) y \end{aligned}$$

besitzt die stationären Lösungen $(0, 0)$ und $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$. Setzen wir

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} (\alpha - \beta y) x \\ (\delta x - \gamma) y \end{pmatrix}$$

so erhalten wir für die Jacobimatrix Df

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} (\alpha - \beta y) & -\beta x \\ \delta y & (\delta x - \gamma) \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

D.h. der Punkt $(0, 0)$ ist instabil, da $Df(0, 0)$ den negativen Eigenwert $-\gamma$ besitzt. Außerdem gilt

$$Df(\gamma/\delta, \alpha/\beta) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta\gamma/\delta \\ \alpha\delta/\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörigen Eigenwerte lauten

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha\gamma}.$$

Da $re(\lambda_1) = re(\lambda_2) = 0$ können wir aus dem Prinzip der linearisierten Stabilität keine Aussage über das Stabilitätsverhalten des stationären Punktes $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ erhalten.

Im Fall des Räuber-Beute-Systems mit beschränktem Wachstum

$$\begin{aligned} x' &= (\alpha - \beta y - \lambda x) x \\ y' &= (\delta x - \gamma - \mu y) y, \end{aligned}$$

wollen wir die Stabilität der stationären Lösung

$$(\xi, \eta) = \left(\frac{\alpha\mu + \beta\gamma}{\lambda\mu + \beta}, \frac{\alpha\delta - \lambda\gamma}{\lambda\mu + \beta\gamma} \right)$$

untersuchen. Wir berechnen

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y - 2\lambda x & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma - 2\mu y \end{pmatrix}$$

und

$$Df(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \lambda\xi & -\beta\xi \\ \delta\eta & -\mu\eta \end{pmatrix}.$$

Für die Eigenwerte von $Df(\xi, \eta)$ errechnet man

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\lambda\xi + \mu\eta) \pm \sqrt{(\lambda\xi + \mu\eta)^2 - 4\xi\eta(\lambda\mu + \delta\beta)}}{2}.$$

Für $\xi > 0$ und $\eta > 0$ ist $\xi\eta(\lambda\mu + \delta\beta) > 0$ und damit erhalten wir

$$re(\lambda_i) < 0, \quad i = 1, 2.$$

D.h. falls die Geraden G_x und G_y sich im positiven Quadranten schneiden, so erhalten wir, daß der Punkt (ξ, η) stabil ist. Das Phasenportait kann man dann skizzieren. Bemerkung: Qualitativ sehen die Lösungen in der Nähe des Ruhepunktes (ξ, η) aus wie die Lösungen des zugehörigen linearisierten Systems. Übungsaufgabe: Berechnen Sie die Lösungen des linearisierten Systems und zeichnen Sie das Phasenportait.

3 Dimensionen, Skalierungen und Störungsrechnung

In diesem Paragraphen wollen wir uns nochmal mit der Dimensionsanalyse beschäftigen. In vielen Problemen der Angewandten Mathematik tauchen kleine Parameter auf. Betrachten wir eine Gleichung in dimensionsbehafteter Form, so können Terme beliebig klein werden, indem die Einheiten geändert werden. Uns interessieren in diesem Zusammenhang daher nur **kleine dimensionslose Parameter**. Wir betrachten nur kleine Parameter, denn falls ein Parameter D groß sein sollte, betrachten wir den kleinen Parameter $\varepsilon = \frac{1}{D}$.

Schon im ersten Paragraphen haben wir versucht, so zu entdimensionieren, daß die resultierenden Größen von der Ordnung 1 sind. Dies führte auf das Problem intrinsische Referenzgrößen als neue Einheiten zu finden. Ein solches Vorgehen nennt man skalieren einer Gleichung. Wir zitieren: "In the process of scaling one attempts to select intrinsic reference quantities so that each term in the dimensional equations transforms into the product of a constant dimensional factor which closely estimates the term's order of magnitude and a dimensionless factor of unit order of magnitude." Hat man nun einen kleinen Parameter ε in der entdimensionalisierten Gleichung identifiziert, so bietet sich eine **Störungsrechnung** an, die auf einem Reihenansatz in ε beruht. Dieses Vorgehen wollen wir zum Abschluß dieses Paragraphen diskutieren.

Beispiel 1: Ein Körper der Masse m wird von der Erdoberfläche senkrecht mit der Geschwindigkeit v in die Höhe geschleudert.

Beispiel 2: Ein Pendel, das aus einem gewichtslosen Stab der Länge ℓ und einer Punktmasse m am Endpunkt besteht, wird aus einem Winkel θ_0 (zwischen Stab und Gravitationsrichtung) losgelassen. Die Bewegung wird dann durch $\theta(t)$, dem Winkel zwischen Stab und der Gravitationsrichtung zur Zeit t , beschrieben.

3.1 Dimensionslose Variablen und Parameter

Grundlegend bei der mathematischen Beschreibung von Naturvorgängen sind die beiden folgenden Tatsachen:

1. Physikalische Größen haben Dimensionen,
2. Physikalische Gesetze müssen unverändert bleiben, wenn die Maßeinheiten verändert werden.

Dabei meint die letzte Aussage, daß die Vorhersagen physikalischer Abläufe unabhängig von dem verwendeten Einheitensystem sein müssen.¹ Nun haben wir schon gesehen, daß es oft hilfreich ist, Gleichungen in eine entdimensionierte Form zu bringen. Das sogenannte **Buckingham II Theorem** besagt, daß dies im wesentlichen stets möglich ist. Grob gesprochen besagt das Theorem: Jede vollständige Gleichung impliziert eine Gleichung, in der alle Variablen in dimensionsloser Form vorliegen.

¹Es ist z.Bsp. egal, ob man die Zeit in Stunden oder Sekunden angibt, die Zeitdauer selbst ist dieselbe.

Eine vollständige Gleichung ist dabei eine Gleichung, die bzgl. allen Einheiten richtig ist. Will man ein mathematisch formuliertes Gesetz auf eine dimensionslose Form bringen, so ist es wichtig, Kombinationen der Parameter zu finden, die **dimensionslos** sind, oder die **Dimension der auftretenden Variablen haben**.

Wir betrachten zunächst **Beispiel 1:**

Annahme: Die Höhe über dem Erdboden $x(t)$ hängt von der Masse m , der Anfangsgeschwindigkeit v , der Gravitationsbeschleunigung g und dem Erdradius R ab. Die auftretenden Größen und ihre Dimension sind:²

$$[x] = L, [t] = T, [m] = M, [v] = L/T, [g] = L/T^2, [R] = L.$$

Welche dimensionslosen Parameter in der Produktform

$$\Pi = m^a v^b g^c R^d, \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z},$$

können auftreten? Folgende Dimension ergibt sich

$$[\Pi] = M^a \left(\frac{L}{T}\right)^b \left(\frac{L}{T^2}\right)^c L^d = M^a L^{b+c+d} T^{-b-2c}.$$

Damit Π dimensionslos ist, muss gelten³

$$a = 0, \quad b + c + d = 0, \quad b + 2c = 0.$$

D.h.

$$d = c b = -2c.$$

Es folgt

$$\Pi = \left(\frac{g R}{v^2}\right)^c = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^c \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \frac{v^2}{g R}.$$

Ein Zahlenbeispiel:

$$v = 10 \text{ m/s}, \quad g \approx 10 \text{ m/s}^2, \quad R \approx 10^7 \text{ m}$$

Dann gilt

$$\varepsilon = 10^{-6}.$$

Jetzt suchen wir eine Kombination X der Parameter, die dieselbe Einheit wie die Variable x (Höhe über dem Erdboden) besitzt, d.h.

$$X = m^a v^b g^c R^d, \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z},$$

und

$$[X] = L = M^a L^{b+c+d} T^{-b-2c}.$$

Daraus folgt

$$a = 0, \quad 1 = b + c + d, \quad 0 = b + 2c$$

und damit

$$a = 0, \quad d = 1 + c, \quad b = -2c.$$

²Machen Sie sich klar, daß es sinnlos wäre, irgendeine nichtlineare Funktion auf dimensionsbehaftete Größen anzuwenden, z.Bsp. $\sin(1m)$ ist sinnlos!

³Beliebige nichtlineare Abhängigkeiten können aber auf dimensionslose Argumente angewendet werden: $\sin(1m/\ell)$ ist möglich!

Nun suchen wir eine intrinsische Referenzgröße ℓ (Referenzlänge), die einem typischen Wert für die Höhe x entsprechen soll. Außerdem soll ℓ Kombination der Parameter sein. Es ergibt sich

$$\ell = \frac{v^2}{g} \left(\frac{Rg}{v^2} \right)^d = \frac{v^2}{g} \varepsilon^{-d} = R \left(\frac{Rg}{v^2} \right)^c = R \varepsilon^{-c}.$$

Suchen wir nun desgleichen eine Referenzgröße τ für die Zeit, die sich aus den Parametern berechnet, so erhalten wir

$$\tau = m^a v^b g^c R^d,$$

und damit

$$[\tau] = M^a \left(\frac{L}{T} \right)^b \left(\frac{L}{T^2} \right)^c L^d.$$

Daraus folgt

$$a = 0, \quad b + c + d = 0, \quad b + 2c = -1$$

und

$$d = c + 1, \quad b = -1 - 2c.$$

Für τ ergibt sich

$$\tau = \frac{v}{g} \left(\frac{Rg}{v^2} \right)^d = \frac{v}{g} \varepsilon^{-d} = \frac{R}{v} \left(\frac{Rg}{v^2} \right)^d = \frac{R}{v} \varepsilon^{-c}.$$

Es ergeben sich die zwei Möglichkeiten für τ

$$\tau = \frac{v}{g} \quad \text{oder} \quad \tau = \frac{R}{v}.$$

Beispiel 2 (das Pendel) Wir suchen eine Formel, die die Periode t^* der Oszillation des Pendels mit den Parametern des Problems in Verbindung bringt. Folgende Parameter nehmen wir als relevant an: (Masse m , Erdbeschleunigung g , Pendellänge ℓ)

$$[m] = M, \quad [g] = L/T^2, \quad \ell = L.$$

Wir machen den Ansatz

$$t^* = \delta \cdot \ell^a m^b g^c,$$

wobei δ eine dimensionslose Konstante ist. Für die Dimension erhalten wir

$$[t^*] = [\delta] [\ell]^a [m]^b [g]^c \Leftrightarrow T = L^a M^b L^c T^{-2c},$$

und damit

$$b = 0, \quad c = -\frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{2}.$$

Das heißt, die einzige Formel, die dem gemachten Ansatz genügt ist

$$t^* = \delta \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Dabei muß die Zahl δ durch Experimente bestimmt werden (aber es zeigt sich, daß $\delta = 2\pi$ ist). Diese Formel für die Schwingungsdauer t^* des Pendels ist eine gute Näherung für nicht zu schnelle Bewegungen des Pendels.

3.2 Skalierungen

Berücksichtigt man in mathematischen Modellen sämtliche in Frage kommenden Einflüsse, so werden die Problemstellungen häufig zu komplex. Daher versucht man "kleine" Terme zu vernachlässigen. Um diese "kleinen" Terme zu identifizieren, muß man die Gleichung möglichst auf eine dimensionslose Form bringen, und zwar so, daß die Größenordnung der Terme in der entdimensionierten Form durch dimensionslose Vorfaktoren beschrieben werden. Diese Form der Entdimensionierung nennt man auch Skalierung. Wir diskutieren die Skalierung anhand von **Beispiel 1**.

Unter Vernachlässigung von Reibungskräften wird die Bewegung eines Körpers, der senkrecht von der Erdoberfläche mit der Anfangsgeschwindigkeit v in die Höhe geschleudert wird, durch folgendes Anfangswertproblem beschrieben:

$$x''(t) = -\frac{g R^2}{(x(t) + R)^2}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = v.$$

Dabei gibt $x(t)$ die Höhe des Körpers über der Erdoberfläche zur Zeit t an. Die obige Differentialgleichung folgt aus dem Newtonschen Gesetz: Beschleunigung = Kraft · Masse, wobei die Kraft gegeben ist durch die Identität

$$\text{Kraft} = -\frac{G m_1 m_2}{(x + R)^2}.$$

$(x + R)$: Abstand der Schwerpunkte der beiden Körper, m_1, m_2 Gewicht der beiden Körper, G Gravitationskonstante. Außerdem gilt

$$\text{Kraft}(x = 0) = -m_1 g, \quad g : \text{Gravitationsbeschleunigung},$$

so daß

$$R^2 g = G m_2,$$

und insgesamt die Differentialgleichung folgt. Wenn wir zunächst versuchen das Problem zu entdimensionalisieren, ohne unsere physikalische Intuition zu nutzen, so bietet sich folgendes allgemeines Verfahren an:

$$\tau = t/t^*, \quad y(\tau) = x(t)/\ell$$

wobei t^* und ℓ Referenzgrößen sind, so daß τ und y dimensionslos sind (d.h. $[t^*] = T$ und $[\ell] = L$). Wir wollen t^* und ℓ in Abhängigkeit der Parameter des Problems wählen, d.h.

$$t^* = t^*(v, g, R), \quad \ell = \ell(v, g, R).$$

Es folgt nach umrechnen der entsprechenden Ableitungen (Kettenregel):

$$\frac{\ell}{(t^*)^2} y''(\tau) = -\frac{g}{(y \frac{\ell}{R} + 1)^2}, \quad y(0) = 0, \quad \frac{\ell}{t^*} y'(0) = v,$$

oder

$$\frac{\ell}{(t^*)^2 g} y''(\tau) = -\frac{1}{(y \frac{\ell}{R} + 1)^2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = v \frac{t^*}{\ell}.$$

Wir wollen jetzt ℓ und t^* so wählen, dass möglichst viele der Koeffizienten

$$\frac{\ell}{(t^*)^2 g}, \quad \frac{\ell}{R}, \quad v \frac{t^*}{\ell},$$

gleich eins sind.

Folgende Möglichkeiten bestehen (dabei ist wieder $\varepsilon = \frac{v^2}{gR}$)

$$\text{a.) } \frac{\ell}{(t^*)^2 g} = 1, \quad \frac{\ell}{R} = 1 \Rightarrow \ell = R, t^* = \sqrt{\frac{R}{g}} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{(y+1)^2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{v}{\sqrt{Rg}} = \sqrt{\varepsilon}.$$

b.) $\frac{\ell}{R} = 1, \frac{t^*}{\ell} v = 1 \Rightarrow \ell = R, t^* = R/v \Rightarrow \frac{v^2}{Rg} y'' = -\frac{1}{(y+1)^2}, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

c.) $\frac{\ell}{(t^*)^2 g} = 1, \frac{t^*}{\ell} v = 1 \Rightarrow t^* = v/g = \frac{R}{v} \frac{v^2}{gR} = R/v, \ell = v^2/g \Rightarrow y'' = -\frac{1}{(\varepsilon y+1)^2}, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Im Fall c.) gilt

$$\varepsilon = \frac{v^2}{Rg} = \frac{v^2/g}{R} = \frac{\ell}{R},$$

d.h. ε lässt sich schreiben als Quotient zweier Längenskalen. Ist ℓ (und ℓ sollte intrinsische Längenskala für x sein) klein im Vergleich zum Erdradius, so ist ε klein. In diesem Fall (wenn x/ℓ wirklich von der Größenordnung 1 ist und wenn $\ell \ll R$), können wir den Term εy als kleinen Term identifizieren.

Jetzt wollen wir versuchen die Gleichungen zu lösen, die entstehen, wenn wir $\varepsilon = 0$ setzen.

a.) $y'' = -\frac{1}{(y+1)^2}, y(0) = 0, y'(0) = 0$. Daraus folgt daß $y(\tau) < 0$ für $\tau > 0$ was offensichtlich unsinnig ist. In diesem Fall sind die Raum und Zeitskalen schlecht gewählt. Der Körper ist schon wieder auf dem Boden, bevor die gewählte Zeitskala überhaupt bemerkt hat, daß er in der Luft war und er fällt dann weiter zum Erdmittelpunkt. Für unser Zahlenbeispiel ($v = 10 \text{ m/s}, g \approx 10 \text{ m/s}^2, R \approx 10^7 \text{ m}$) erhalten wir:

$$\ell = 10^7 \text{ m} \quad (\text{keine typische Länge im Problem, zu groß!}),$$

$$t^* = \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 10^3 \text{ s} \quad (\text{keine typische Zeit im Problem, zu groß!}).$$

b.) $0 = -\frac{1}{(y+1)^2}, y(0) = 0, y'(0) = 1$. Dieses Problem besitzt keine Lösungen. Wieder sind die Zeit- und Raumskalen ungünstig. Für das Zahlenbeispiel erhalten wir:

$$\ell = 10^7 \text{ m}, t^* = R/v = 10^6 \text{ s}.$$

c.) In diesem Fall erhalten wir eine sinnvolle Lösung:

$$y'' = -1, y(0) = 0, y'(0) = 1 \Rightarrow$$

$$y(\tau) = \tau - \frac{1}{2}\tau^2$$

$$x(t) = vt - \frac{gt^2}{2}$$

Das Maximum von x wird zur Zeit

$$\bar{t} = \frac{v}{g},$$

angenommen und es gilt

$$x(\bar{t}) = \frac{v^2}{2g}.$$

Die Vereinfachung die zu c.) führte, setzt voraus, daß

$$\varepsilon \ll 1$$

und $x/(\frac{v^2}{g})$ von der Größenordnung 1 (oder kleiner) ist. Die obige Lösung des vereinfachten Problems zeigt, daß die zweite Voraussetzung erfüllt bleibt, falls $\varepsilon \ll 1$ ist. Außerdem sehen wir, daß die

$$\text{Zeitskala} \quad t^* = \frac{v}{g},$$

$$\text{Längenskala} \quad \ell = \frac{v^2}{g},$$

gut gewählt sind (t^* ist die Zeit zu der der Körper seine maximale Höhe annimmt, ℓ ist die doppelte Höhe die der Körper erreicht). Sie sind im besten Sinne intrinsische Referenzeinheiten.

4 Regulär gestörte Probleme und asymptotische Entwicklungen

Tauchen in einer Gleichung Terme mit einem kleinen Parameter ε auf, so ist es möglich Näherungslösungen zu konstruieren, indem man die Gleichung löst, in der alle Terme die ε enthalten, vernachlässigt werden. Nun kann man versuchen die Näherung zu verbessern, indem man Terme höherer Ordnung in ε hinzufügt. Diese Korrekturwerte wollen wir als Lösungen von Gleichungen erhalten, die sich ergeben, wenn die ursprüngliche Gleichung zu einer gewissen Ordnung in ε erfüllt sein soll. Wir wollen dieses vorgehen, d.h. die Methode der asymptotischen Entwicklung zunächst an einem einfachen algebraischen Beispiel diskutieren.

Wir betrachten die quadratische Gleichung

$$x^2 + 0.002x - 1 = 0. \quad (4.1)$$

Der zweite Summand hat einen kleinen Vorfaktor. Setzen wir $\varepsilon = 0.001 \ll 1$, so erhalten wir

$$x^2 + 2\varepsilon x - 1 = 0. \quad (4.2)$$

Wir nehmen an, daß die Lösungen dieser Gleichung eine Reihenentwicklung der Form

$$x = x_0 + \varepsilon^\alpha x_1 + \varepsilon^{2\alpha} x_2 + \dots, \alpha > 0,$$

besitzen. Wir setzen diese Entwicklung nun in die Gleichung ein und erhalten

$$x_0^2 + 2\varepsilon^\alpha x_0 x_1 + \dots + 2\varepsilon(x_0 + \varepsilon^\alpha x_1 + \dots) - 1 = 0.$$

Wenn diese Identität richtig sein soll, muß sie insbesondere für kleine ε richtig sein. D.h. alle Terme, die keinen Faktor ε oder ε^α besitzen, müssen sich zu Null addieren. Solche Terme nennt man von der Ordnung 1. Wir schreiben $O(1)$ bzw. $O(\varepsilon)$ und sammeln dabei nur die Terme, die genau von der Ordnung 1 bzw. ε sind. Der entsprechende Koeffizientenvergleich liefert für den Absolutterm

$$O(1) : \quad x_0^2 - 1 = 0.$$

Die Lösungen sind $x_0 = \pm 1$. Insbesondere hat die Gleichung zur Ordnung $O(1)$ genau so viele Lösungen wie das ursprüngliche Problem. Dies ist eine Voraussetzung, um von einem **regulär gestörten Problem** zu sprechen.

Jetzt betrachten wir die Terme zur nächsthöheren Ordnung in ε . Hier hängt es davon ab, ob $\alpha < 1, \alpha > 1$ oder $\alpha = 1$ gilt. Ist $\alpha < 1$, so folgt $0 = x_1 = x_2 = x_3 = \dots$. Dies scheint also kein vernünftiger Ansatz zu sein. Es ist allerdings auch nicht möglich $\alpha > 1$ zu wählen. Warum?

Somit bleibt nur die Möglichkeit $\alpha = 1$ zu wählen und wir erhalten zur Ordnung ε die Gleichung

$$O(\varepsilon) : \quad 2x_0 x_1 + 2x_0 = 0.$$

Die einzige Lösung dazu ist $x_1 = 1$. Berücksichtigen wir auch die Terme zur nächsthöheren Ordnung in der Identität, so erhalten wir

$$x_0^2 + 2\varepsilon x_0 x_1 + \varepsilon^2 x_1^2 + 2\varepsilon^2 x_2 x_0 + \dots + 2\varepsilon(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots) = 0$$

und die Terme von der Ordnung ε^2 ergeben die Identität

$$O(\varepsilon^2) : \quad x_1^2 + 2x_2 x_0 + 2x_1 = 0,$$

und damit ergibt sich

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_0)^{-1} = \pm \frac{1}{2}.$$

Wir erhalten unsere ursprüngliche quadratische Gleichung indem wir $\varepsilon = 10^{-3}$ setzen und wir erwarten, daß die Zahlen

$$x_0, x_0 + \varepsilon x_1, x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2, \dots$$

gute Näherungen der Lösung zu $x^2 + 2\epsilon x - 1 = 0$ sind, falls wir $\epsilon = 10^{-3}$ setzen. Das funktioniert tatsächlich. Für die positive Lösung gilt z.Bsp.

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, \\ x_0 + \epsilon x_1 &= 0.999, \\ x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 &= 0.9990005, \\ x_{\text{exakt}} &= 0.9990005\dots \end{aligned}$$

D.h. die Reihenentwicklung liefert also schon bei der Berücksichtigung weniger Terme sehr gute Näherungen. Interessant wird dieses Vorgehen natürlich erst bei komplexen Problemen.

Wir wollen die Methode der asymptotischen Entwicklungen nun auf das **Beispiel 1** anwenden. Wir suchen Näherungslösungen des Differentialgleichungsproblems

$$y'' = -\frac{1}{(\epsilon y + 1)^2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad (4.3)$$

für kleine Zahlen $\epsilon > 0$. Wir machen einen formalen Reihenansatz für y der Form (in der Differentialgleichung gesucht ist eine Funktion y , also sind die Glieder des Ansatzes nun auch Funktionen)

$$y(\tau) = y_0(\tau) + \epsilon y_1(\tau) + \epsilon^2 y_2(\tau) + \dots \quad (4.4)$$

Wir setzen voraus, daß Ableitungen von y sich durch termweises Differenzieren berechnen lassen (das muß i. Allgemeinen nicht richtig sein). Jetzt setzen wir die Reihenentwicklung in die Differentialgleichung und in die Randbedingung ein und erhalten

$$\begin{aligned} y_0''(\tau) + \epsilon y_1''(\tau) + \epsilon^2 y_2''(\tau) + \dots &= \frac{-1}{(1 + \epsilon(y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \dots))^2} \\ &= -1 + 2\epsilon y_0 + 2\epsilon^2 y_1 - 3\epsilon^2 y_0^2 + \dots \end{aligned}$$

Hier haben wir die Reihenentwicklung (Taylorentwicklung um den Nullpunkt)

$$\begin{aligned} f(x) = f(0 + x) &= \frac{1}{(1 + x)^2} \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots \\ &= 1 - 2x + 3x^2 + \dots \end{aligned}$$

ausgenutzt. Für die Anfangsbedingung ergibt sich entsprechend

$$\begin{aligned} y_0(0) + \epsilon y_1(0) + \epsilon^2 y_2(0) + \dots &= 0, \\ y_0'(0) + \epsilon y_1'(0) + \epsilon^2 y_2'(0) + \dots &= 1. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert zu höchster Ordnung in ϵ das Anfangswertproblem

$$O(1) : \quad y_0'(\tau) = -1, \quad y_0(0) = 0, \quad y_0'(0) = 1.$$

Des Weiteren zu den folgenden Ordnungen aus dem Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} O(\epsilon) : \quad y_1''(\tau) &= 2y_0(\tau), \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0, \\ O(\epsilon^2) : \quad y_2''(\tau) &= 2y_1(\tau) - 3y_0^2(\tau), \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich nun **sukzessive** (der Reihe nach, unabhängig voneinander) lösen und wir erhalten:

$$\begin{aligned} y_0(\tau) &= \tau - \frac{1}{2}\tau^2, \\ y_1''(\tau) = 2\tau - \tau^2 \Rightarrow y_1(\tau) &= \frac{1}{3}\tau^3 - \frac{1}{12}\tau^4, \\ y_2''(\tau) = \frac{2}{3}\tau^3 - \frac{1}{6}\tau^4 - 3\tau^2 + 3\tau^3 - \frac{3}{4}\tau^4 \\ \Rightarrow y_2(\tau) &= -\frac{11}{360}\tau^6 + \frac{11}{60}\tau^5 - \frac{1}{4}\tau, \end{aligned}$$

und als Reihenentwicklung in ε ergibt sich

$$y(\tau) \approx \tau - \frac{1}{2}\tau^2 + \varepsilon \left(\frac{1}{3}\tau^3 - \frac{1}{12}\tau^4 \right) + \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{4}\tau^4 + \frac{11}{60}\tau^5 - \frac{11}{360}\tau^6 + \dots \right) + \dots$$

Natürlich kann man das Verfahren weiter fortführen und auch Terme höherer Ordnung berechnen.

Wir stellen uns die Frage: Wann ist die Höhe des in die Luft geworfenen Körpers maximal? Dazu machen wir für den Zeitpunkt τ_{\max} an dem die Höhe maximal ist:

$$\tau_{\max} = \tau_0 + \varepsilon\tau_1 + \varepsilon^2\tau_2 + \dots$$

Wir wollen τ_{\max} approximativ bestimmen, indem wir die Gleichung $y'(\tau) = 0$ näherungsweise lösen (ist die Höhe maximal, verschwindet die erste Ableitung von y natürlich). Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= y'(\tau) = y'_0(\tau) + \varepsilon y'_1(\tau) + \dots \\ &= 1 - \tau + \varepsilon(\tau^2 - \frac{1}{3}\tau^3) + \dots \\ &= 1 - \tau_0 - \varepsilon\tau_1 + \varepsilon\tau_0^2 - \varepsilon\frac{1}{3}\tau_0^3 + \dots \end{aligned}$$

Lösen wir die Gleichungen der Ordnung 1 und ε , so erhalten wir

$$\begin{aligned} O(1) : \quad \tau_0 &= 1, \\ O(\varepsilon) : \quad \tau_1 &= \tau_0^2 - \frac{1}{3}\tau_0^3 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\tau_{\max} \approx 1 + \frac{2}{3}\varepsilon + \dots$$

und damit als Näherung für die maximale Höhe

$$\begin{aligned} y_{\max} &\approx y(\tau_{\max}) = (1 + \frac{2}{3}\varepsilon) - \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{3}\varepsilon)^2 + \varepsilon(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}) + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \varepsilon(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \dots \end{aligned}$$

Das heißt, falls wir berücksichtigen, daß sich die Schwerkraft erniedrigt, wenn der Körper sich von der Erde entfernt, so erhalten wir, daß sich die maximale Höhe vergrößert was physikalisch gesehen sinnvoll ist.

Das Vorgehen bei der Bestimmung der asymptotischen Entwicklung kann nun auch allgemeiner formuliert werden. Wir formulieren das Vorgehen in Banachräumen um auch asymptotische Entwicklungen mit einzuschließen, in denen Funktionen gesucht werden, wie im letzten Beispiel.

Es seien B_1, B_2 Banachräume (z.Bsp. Funktionenräume differenzierbarer Funktionen etc.) und es sei die Abbildung

$$F : B_1 \times [0, \varepsilon_0) \mapsto B_2$$

glatt, d.h. so oft differenzierbar, wie es für die folgenden Überlegungen notwendig ist. Wir suchen für $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ eine Lösung y^ε der Gleichung

$$F(y, \varepsilon) = 0.$$

Wir machen dazu den Ansatz

$$y^\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i y_i,$$

und entwickeln $\varepsilon \mapsto G(\varepsilon) = F(y^\varepsilon, \varepsilon)$ um $\varepsilon = 0$ in seine Taylorreihe:

$$F(y^\varepsilon, \varepsilon) = G(\varepsilon) = G(0) + \varepsilon G'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} G''(0) + \dots,$$

wobei

$$\begin{aligned}
G(0) &= F(y_0, 0) \\
G'(\varepsilon) &= \frac{d}{d\varepsilon} (F(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots, \varepsilon)) \\
&= D_1 F(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots, \varepsilon) \cdot [y_1 + 2\varepsilon y_2 + \dots] + D_2 F(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots, \varepsilon) \cdot 1 \\
G'(0) &= D_1 F(y_0, 0) \cdot [y_1] + D_2 F(y_0, 0) \\
G''(\varepsilon) &= D_1^2 F(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots, \varepsilon) \cdot [y_1 + 2\varepsilon y_2 + \dots]^2 + D_1 F(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots, \varepsilon) \cdot [2y_2 + \dots] \\
&\quad + D_{12} F(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots, \varepsilon) [y_1 + 2\varepsilon y_2 + \dots] \\
&\quad + D_{21} F(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots, \varepsilon) [y_1 + 2\varepsilon y_2 + \dots] + D_2^2 F(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots, \varepsilon) \cdot 1 \\
G''(0) &= D_1^2 F(y_0, 0) \cdot [y_1]^2 + D_1 F(y_0, 0) \cdot [2y_2] + 2D_{21} F(y_0, 0) [y_1] + D_2^2 F(y_0, 0) \cdot 1 \\
&\quad \dots
\end{aligned}$$

Nach sortieren der Koeffizienten nach der Ordnung von ε ergeben sich die (voneinander unabhängigen) Gleichungen (Gleichungssysteme)

$$\begin{aligned}
G(0) &= 0 \Leftrightarrow F(y_0, 0) = 0, \\
G'(0) &= 0 \Leftrightarrow D_1 F(y_0, 0) \cdot [y_1] = -D_2 F(y_0, 0) \\
G''(0) &= 0 \Leftrightarrow D_1 F(y_0, 0) \cdot [y_2] = -\frac{1}{2} D_1^2 F(y_0, 0) \cdot [y_1]^2 - D_{21} F(y_0, 0) \cdot y_1 - D_2^2 F(y_0, 0), \\
&\quad \dots
\end{aligned}$$

Falls die lineare Abbildung $D_1 F(y_0, 0) : B_1 \mapsto B_2$ eine Inverse besitzt, so können die Werte y_1, y_2, y_3, \dots iterativ berechnet werden.

Definition 4.1 (Asymptotische Entwicklung)

Sind die Werte $y_0, y_1, y_2, \dots, y_N$ Lösungen der obigen Gleichungen, so heißt die Reihe

$$y^N := \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i y_i$$

formale asymptotische Entwicklung der Ordnung N .

Frage: Wann liefern durch einen kleinen Parameter ε "gestörte" Probleme eine gute Näherung für das Ausgangsproblem?

Definition 4.2 (Konsistenz)

Die Gleichungen

$$F(y, \varepsilon) = 0, \quad \varepsilon > 0 \quad \text{gegeben, aber beliebig}$$

heißen konsistent zu

$$F(y, 0) = 0,$$

falls für alle Lösungen y_0 von $F(y_0, 0) = 0$ gilt:

$$\lim_{\varepsilon} F(y_0, \varepsilon) = 0.$$

Bemerkung 4.3

Aus Konsistenz folgt i. Allgemeinen nicht Konvergenz, d.h. für Lösungen y^ε von $F(y, \varepsilon) = 0$ muß nicht unbedingt

$$y^\varepsilon \rightarrow y_0$$

gelten für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Manchmal zeigt es sich, daß sich der Charakter von Gleichungen entscheidend ändert, wenn man vermeintlich kleine Terme wegläßt. In einem solchen Fall spricht man von einer **singulären Störung**.

Beispiele:

1. Die Gleichung $\varepsilon x^2 - 1 = 0$ ändert für $\varepsilon \rightarrow 0$ seine Ordnung. Insbesondere ist die Gleichung für $\varepsilon = 0$ unlösbar und die Lösungen x_ε^\pm von $\varepsilon x^2 - 1 = 0$ konvergieren für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen unendlich.
2. $\varepsilon y_\varepsilon'' = \frac{1}{(1+y_\varepsilon)^2}$, $y_\varepsilon(0) = 0$, $y_\varepsilon'(0) = 1$ ändert seinen Charakter, falls man $\varepsilon = 0$ setzt. Für $\varepsilon > 0$ betrachtet man eine Differentialgleichung und für $\varepsilon = 0$ erhält man eine unlösbare algebraische Gleichung.
3. Eine der bekanntesten singulären Störungen taucht in der Strömungsmechanik auf und wir wollen diese im nächsten Paragraphen diskutieren.

5 Mathematische Modellierung von Strömungen

In diesem Paragraphen wollen wir einige Grundprobleme der Strömungsmechanik behandeln. Dies dient dazu, einige wichtige Fragestellungen zu formulieren.

Wir betrachten folgendes Beispiel: Ein Körper K (Schiff) wird von einem Fluid (z.Bsp. Wasser) umströmt. Der Körper hat die charakteristische Größe ℓ (Schiffslänge und Breite). Wir interessieren uns für das Geschwindigkeitsfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad v = v(x, t)$$

des Fluids in jedem Ortspunkt $x \in \mathbb{R}^3$ und zu jeder Zeit $t \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, daß weit draußen die Geschwindigkeit gegen eine konstante Geschwindigkeit konvergiert

$$v(x, t) \rightarrow V \in \mathbb{R}^3 \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Frage: Können wir die Geschwindigkeitsverteilung v mittels eines mathematischen Modells beschreiben?

Aus Erhaltungsprinzipien und unter gewissen konstitutiven Annahmen (d.h. Annahmen an die Eigenschaften des Fluids) kann man die Navier-Stokes Gleichungen herleiten. Für ein inkompressibles Fluid mit konstanter Dichte ϱ_0 gilt bei Vernachlässigung äußerer Kräfte

$$\begin{aligned} \varrho_0 (v_t(x, t) + \nabla v(x, t) \cdot v(x, t)) &= -\nabla p(x, t) + \eta \Delta v(x, t), \\ \operatorname{Div} v &= 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

wobei $p : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ der Druck und η die dynamische Viskosität des Fluids ist. Die Viskosität beschreibt die Zähigkeit des Fluids. Sie ist hoch für Honig und niedrig für Gase. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} v &= v_{1,x} + v_{2,y} + v_{3,z} \in \mathbb{R}, \\ \Delta \phi &= \phi_{x_1, x_1} + \phi_{x_2, x_2} + \phi_{x_3, x_3}, \\ \Delta v &= \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \\ \nabla v \cdot v &= \begin{pmatrix} v_{1,x_1} & v_{1,x_2} & v_{1,x_3} \\ v_{2,x_1} & v_{2,x_2} & v_{2,x_3} \\ v_{3,x_1} & v_{3,x_2} & v_{3,x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

Frage: Sind die Dimensionen aller Terme in (5.1) gleich? Es gilt

$$\begin{aligned} v &\quad \text{Geschwindigkeit} \quad [v] = L/T \\ \varrho_0 &\quad \text{Massendichte} \quad [\varrho_0] = M/L^3 \\ p &\quad \text{Druck=Kraft/Fläche} \quad (ML/T^2)/L^2 = M/LT^2, \end{aligned}$$

weiter gilt (es muss wegen Konsistenz gelten)

$$[\eta] = M/LT.$$

das liefert dann, daß alle Terme in der Gleichung (5.1) dieselbe Dimension haben und zwar M/L^2T^2 .

Frage: Wir möchten das Verhalten bei der Umströmung eines großen Schiffes verstehen, indem wir Experimente mit einer um den Faktor 100 verkleinerten Nachbildung durchführen. Wann können wir von Ergebnissen für Experimente mit der Nachbildung auf das Verhalten des großen Schiffes im Wasser schließen?

Dazu müssen wir die Gleichung (5.1) auf dimensionslose Form bringen. D.h. wir nehmen Kombinationen der Parameter (hier $\ell, v, \varrho_0, \eta, V$) und bilden dimensionslose Größen, z.Bsp.

$$y = \frac{x}{\ell}, \quad \tau = \frac{t}{t^*},$$

wobei $t^* = t^*(\ell, v, \varrho_0, \eta)$ ein noch zu bestimmender intrinsischer Zeitmaßstab ist. Weiter setzen wir

$$u(y, \tau) = \frac{v(x, t)}{|V|}$$

und

$$q(y, \tau) = \frac{p(x, t)}{p_0}, \quad \text{wobei der Referenzdruck } p_0 \text{ ist noch zu bestimmen.}$$

Jetzt sind u, q selbst **dimensionslose Größen, definiert auf dimensionslosen Variablen**. Wir müssen jetzt die Differentialgleichung angeben, die u, q erfüllen, wenn v, p die Gleichung (5.1) erfüllen. Das geschieht so: jede Ableitung in (5.1) muß durch Ableitungen von u, q nach ihren Argumenten ausgedrückt werden. Wegen

$$u(y, \tau) = \frac{v(x, t)}{|V|} \Leftrightarrow u\left(\frac{x}{\ell}, \frac{t}{t^*}\right) \cdot |V|, = v(x, t)$$

folgt mit der Kettenregel

$$\partial_x v(x, t) = |V| \cdot \partial_y u\left(\frac{x}{\ell}, \frac{t}{t^*}\right) \cdot \frac{1}{\ell},$$

also

$$\partial_x v(x, t) = \frac{|V|}{\ell} \cdot \partial_y u(y, \tau).$$

Auf diese Weise werden alle auftretenden Ableitungen umgerechnet (Übung) und es ergibt sich

$$\partial_\tau u + \frac{t^* |V|}{\ell} \nabla_y u \cdot u = -\frac{p_0 t^*}{\varrho_0 \ell |V|} \nabla_y q + \frac{\eta t^*}{\varrho_0 \ell^2} \Delta_y u.$$

Wir wählen $t^* = \frac{\ell}{|V|}$, $p_0 = V^2 \varrho_0$ und $\nu = \eta / \varrho_0$ (dies ist die kinematische Viskosität) und wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \partial_\tau u + \nabla_y u \cdot u &= -\nabla_y q + \frac{1}{Re} \Delta_y u, \\ u(y, \tau) &\rightarrow \frac{V}{|V|} \quad \text{für } |y| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dabei ist $Re := \frac{\nu}{\ell |V|}$ die **Reynoldszahl** und wir bemerken, daß für große $|y|$ die entdimensionisierte Geschwindigkeit u im Betrage gegen 1 konvergiert. Außerdem gilt natürlich

$$\operatorname{Div} u = 0.$$

Strömungssituationen mit unterschiedlichem ℓ führen nur dann auf dieselbe dimensionslose Form (d.h. die Ergebnisse sind vergleichbar), wenn nur die Reynoldszahl dieselbe ist. D.h. wenn ich die Größe des Schiffes um den Faktor 100 verkleinere, kann ich z.Bsp. die Anströmgeschwindigkeit V um den Faktor 10 vergrößern und die kinematische Viskosität um den Faktor 10 verkleinern um Ergebnisse zwischen wirklichem Schiff und Modell vergleichen zu können.

6 Partielle Differentialgleichungen

Eine partielle Differentialgleichung (PDE: partial differential equation) ist eine Gleichung für eine unbekannte Funktion u von mindestens zwei oder mehr (unabhängigen) Variablen und für gewisse partielle Ableitungen dieser Funktion. Im Gegensatz dazu bestimmt eine gewöhnliche Differentialgleichung (ODE: ordinary differential equation) eine unbekannte Funktion u , die nur von einer unabhängigen Variablen x oder t abhängt.

So ist

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (6.1)$$

die allgemeinste Form einer PDE erster Ordnung in den zwei unabhängigen Variablen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Die **Ordnung** einer PDE ist der Grad der höchsten auftretenden Ableitung. Entsprechend ist

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \quad (6.2)$$

die allgemeinste Form einer PDE zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Variablen. Ist allgemeiner $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \mapsto \mathbb{R} \quad (6.3)$$

eine gegebene Funktion, so nennt man den Ausdruck

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x), \dots, D^k u(x)) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \quad (6.4)$$

eine PDE k -ter Ordnung für die unbekannte Funktion $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Hierbei bezeichnet $D^l u(x)$, $l \in \mathbb{N}$ die Menge der partiellen Ableitungen der Ordnung l .

Das Lösen (Integrieren) einer PDE besteht darin, daß man alle Funktionen u findet, die alle partiellen Ableitungen besitzen die in der Gleichung (6.4) auftreten (klassische Lösung) und die der Gleichung (6.4) genügen und eventuellen gewissen zusätzlichen (sogenannten) Randbedingungen auf einer Teilmenge des Randes $\Gamma \subset \partial\Omega$ von Ω . Ziel ist es, falls möglich, eine einfache, explizite, geschlossene Formel für die Lösung zu finden, oder, weil dies im allgemeinen nicht möglich ist, Eigenschaften der Lösungen zu beschreiben, ohne die Lösung explizit zu kennen. Natürlich muß man zuerst klären, ob es überhaupt Lösungen der PDE gibt, das ist die sogenannte Existenzfrage.

Beispiele für partielle Differentialgleichungen:

1. $u_t + c u_y = 0$, lineare Transportgleichung, Konvektionsgleichung
2. $u_t + c u_x = f(x, t, u)$, nichtlineare Konvektions-Reaktionsgleichung
3. $u_t + u u_x$, nichtlineare Transportgleichung, Burgers-Gleichung (Stoßwellen)
4. $\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0$, Laplace-Gleichung, Potentialgleichung
5. $\Delta u = f(x)$, Poisson-Gleichung
6. $u_{tt} = u_{xx}$, eindimensionale lineare Wellengleichung (schwingende Saite)
7. $u_{tt} = u_{xx} - u^3$, eindimensionale nichtlineare Wellengleichung mit Rückkopplung
8. $u_{tt} = \Delta u$, allg. Wellengleichung im \mathbb{R}^n , im \mathbb{R}^2 Schwingung einer Membran
9. $u_t + u u_x + u_{xxx} = 0$, Dispersionswelle
10. $u_t = u_{xx}$, eindimensionale Wärmeleitungsgleichung/Diffusionsgleichung
11. $u_{tt} = u_{xxxx} = \partial_x^4 u$, schwingender Stab
12. $u_t = i u_{xx}$, eindimensionale Schrödinger-Gleichung
13. $(1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0$, Minimalflächengleichung
14. $u_t + H(Du) = 0$, $H : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, Hamilton-Jacobi Gleichung

15. $|Du|^2 = 1$, Eikonalgleichung der geometrischen Optik

Beispiele für partielle Differentialgleichungssysteme: (die gesuchte Funktion u selbst hat mehrere Komponenten, i.A. braucht man dann soviele partielle Differentialgleichungen wie u Komponenten hat, um eine Lösung zu bestimmen:

1. $u_x = v_y, u_y = -v_x$ **Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen**, zwei Gleichungen für zwei unbekannte Funktionen $u, v : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$.
2. $\mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{Div} u - u_{tt} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^3, u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$, die **Lamé-Gleichungen**, elastisches System, beschreibt die elastische Verschiebung u eines Körpers unter der Einwirkung von Kräften f . Die Parameter μ, λ sind gegebene Konstanten die das Material beschreiben (Glas, Metall)
3. $\Delta u + k^2 u = 0$ stationäre Schwingung im \mathbb{R}^n , **Helmholtzsche Schwingungsgleichung**
4. $u_t + \nabla u \cdot u + \nabla p - \nu \Delta u = f, \quad \operatorname{Div} u = 0$ gesuchte Funktionen: Geschwindigkeitsvektor $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ und skalarer Druck $p : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Insgesamt also vier Gleichungen für vier unbekannte Funktionen $u = (u_1, u_2, u_3), p$. Die **Navier-Stokes Gleichungen** beschreiben Strömungen z.Bsp. von Luft und Wasser. Wieder ist die sogenannte Viskosität ν ein Materialparameter
5. $u_t + \nabla u \cdot u + \nabla p - \nu \Delta u = f, \quad \operatorname{Div} u = 0$, die **Euler-Gleichungen** der Gasdynamik entstehen formal für $\nu = 0$ aus den Navier-Stokes Gleichungen
6. Es sei $E, H, D, B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ die elektrische, magnetische Feldstärke sowie die Verschiebungsdichte und die magnetische Induktion. Die **Maxwellschen Gleichungen** der Elektrodynamik lauten

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E + B_t &= 0 \\ \operatorname{rot} H - D_t &= j \\ \operatorname{Div} B &= 0, \quad \operatorname{Div} D = \varrho \\ B &= B(H), \quad D = D(E) \quad j = j(E), \end{aligned}$$

mit der Stromdichte $j : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ und der skalaren Ladungsdichte $\varrho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Es handelt sich um ein PDE System 1. Ordnung von 17 Gleichungen für 15 unbekannte Funktionen $E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3, B_1, B_2, B_3, D_1, D_2, D_3, j_1, j_2, j_3$. Obwohl anscheinend zwei Gleichungen zuviel auftreten, ist das System nicht überbestimmt.

7 Notation

Ein n -Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ heißt **Multiindex** der **Ordnung**

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n. \quad (7.1)$$

Für einen festen Multiindex α setzen wir

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u(x). \quad (7.2)$$

Für ein $k \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $D^k u(x) := \{D^\alpha u \mid |\alpha| = k\}$, also die Menge aller partiellen Ableitungen von u der Ordnung k . Schlußendlich sei

$$|D^k u|^2 = \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2. \quad (7.3)$$

Mit diesen Definitionen ist es nun möglich, PDEs näher zu klassifizieren.

8 Klassifikation: formal

Eine PDE heißt **linear**, wenn die gesuchte Funktion u sowie alle ihre partiellen Ableitungen $D^\alpha u$ nur linear auftreten. Sie hat dann die allgemeine Form

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = \bar{a}(x), \quad (8.1)$$

wobei a_α, \bar{a} gegebene Funktionen sind.

Falls die PDE nicht linear in diesem Sinne ist, bietet es sich an, die auftretende Nichtlinearität nochmal zu untergliedern.

Eine PDE heißt **semilinear**, wenn die höchsten auftretenden partiellen Ableitungen linear vorkommen. Sie hat also die allgemeine Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u = \bar{a}(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x). \quad (8.2)$$

Eine PDE heißt **quasilinear**, wenn die höchsten auftretenden partiellen Ableitungen bei „eingefrorenen“ Koeffizienten noch linear vorkommen. Sie hat dann die allgemeine Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) D^\alpha u = \bar{a}(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x). \quad (8.3)$$

Eine PDE heißt **voll nichtlinear**, wenn sie nichtlinear von den partiellen Ableitungen höchster Ordnung abhängt.

9 Linearität

In vielen Fällen kann man die gegebene PDE in der Form $L.u = 0$ schreiben, wobei L ein sogenannter **Differentialoperator** ist. Eine gegebene Funktion v wird durch den Operator in eine neue Funktion $L.u$ überführt:

1. $L = \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow L.u = \frac{\partial}{\partial x} u = u_x$
2. $L = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \Delta_x$, Laplace-Operator
3. $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta := \square$, Box-Operator, Wellenoperator $L.u = 0 \Rightarrow u_{tt} = \Delta u$.

Der Operator L heißt linear, wenn gilt

$$L.(u + v) = L.u + L.v, \quad L.(c u) = c L.u \quad (9.1)$$

wobei u, v aus einem geeigneten Funktionenraum sind und c eine reelle Zahl ist. Man nennt die Gleichung

$$L.u = 0 \quad (9.2)$$

linear, wenn L ein linearer Operator ist. Die Gleichung (9.2) heißt dann **homogene lineare Gleichung**. Für eine gegebene Funktion $f \neq 0$ heißt dann

$$L.u = f \quad (9.3)$$

inhomogene lineare Gleichung.

Beispiel. Obwohl $\cos(xy^2) u_x - y^2 u_y = \tan(x^2 + y^2)$ kompliziert aussieht, handelt es sich um eine inhomogene lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung.

Als eine Folgerung aus der Linearität ergibt sich das **Superpositionsprinzip**: Seien u_1, \dots, u_n Lösungen der linearen Gleichung $L.u = 0$ und seien c_1, \dots, c_n Konstanten, dann ist auch

$$c_1 u_1 + \dots + c_n u_n = \sum_{j=1}^n c_j u_j \quad (9.4)$$

eine Lösung von $L.u = 0$. Wie im Falle der linearen Algebra gilt: kennt man alle Lösungen einer homogenen Gleichung und eine Lösung der inhomogenen Gleichung, so kennt man schon alle Lösungen der inhomogenen Gleichung, denn

$$L.v_1 = g, \quad L.v_2 = g \Rightarrow L.(v_1 - v_2) = g - g = 0 \quad (9.5)$$

Einfache Beispiele für PDEs und deren Lösungen:

Bestimme alle Funktionen mit $u_{xx} = 0$. Die Gleichung liefert, daß $u_x(x, y) = \text{const.}$ genauer: u_x ist konstant auf jeder Geraden parallel zur x -Achse, d.h. es gilt $u_x(x, y) = f(y)$. Nochmalige Integration liefert die Lösungsformel $u(x, y) = x f(y) + g(y)$. Hierbei beobachten wir, daß zwei beliebige Funktionen f, g auftreten, typisch für die PDE zweiter Ordnung.

Bestimme alle Funktionen mit $u_{xx} + u = 0$. Betrachte zuerst die ODE $y^{(2)}(t) = -y(t)$. Deren allgemeine Lösung ist $y(t) = a \cos t + b \sin t$. Wir bekommen also die allgemeine Lösung zur PDE mit $u(x, y) = f(y) \cos x + g(y) \sin x$. Wieder beobachten wir, daß zwei beliebige Funktionen f, g auftreten, für die gegebene PDE zweiter Ordnung.

Bestimme alle Funktionen mit $u_{xy} = 0$. Wir integrieren zuerst nach y , betrachten x als Konstante, was $u_x(x, y) = g(x)$ liefert. Jetzt integrieren wir nach x und betrachten y als Konstante, woraus $u(x, y) = G(x) + F(y)$ folgt, mit $G'(x) = g(x)$ und die Funktion G ist also differenzierbar. Wieder beobachten wir, daß zwei beliebige Funktionen F, G auftreten. Will man u zuerst nach y differenzieren (der Satz von Schwarz über die Vertauschung der Differentiationsreihenfolge muss nicht gelten), dann muss F differenzierbar gewählt werden.

Genau dann sind u, v Lösungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, wenn die komplexwertige Funktion $w(x+iy) = u(x, y) + i v(x, y)$ holomorph (i.e. komplex differenzierbar) ist. Dann gilt $\Delta u = \Delta v = 0$. Lösungen der Potentialgleichung $\Delta u = 0$ nennt man **harmonische Funktionen**.

Bestimme alle Lösungen der linearen homogenen Konvektions/Transportgleichung 1. Ordnung

$$a u_x + b u_y := a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (9.6)$$

mit reellen, positiven Konstanten $a, b > 0$. Zuerst führen wir neue Koordinaten ein, d.h.

$$\begin{aligned} \xi(x, y) &= bx - ay \\ \eta(x, y) &= ax + by. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Offensichtlich ist das ein Diffeomorphismus (umkehrbar eindeutig, glatt) des \mathbb{R}^2 in sich (Jacobimatrix, Jacobi-Determinante), mit

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \xi_x(x, y) & \xi_y(x, y) \\ \eta_x(x, y) & \eta_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ a & b \end{pmatrix}, \quad \det \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = a^2 + b^2. \quad (9.8)$$

Ausgehend von der gesuchten Lösungsfunktion $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definieren wir nun eine **neue Funktion** $v(\xi, \eta)$, indem wir setzen

$$v(\xi(x, y), \eta(x, y)) := u(x, y). \quad (9.9)$$

Wir beachten, daß der Wert der Funktion v an einem gegebenen geometrischen Ort (es ist egal, wie wir den Ort bezeichnen, ob mit $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ oder mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) mit dem Wert der Funktion u übereinstimmt; trotzdem sind u, v unterschiedliche Funktionen. Die partiellen Ableitungen ergeben sich mit der Kettenregel so

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \partial_x u(x, y) = \partial_x[v(\xi(x, y), \eta(x, y))] \\ &= \partial_\xi v(\xi(x, y), \eta(x, y)) \cdot \xi_x(x, y) + \partial_\eta v(\xi(x, y), \eta(x, y)) \cdot \eta_x(x, y) \\ &= v_\xi(\xi, \eta) b + v_\eta(\xi, \eta) a \\ u_y(x, y) &= \partial_y u(x, y) = \partial_y[v(\xi(x, y), \eta(x, y))] \\ &= \partial_\xi v(\xi(x, y), \eta(x, y)) \cdot \xi_y(x, y) + \partial_\eta v(\xi(x, y), \eta(x, y)) \cdot \eta_y(x, y) \\ &= v_\xi(\xi, \eta)(-a) + v_\eta(\xi, \eta)b. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Bemerkung 9.1

Diese kleine Rechnung könnte für Sie der Anlaß sein, die Kettenregel der Differentialrechnung zu wiederholen.

Wegen $a u_x + b u_y = 0$ bekommen wir für v die PDE

$$a [v_\xi(\xi, \eta)b + v_\eta(\xi, \eta)a] + b [v_\xi(\xi, \eta)(-a) + v_\eta(\xi, \eta)b] = (a^2 + b^2) v_\eta(\xi, \eta) = 0, \quad (9.11)$$

Also muss gelten $v(\xi, \eta) = f(\xi)$. Nach Rücksubstitution sieht man, dass die allgemeine Lösung $u(x, y) = v(\xi(x, y), \eta(x, y)) = f(\xi(x, y)) = f(bx - ay)$ ist, mit einer beliebigen Funktion f , typisch für die PDE 1. Ordnung.

Bestimme alle Lösungen der linearen homogenen Konvektions/Transportgleichung 1. Ordnung im \mathbb{R}^n

$$u_t(x, t) + \langle b, \nabla_x u(x, t) \rangle = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (9.12)$$

mit gegebenem $b \in \mathbb{R}^n$, wobei $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i$ das Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n bezeichne. Ausgehend von einer (angenommenen glatten) Lösung $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion

$$z : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad z(s) := u(x + sb, t + s) \quad (= u((x, t) + s(b, 1))). \quad (9.13)$$

Dann gilt $z'(s) = \langle \nabla u(x + sb, t + s), b \rangle + u_t(x + sb, t + s) \cdot 1 = 0$ unter Benutzung der PDE. Also ist $z(s)$ eine konstante Funktion. Für jeden Punkt (x, t) ist u konstant auf der Geraden durch (x, t) mit Richtung $(b, 1)$. Falls es auf jeder dieser Geraden einen Punkt gibt, auf dem wir u kennen, so ist u auf dem gesamten \mathbb{R}^{n+1} bekannt.

Bestimme alle Lösungen $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ des **homogenen Anfangswertproblems** (Cauchy-Problems)

$$\begin{aligned} u_t(x, t) + \langle b, \nabla_x u(x, t) \rangle &= 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= g(x), \end{aligned} \quad (9.14)$$

mit gegebenem $b \in \mathbb{R}^n$ und einer bekannten Funktion $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Für (x, t) mit $t > 0$ ist die Gerade durch (x, t) mir Richtung $(b, 1)$ gegeben durch

$$s \mapsto (x + sb, t + s). \quad (9.15)$$

Diese Gerade schneidet die (Hyper-)Ebene $\Gamma := \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$ bei $s = -t$ im Punkte $(x - tb, 0)$. Da u konstant auf dieser Geraden ist und ausserdem gilt, daß $u(x - tb, 0) = g(x - tb)$, so folgt also die Lösung

$$u(x, t) = g(x - tb). \quad (9.16)$$

Ein u in dieser Form heißt auch **travelling wave solution** und der Konstante Vektor b ist die verallgemeinerte Transportgeschwindigkeit, mit der die Ausgangsinformation transportiert wird. Wenn also die Gleichung (9.14) eine glatte Lösung besitzt, so ist sie durch (9.16) gegeben. Daher der Name Transportgleichung: die Werte von g auf dem Rand werden in das Innere des Gebietes transportiert. Umgekehrt ist für jede Funktion $g \in C^1$ die Funktion u aus (9.16) eine **klassische Lösung** (alle notwendigen partiellen Ableitungen existieren).

Falls $g \notin C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, so besitzt (9.14) offenbar keine C^1 -Lösung (klassische Lösung) u . Trotzdem ist natürlich u aus (9.16) der einzige vernünftige Kandidat für eine Lösung von (9.14). Für $g \notin C^1$ oder sogar unstetiges g nennt man

$$u(x, t) = g(x - tb). \quad (9.17)$$

daher eine **schwache Lösung** (die partiellen Ableitungen brauchen nicht zu existieren).

Bestimme alle Lösungen $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ des **inhomogenen Anfangswertproblems** (Cauchy-Problems)

$$\begin{aligned} u_t(x, t) + \langle b, \nabla_x u(x, t) \rangle &= f(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= g(x), \end{aligned} \quad (9.18)$$

mit gegebenem $b \in \mathbb{R}^n$ und bekannten Funktionen $f : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Wie oben betrachten wir für festes (x, t) wieder die Funktion

$$z(s) := u(x + sb, t + s) \quad (= u((x, t) + s(b, 1))) . \quad (9.19)$$

Jetzt gilt aber

$$z'(s) = f(x + sb, t + s) , \quad (9.20)$$

also nach Integration

$$\begin{aligned} z(0) - z(-t) &= \int_{-t}^0 z'(s) \, ds = \int_{-t}^0 f(x + sb, t + s) \, ds = \int_0^t f(x + (s - t)b, s) \, ds , \\ z(0) &= u(x, t), \quad z(-t) = u(x - tb, t - t) = u(x - tb, 0) = g(x - tb) . \end{aligned} \quad (9.21)$$

Daher erhalten wir für (9.18) die Lösung

$$u(x, t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + (s - t)b, s) \, ds . \quad (9.22)$$

Bestimme alle Lösungen $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ der eindimensionalen Wellengleichung (Schwingung einer Saite)

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) &= u_0(x), \\ u_t(x, 0) &= u_1(x) . \end{aligned} \quad (9.23)$$

Wir führen wieder neue Koordinaten ein: diesmal $\xi(x, y) = x + t$, $\eta(x, y) = x - t$ und definieren die neue Funktion

$$v(\xi(x, y), \eta(x, y)) := u(x, y) . \quad (9.24)$$

Wie oben folgt leicht mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \cdot 1 + v_\eta \cdot 1 , \quad u_t = v_\xi \cdot 1 - v_\eta \cdot 1 \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \quad u_{tt} = v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} . \end{aligned} \quad (9.25)$$

Ausnutzen der PDE für u liefert

$$0 = u_{tt} - u_{xx} = -4v_{\xi\eta} . \quad (9.26)$$

Diese PDE für v haben wir bereits weiter oben gelöst mit dem Resultat, daß

$$v = v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) \quad (9.27)$$

mit willkürlichen Funktionen $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Damit ergibt sich als allgemeine Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung

$$u(x, t) = f(x + t) + g(x - t) , \quad (9.28)$$

wobei wir aber beachten, daß f, g zweimal differenzierbar sein müssen, damit diese Lösung eine klassische Lösung sein kann. Der Anteil $g(x - t)$ definiert eine nach rechts laufende Welle, $f(x + t)$ dagegen eine nach links laufende Welle. In beiden Fällen bleibt die Gestalt der Welle erhalten.

Damit u die Anfangsbedingungen erfüllt, muss gelten

$$\begin{aligned} u_0(x) &= u(x, 0) = f(x) + g(x) \quad \Rightarrow u'_0(x) = f'(x) + g'(x) \\ u_1(x) &= u_t(x, 0) = \frac{d}{dt} u(x, t) \Big|_{t=0} = [f'(x + t) + g'(x - t)(-1)] \Big|_{t=0} \end{aligned} \quad (9.29)$$

Daraus ergibt sich eindeutig

$$f' = \frac{1}{2}(u'_0 + u_1), \quad g' = \frac{1}{2}(u'_0 - u_1) \quad (9.30)$$

und mit Integrationskonstanten $f_0, g_0 \in \mathbb{R}$ also

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2} \int_0^x u_1(s) \, ds + f_0 \\ g(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^x u_1(s) \, ds + g_0. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Mit $f+g = u_0$ von oben muss $f_0+g_0 = 0$ gelten. Somit können die Integrationskonstanten ($u = f+g+f_0+g_0$) in der Lösungsformel weggelassen werden. Wir erhalten die **d'Alambertsche Lösungsformel**

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x+t) + u_0(x-t)) + \int_{x-t}^{x+t} u_1(s) \, ds. \quad (9.32)$$

Eine Probe zeigt, dass dies für $u_0 \in C^2$ und $u_1 \in C^1$ tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems liefert.

10 Wohlgestelltheit im Sinne von Hadamard

Eine partielle Differentialgleichung $L.u = f$, mit Randwerten $R(u) = g$ und gegebenenfalls Anfangswerten $A(u) = u_0$ heißt **wohlgestellt im Sinne von Hadamard**, falls die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

1. Die PDE besitzt mindestens eine Lösung u (Existenz) für die Daten f, g, u_0 .
2. Zu gegebenen Daten f, g, u_0 gibt es höchstens eine Lösung (Eindeutigkeit).
3. Die Lösung hängt stetig von den Daten f, g, u_0 ab, d.h. werden die Daten nur gerinfügig geändert, dann ändert sich auch die Lösung nur wenig (stetige Abhängigkeit, Stabilität).

Die Erfüllung dieser Forderungen hängt nun entscheidend davon ab, welche Klasse von Daten und welche Funktionenräume man betrachtet. Vom physikalischen Standpunkt aus ist Stabilität eine wichtige Eigenschaft: Messungen der Daten können immer nur approximativ sein. Falls nun die PDE nicht stabil ist, könnte man zu approximativen Daten völlig andere Ergebnisse bekommen. Vorhersagen wären nicht möglich!

Beispiel: wir betrachten wieder die lineare Transportgleichung $u_t + c u_x = 0$ zusammen mit dem Anfangswert $u(x, 0) = u_0(x)$. Die Gleichung hat die eindeutige Lösung

$$u(x, t) = u_0(x - ct). \quad (10.1)$$

Ohne hier präziser zu werden, liefert uns die Lösungsformel auch die Stabilität: kleine Änderungen an u_0 ändern auch die Lösung u nur wenig.

Jetzt betrachten wir die Transportgleichung mit der "Anfangsbedingung"

$$u(cs, s) = u_0(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad (10.2)$$

auf der sogenannten charakteristischen Kurve (cs, s) . Man sieht sofort, daß die Gleichung $u_t + c u_x = 0$ überhaupt nur lösbar ist, wenn u_0 konstant ist, da u entlang der Charakteristik (cs, s) konstant sein muss. Darüberhinaus gibt es unter dieser Voraussetzung unendlich viele Lösungen, denn entfernt von der Charakteristik kann u jeden Wert annehmen. Wie man sieht, ist das Problem nicht wohlgestellt. Wir werden den Grund für den Unterschied bzgl. der Anfangsvorgabe bei der Behandlung der Charakteristikenmethode untersuchen.

11 Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

11.1 Homogene lineare PDE's 1. Ordnung

Jede lineare PDE 1. Ordnung kann in der Gestalt

$$\langle a(x), \nabla u(x) \rangle + b(x) u(x) + c(x) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, a, b : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, c : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \quad (11.1)$$

geschrieben werden. Die Koeffizientenfunktionen $a : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $b, c : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ seien in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stetig und in keinem Punkt des Gebietes gleichzeitig Null. Wir studieren zunächst die homogene, "verkürzte" PDE

$$\langle a(x), \nabla u(x) \rangle = 0. \quad (11.2)$$

Offenbar besitzt (11.2) die Lösungen $u(x_1, \dots, x_n) = \text{const.}$

Definition 11.1

Die Lösungen $u = \text{const}$ von (11.2) heißen **triviale** Lösungen. Jede andere Lösung heißt **nichttriviale**. ■

Zunächst betrachten wir den Fall zweier unabhängiger Variablen, also

$$\begin{aligned} \langle a(x), \nabla u(x) \rangle &= 0, \\ a(x) &= (a_1(x_1, x_2), a_2(x_1, x_2))^T, \quad \nabla u(x) = (\partial_{x_1} u(x_1, x_2), \partial_{x_2} u(x_1, x_2))^T, \\ a_1(x_1, x_2) \partial_{x_1} u(x_1, x_2) + a_2(x_1, x_2) \partial_{x_2} u(x_1, x_2) &= 0, \end{aligned} \quad (11.3)$$

der sich durch besondere Anschaulichkeit auszeichnet.

11.1.1 Das charakteristische System

In dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei uns eine nichttriviale Lösung $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ von (11.3) bekannt. Diese Lösung u können wir uns geometrisch als (krumme) Fläche über Ω in der Ebene vorstellen. Aus Ω denken wir uns alle stationären Punkte, i.e. $(x_1, x_2) \in \Omega$ mit $\nabla u(x_1, x_2) = 0$ entfernt.

Die Gleichung (11.3) bleibt erhalten, wenn wir sie mit $\frac{1}{\|a(x)\|}$ multiplizieren (nach Vor. ist $\|a(x)\| > 0$ in Ω). Wir können also auch annehmen, daß $a \in \mathbb{R}^2$ Einheitslänge hat. Wenn wir uns die Lösung u als ein Flächenstück (Berg) über der Ebene vorstellen (Integralfläche), so sagt die PDE (11.3) nichts anderes, als daß $a = (a_1, a_2)$ in jedem Punkt senkrecht auf ∇u steht. Also ist a ein Tangenteneinheitsvektor an die Höhenlinien von u ("Der Gradient ∇u steht senkrecht auf Höhenlinien").

Eine **Höhenlinie** von u besitzt die Darstellung

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2, \quad u(\gamma(s)) = u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = \text{const} \quad (11.4)$$

wobei der Parameter s ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ durchlauft. Ausserdem sei γ so gewählt, daß $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$ (das geht immer, falls nötig nach Umparametrisieren). Für differenzierbares γ gilt in I

$$\frac{d}{ds} u(\gamma(s)) = \langle \nabla u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)), \frac{d}{ds} \gamma(s) \rangle = \langle \left(\begin{array}{c} \partial_{x_1} u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \\ \partial_{x_2} u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \dot{\gamma}_1(s) \\ \dot{\gamma}_2(s) \end{array} \right) \rangle = 0, \quad (11.5)$$

weil $u(\gamma(s)) = \text{const.}$ für alle $s \in I$. Andererseits gilt für eine Lösung u der PDE aber

$$\langle \left(\begin{array}{c} \partial_{x_1} u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \\ \partial_{x_2} u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} a_1(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \\ a_2(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \end{array} \right) \rangle = 0. \quad (11.6)$$

Für nicht-verschwindenden Gradienten $\nabla u = (\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u) \in \mathbb{R}^2$ folgt aus (11.5) und (11.6) im \mathbb{R}^2 aber, daß

$$\dot{\gamma}(s) = a(\gamma(s)). \quad (11.7)$$

Dieses Gleichungssystem enthält die Funktion u nicht mehr, es kann aber trotzdem als der PDE (11.2) zugeordnet angesehen werden. Es heißt das sogenannte charakteristische Dgl. System der

PDE (11.2). Nach der Theorie der Lösungen von ODE-Systemen besitzt das System (11.7) in dem Intervall I -zumindest lokal- eine **zweiparametrische Schar**

$$\gamma = \gamma(s; C_1, C_2) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s; C_1, C_2) \\ \gamma_2(s; C_1, C_2) \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad (11.8)$$

von Lösungskurven, wobei die Konstanten C_1, C_2 (und damit die Lösungskurven) z.Bsp. durch Anfangswerte

$$\begin{pmatrix} \gamma_1(0; C_1, C_2) \\ \gamma_2(0; C_1, C_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \Omega \quad (11.9)$$

festgelegt sind. Nach Konstruktion ist klar, daß

$$u(\gamma_1(s; C_1, C_2), \gamma_2(s; C_1, C_2)) = \text{const.} \quad (11.10)$$

ist. Man erwartet nun, daß die **Schar der räumlichen Kurven**

$$s \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(s; C_1, C_2) \\ \gamma_2(s; C_1, C_2) \\ \zeta(s; C_1, C_2) = \zeta(0; C_1, C_2) = \text{const.} \end{pmatrix} \quad (11.11)$$

auf einer Integralfläche $(x, y, u(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ liegen, diese Integralfläche mithin also „aufspannen“. Daß das stimmt, beweisen wir unten für den allgemeineren Fall des \mathbb{R}^n .

Definition 11.2

Das der PDE (11.2) zugeordnete System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung (ODE) für $\gamma : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{ds} \gamma(s) = a(\gamma(s)) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \gamma'_1(s) \\ \vdots \\ \gamma'_n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(\gamma_1(s), \dots, \gamma_n(s)) \\ \vdots \\ a_n(\gamma_1(s), \dots, \gamma_n(s)) \end{pmatrix}, \quad (11.12)$$

heißt **charakteristisches System** zu (11.2).

Definition 11.3

Jede Lösung $\gamma : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ heißt **charakteristische Grundkurve** oder **Grundcharakteristik** von (11.2). Als **Charakteristik** bezeichnet man dagegen jede Kurve $\tilde{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\tilde{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \vdots \\ \gamma_n(s) \\ \text{const.} \end{pmatrix}. \quad (11.13)$$

Für den Fall zweier unabhängiger Variablen haben wir gezeigt, daß die Höhenlinien jeder Integralfläche Charakteristiken und deren Projektionen in die (x_1, x_2) -Ebene Grundcharakteristiken von (11.3) sind. Umgekehrt kann man beweisen, daß jede Funktion $u(x, y)$ mit stetigen partiellen Ableitungen 1. Ordnung eine Lösung von (11.3) ist, wenn die Höhenlinien ihrer Fläche Charakteristiken sind, d.h. wenn die Funktionenswerte von u entlang jeder Grundcharakteristik konstant sind. Diese Aussagen sind übertragbar auf die allgemeinere PDE (11.2).

Theorem 11.4

Sind die Koeffizientenfunktionen $a_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1 \dots n$ stetig in dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und verschwinden in keinem Punkt von Ω gleichzeitig, so ist jede Funktion $u = u(x_1, \dots, x_n)$ mit stetigen partiellen Ableitungen 1. Ordnung genau dann eine Lösung von

$$\langle a(x), \nabla u(x) \rangle = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, \quad a : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n \quad (11.14)$$

falls u **konstant** ist entlang jeder Grundcharakteristik.

Beweis. Die Grundcharakteristik erfüllt

$$\frac{d}{ds}\gamma(s) = a(\gamma(s)), \quad s \in I, \quad (11.15)$$

also gilt

$$\frac{d}{ds}u(\gamma(s)) = \langle \nabla u(\gamma(s)), \frac{d}{ds}\gamma(s) \rangle = \langle \nabla u(\gamma(s)), a(\gamma(s)) \rangle = 0 \quad (11.16)$$

und u ist konstant entlang γ . Für die Rückrichtung: Sei u konstant entlang der Grundcharakteristiken, d.h. u ist eine Funktion, so daß gilt

$$u(\gamma(s)) = u(\gamma_1(s), \dots, \gamma_n(s)) = \text{const.} \quad (11.17)$$

Differenzieren nach s liefert

$$0 = \frac{d}{ds}u(\gamma(s)) = \langle \nabla u(\gamma(s)), \frac{d}{ds}\gamma(s) \rangle = \langle \nabla u(\gamma(s)), a(\gamma(s)) \rangle = 0, \quad (11.18)$$

weil γ Grundcharakteristik ist. Durch jeden Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ führt eine Grundcharakteristik γ mit $\gamma(0) = (x_1, \dots, x_n)$ (nach Voraussetzung über stationäre Punkte sogar genau eine). Für diese Grundcharakteristik folgt aber dann, daß

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds}u(\gamma(s)) = \langle \nabla u(\gamma(s)), \frac{d}{ds}\gamma(s) \rangle = \langle \nabla u(\gamma(s)), a(\gamma(s)) \rangle = 0 \quad \text{für } s = 0 \Rightarrow \\ 0 &= \langle \nabla u(x_1, \dots, x_n), a(x_1, \dots, x_n) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Also erfüllt u die PDE im Punkt (x_1, \dots, x_n) . Weil (x_1, \dots, x_n) beliebig war, ist u eine Lösung der PDE. \blacksquare

Um Lösungen von (11.2) zu finden, hat man demnach zuerst die allgemeine Lösung des charakteristischen Systems zu berechnen und dann Funktionen u zu suchen, die einen konstanten Wert annehmen, wenn man für ihre Variablen die allgemeine Grundcharakteristik einsetzt. Wir demonstrieren diesen sehr allgemeinen Lösungsweg anhand mehrerer Beispiele.

1. Die PDE $xu_x + yu_y = 0$ ist zu lösen für $y > 0$. Es ist also $a(x, y) = (x, y)^T$. Das zugeordnete charakteristische System lautet daher

$$\gamma'(s) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(s) \\ \gamma'_2(s) \end{pmatrix} = a(\gamma(s)) = a(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \end{pmatrix}. \quad (11.20)$$

Die allgemeine Lösung des Systems mit zwei Konstanten ist

$$\gamma_1(s) = C_1 e^s, \quad \gamma_2(s) = C_2 e^s. \quad (11.21)$$

Eine Kombination davon, die immer konstant ist (unabhängig von $s \in I$) ist z.Bsp.

$$\zeta(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = \frac{\gamma_1(s)}{\gamma_2(s)} = \frac{C_1}{C_2} = \text{const.} \quad (11.22)$$

Also ergibt sich eine spezielle Lösung $u_1(x, y) = \frac{x}{y}$. Weitere Lösungen sind $u(x, y) = g(u_1(x, y))$ mit beliebigem differenzierbarem $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, da natürlich auch $g(u_1(x, y))$ konstant auf den Grundcharakteristiken ist, wenn u_1 das ist.

Es ist auch möglich, die direkte Lösung des charakteristischen Systems geschickt zu vermeiden. Dazu multiplizieren wir die erste Gleichung des charakt. Systems mit γ_2 und die zweite mit γ_1 und subtrahieren die beiden Gleichungen dann. Das liefert

$$\gamma'_1(s)\gamma_2(s) - \gamma_1(s)\gamma'_2(s) = 0, \quad (11.23)$$

für $\gamma_2(s) > 0$ aber dann auch

$$0 = \frac{\gamma'_1(s)\gamma_2(s) - \gamma_1(s)\gamma'_2(s)}{\gamma_2^2(s)} = \frac{d}{ds} \left[\frac{\gamma_1(s)}{\gamma_2(s)} \right] \Rightarrow \frac{\gamma_1(s)}{\gamma_2(s)} = \text{const.}, \quad (11.24)$$

woraus wieder $u_1(x, y) = \frac{x}{y}$ als spezielle Lösung folgt.

2. Die PDE $x u_x + y^2 u_y = 0$ ist zu lösen für $x > 0, y > 0$. Es ist also $a(x, y) = (x, y^2)^T$. Das zugeordnete charakteristische System lautet daher

$$\gamma'(s) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(s) \\ \gamma'_2(s) \end{pmatrix} = a(\gamma(s)) = a(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2^2(s) \end{pmatrix} \quad (11.25)$$

Also folgt z.Bsp.

$$\begin{aligned} \frac{\gamma'_1(s)}{\gamma_1(s)} - \frac{\gamma'_2(s)}{\gamma_2^2(s)} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{d}{ds} \left(\log |\gamma_1(s)| + \frac{1}{\gamma_2(s)} \right) &= \text{const.} \end{aligned} \quad (11.26)$$

Eine spezielle Lösung ist daher $u_1(x, y) = \log |x| + \frac{1}{y}$ und die allgemeine Lösung ist

$$u(x, y) = g(\log |x| + \frac{1}{y}). \quad (11.27)$$

3. Die PDE $y u_x - x u_y = 0$ ist zu lösen für $(x, y) \neq (0, 0)$. Es ist also $a(x, y) = (y, -x)^T$. Das zugeordnete charakteristische System lautet daher

$$\gamma'(s) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(s) \\ \gamma'_2(s) \end{pmatrix} = a(\gamma(s)) = a(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = \begin{pmatrix} \gamma_2(s) \\ -\gamma_1(s) \end{pmatrix}. \quad (11.28)$$

Die allgemeine Lösung des Systems mit zwei Konstanten ist

$$\gamma_1(s) = C_1 \sin(s + C_2), \quad \gamma_2(s) = C_1 \cos(s + C_2). \quad (11.29)$$

Die Grundcharakteristiken sind also Kreise um $(0, 0)$ mit Radius C_1 beliebig. Charakteristiken sind daher alle Kreise in der (x, y) -Ebene parallelen Ebenen mit Mittelpunkt auf der z -Achse. Nach Theorem (11.4) ist die Integralfläche konstant entlang den Grundcharakteristiken. Eine Kombination der gefundenen Grundcharakteristiken, die immer konstant ist (unabhängig von $s \in I$) ist z.Bsp.

$$\zeta(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = \gamma_1^2(s) + \gamma_2^2(s) = C_1^2 = \text{const.} \quad (11.30)$$

Also ergibt sich eine spezielle Lösung $u_1(x, y) = x^2 + y^2$. Weitere Lösungen sind $u(x, y) = g(u_1(x, y))$ mit differenzierbarem $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, also vermuten wir, daß die allgemeine Lösung gegeben ist durch $u(x, y) = g(x^2 + y^2)$. Das sind Rotationsflächen um die z -Achse.

Schneller geht es wieder, wenn wir die erste Gleichung mit γ_1 und die zweite Gleichung mit γ_2 multiplizieren und beide Gleichungen addieren. Das liefert $\gamma'_1(s) \gamma_1(s) + \gamma'_2(s) \gamma_2(s) = 0$, was äquivalent zu

$$\frac{d}{ds} (\gamma_1^2(s) + \gamma_2^2(s)) = 0 \quad (11.31)$$

ist. Also ist $\gamma_1^2(s) + \gamma_2^2(s) = \text{const.}$ eine gesuchte Kombination der Grundcharakteristiken, die konstant ist.

4. Die PDE $x u_x + y u_y + (x^2 + y^2) u_z = 0$ ist zu lösen für $x > 0$. Es ist also $a(x, y, z) = (x, y, x^2 + y^2)^T$. Das zugeordnete charakteristische System lautet daher

$$\gamma'(s) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(s) \\ \gamma'_2(s) \\ \gamma'_3(s) \end{pmatrix} = a(\gamma(s)) = a(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \\ \gamma_1^2(s) + \gamma_2^2(s) \end{pmatrix}. \quad (11.32)$$

Das liefert (direkt gelöst für γ_1, γ_2)

$$\begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \\ \gamma_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^s \\ C_2 e^s \\ C_1^2 e^{2s} + C_2 e^{2s} \end{pmatrix} \quad (11.33)$$

also $\gamma_3(s) = \frac{C_1^2 + C_2^2}{2} e^{2s} + C_3$. Wir suchen wieder konstante Kombinationen der Grundcharakteristiken. Es bietet sich an

$$\begin{aligned}\Psi_1(C_1, C_2) &= \frac{\gamma_1(s)}{\gamma_2(s)} = \frac{C_1}{C_2} = \text{const.}, \\ \Psi_2(C_1, C_2, C_3) &= \gamma_3(s) - \frac{\gamma_1^2(s) + \gamma_2^2(s)}{2} = C_3 = \text{const.}\end{aligned}\quad (11.34)$$

Die Kombination Ψ_1 führt auf die spezielle Lösung $u_1(x, y, z) = \frac{x}{y}$, während die Kombination Ψ_2 auf die spezielle Lösung $u_2(x, y, z) = z - \frac{x^2 + y^2}{2}$ führt. Aus diesen zwei speziellen Lösungen ergeben sich beliebig viele weitere Lösungen, indem man mit einer differenzierbaren Funktion $G : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ansetzt

$$u(x, y, z) = G(u_1(x, y, z), u_2(x, y, z)). \quad (11.35)$$

In diesem Falle liefert z. Bsp. $G(\xi, \eta) = \xi \cdot \eta$ die weitere spezielle Lösung $u_3(x, y, z) = \frac{y}{x} \left(z - \frac{x^2 + y^2}{2} \right)$.

Wie wir im letzten Beispiel gesehen haben, können wir uns unter Umständen eine ganze Reihe von speziellen Lösungen der PDE (11.2) verschaffen und sogar durch Kombination derselben beliebig viele spezielle Lösungen erhalten. Trotzdem stellt sich die Frage, ob wir entscheiden können, ob wir schon alle möglichen Lösungen so gewinnen können, oder ob uns noch spezielle Lösungen "fehlen", die wir nicht aus den anderen, schon bekannten Lösungen kombinieren können. Dazu studieren wir weiter unten den Begriff der Abhängigkeit von Funktionen.

Für das Auffinden von Lösungen der homogenen, verkürzten PDE (11.2) mittels der sogenannten Charakteristikenmethode haben wir bis jetzt folgende Möglichkeiten kennengelernt:

1. Berechnung der allgemeinen Lösung des charakteristischen Systems, welche von n Konstanten C_1, \dots, C_n abhängt: $\gamma = \gamma(s; C_1, \dots, C_n)$. Also

$$\gamma(s; C_1, \dots, C_n) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s; C_1, \dots, C_n) \\ \vdots \\ \gamma_n(s; C_1, \dots, C_n) \end{pmatrix}$$

Diese n -Gleichungen $\gamma_i = \gamma_i(s; C_1, \dots, C_n)$ kann man unter Umständen (Satz über implizite Funktionen) lokal nach C_1, \dots, C_n auflösen (wobei man sich jetzt die Konstanten als Variablen denken muss), das heißt, man kann schreiben

$$\begin{aligned}C_1 &= C_1(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \\ \vdots &= \vdots \\ C_n &= C_n(\gamma_1, \dots, \gamma_n).\end{aligned}\quad (11.36)$$

Dann betrachtet man in den Ausdrücken für C_i eine Funktion $\Psi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ die die explizite Abhängigkeit von s eliminiert (implizit über die γ_i ist s immer vorhanden) und schreibt

$$\begin{aligned}\text{const.} &= \Psi(C_1, \dots, C_n) \\ &= \Psi(C_1(\gamma_1, \dots, \gamma_n), \dots, C_n(\gamma_1, \dots, \gamma_n)) =: f(\gamma_1, \dots, \gamma_n)\end{aligned}\quad (11.37)$$

mit einer so definierten Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Daraus folgt dann die klassische Lösung

$$u(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n), \quad (11.38)$$

falls f differenzierbar ist

2. Oder man manipuliert das charakteristische System so, daß man Ausdrücke der Form

$$\frac{d}{ds} f(\gamma_1(s), \dots, \gamma_n(s)) = 0 \quad (11.39)$$

erhält, so daß gilt

$$f(\gamma_1(s), \dots, \gamma_n(s)) = \text{const.} \quad (11.40)$$

Ein solches f heißt dann **Vorintegral**. Mit Theorem 11.4 ist dann

$$u(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \quad (11.41)$$

eine Lösung der homogenen PDE (11.2).

Die Beantwortung der Frage nach der allgemeinen Lösung von (11.2) setzt die Kenntnis des folgenden Abhängigkeitsbegriffes für Funktionen voraus, der eine Verallgemeinerung des Begriffs der linearen Abhängigkeit darstellt.

Definition 11.5 (Abhängigkeit)

Die in einer beschränkten, abgeschlossenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definierten Funktionen $u_1, \dots, u_k : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ heißen in Ω voneinander **abhängig**, wenn eine Funktion $F : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}$ existiert mit folgenden Eigenschaften:

1. Die partiellen Ableitungen $D_1 F, \dots, D_k F$ sind im \mathbb{R}^k stetig.
2. In keinem Teilgebiet des \mathbb{R}^k ist $F \equiv 0$ (in isolierten Punkten oder entlang Untermannigfaltigkeiten, die keine offene Menge sind, könnte das aber sein).
3. $F(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_k(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0$ in Ω .

Die Funktionen $u_1, \dots, u_k : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ heißen in einem offenen Gebiet Ω voneinander **abhängig**, wenn sie in jedem abgeschlossenen Teilbereich von Ω abhängig sind. ■

Falls nur lineare Funktionen $F : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}$,

$$F(\xi_1, \dots, \xi_k) = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k \quad (11.42)$$

zugelassen werden, so führt diese Definition zurück auf die lineare Abhängigkeit.

Falls nur die Frage nach Abhängigkeit oder Unabhängigkeit eine Rolle spielt, aber nicht die Struktur von F , so kann das folgende (linearisierte) Kriterium herangezogen werden. Dabei bezeichnen wir mit J_u die Funktionalmatrix/Jacobimatrix der u_1, \dots, u_k , i.e. die Matrix

$$J_u(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k, \\ J_u(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u_1(x_1, \dots, x_n) & \dots & \partial_{x_n} u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} u_k(x_1, \dots, x_n) & \dots & \partial_{x_n} u_k(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}. \quad (11.43)$$

Theorem 11.6 (Kriterium für Abhängigkeit von Funktionen)

Haben die Funktionen $u_1, \dots, u_k : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ in einem Gebiet Ω stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung, so sind sie in Ω

1. für $n = k$ genau dann abhängig, falls $\det[J_u(x_1, \dots, x_n)] \equiv 0$ in Ω .
2. für $n < k$ stets voneinander abhängig.
3. für $n > k$ voneinander unabhängig, falls J_u in Ω den Rang k besitzt, also in Ω nicht alle k -reihigen Unterdeterminanten der Jacobimatrix $J_u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$ identisch verschwinden.

Beweis. Wir machen uns wenigstens den 1. Fall (eine Richtung) klar um zu verstehen, welche Rolle die Jacobi-Matrix J_u spielt. Wir nehmen an, daß es eine nichtverschwindende glatte Funktion $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ gibt mit

$$F(u_1(x), \dots, u_n(x)) \equiv 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (11.44)$$

Außerdem gelte aber $\det[J_u(x)] \neq 0$ in Ω . Wir möchten das zum Widerspruch führen. Aus

$$F(u_1(x), \dots, u_n(x)) \equiv 0 \quad (11.45)$$

gewinnen wir durch partielle Differentiation die n -Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{x_1} [F(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n))] \\ &\quad \vdots \\ 0 &= \partial_{x_n} [F(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n))] . \end{aligned} \tag{11.46}$$

Anwendung der Kettenregel liefert

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (D_1 F(u_1, \dots, u_n), \dots, D_n F(u_1, \dots, u_n)) \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u_1(x_1, \dots, x_n) & \dots & \partial_{x_n} u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} u_k(x_1, \dots, x_n) & \dots & \partial_{x_n} u_k(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} . \tag{11.47}$$

Nach transponieren läßt sich das mit $\nabla F = (D_1 F, \dots, D_n F) \in \mathbb{R}^n$ kürzer schreiben als

$$J_u(x_1, \dots, x_n)^T \nabla F(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n)) = 0 , \tag{11.48}$$

womit wegen $\det[J_u] \neq 0$ folgt, daß

$$\nabla F(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n)) = 0 \quad (x_1, \dots, x_n) \in \Omega . \tag{11.49}$$

Wieder wegen $\det[J_u] \neq 0$ folgt, daß, wenigstens lokal um einen ausgezeichneten Punkt $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in \Omega$ die Bilder $u(x)$ eine offene Menge bilden (das System u ist diffeomeorph). Also schließen wir, daß

$$\nabla F(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0 \quad \text{für } (\xi_1, \dots, \xi_n) \in U(u(\tilde{x})) \subset \mathbb{R}^n . \tag{11.50}$$

Weil F glatt vorausgesetzt ist, muß gelten $F = \text{const}$ in der offenen Menge (dem Teilgebiet des $\mathbb{R}^k, k = n$) U . Wegen (11.44) gilt sogar $F \equiv 0$ für $\xi \in U(\tilde{x})$. Das ist aber ein Widerspruch, da vorausgesetzt war, daß F nicht auf irgendeinem Gebiet identisch verschwindet. Somit haben wir gezeigt: Sind u_1, \dots, u_n abhängig, so muß $\det[J_u] = 0$ gelten. Die Rückrichtung ist übrigens bedeutend schwieriger zu zeigen. ■

Betrachten wir ein Beispiel. Wir zeigen, daß je zwei verschiedene Lösungen der PDE $a_1(x, y)u_x(x, y) + a_2(x, y)u_y(x, y) = 0$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ voneinander abhängig sind, falls $a_1^2(x, y) + a_2^2(x, y) > 0$, $(x, y) \in \Omega$. Dazu seien $u, v : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ solche verschiedenen Lösungen, also

$$\begin{aligned} a_1(x, y)u_x(x, y) + a_2(x, y)u_y(x, y) &= 0 \\ a_1(x, y)v_x(x, y) + a_2(x, y)v_y(x, y) &= 0 \quad \text{oder in Matrix-Notation} \\ \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{11.51}$$

Da $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ muß also

$$\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = 0 \tag{11.52}$$

sein womit die Aussage bewiesen ist. Wir sehen: für homogene, verkürzte PDE's 1. Ordnung im \mathbb{R}^2 gewinnt man mit einer speziellen Lösung alle Lösungen als davon abhängige Lösungen.

Beispiel: $u_1(x) = \sin x$ und $u_2(x) = \cos x$ sind auf jedem reellen Intervall abhängig, da mit $F(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + \xi_2^2 - 1$ in der Tat gilt, daß $F(u_1(x), u_2(x)) \equiv 0$, aber $F \neq 0$.

Beispiel: $u_1(x, y) = e^x y$ und $u_2(x, y) = x + y$ sind in der (x, y) -Ebene unabhängig, denn es gilt mit

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \begin{pmatrix} e^x y \\ x + y \end{pmatrix} , \quad J_u(x, y) = \begin{pmatrix} e^x y & e^x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \\ \det[J_u](x, y) &= e^x (y - 1) , \end{aligned} \tag{11.53}$$

so daß $\det[J_u](x, y) = e^x (y - 1)$ zwar auf der Geraden $y = 1$ null wird, aber in keinem Gebiet Null ist (die Gerade $y = 1$ ist keine offene Menge, also kein Gebiet).

Beispiel: Die speziellen Lösungen $u_1(x, y, z) = \frac{y}{x}$ und $u_2(x, y, z) = z - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ sind für $x > 0$ unabhängig, denn mit

$$u(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} \\ z - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{pmatrix}, \quad J_u(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \\ -x & -y & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ -x & -y \end{pmatrix} = \frac{y^2}{x^2} + 1 > 0 \quad (11.54)$$

so daß J_u den Rang zwei hat.

Theorem 11.7

Je n -Lösungen $u_1, \dots, u_n : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ der PDE $\langle a(x), \nabla u(x) \rangle = 0$ ($a : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$) in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sind abhängig.

Beweis. Da $u_1, \dots, u_n : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ Lösungen sind gilt offenbar

$$\begin{aligned} \langle a(x), \nabla u_1(x) \rangle &= 0 \\ &\vdots \\ \langle a(x), \nabla u_n(x) \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (11.55)$$

Das lässt sich auch schreiben als

$$\begin{pmatrix} \nabla u_1 & \cdots \\ \vdots & \\ \nabla u_n & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_n(x) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow J_u(x).a(x) = 0, \quad (11.56)$$

womit klar ist, daß der Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ im Kern von J_u liegt, somit J_u nicht invertierbar ist, also $\det[J_u] = 0$. Nach dem Kriterium aus Theorem 11.6 sind somit u_1, \dots, u_n abhängig.

Definition 11.8 (Fundamentalsystem)

Ein System von $n-1$ Lösungen $u_1, \dots, u_{n-1} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ der PDE $\langle a(x), \nabla u(x) \rangle = 0$ in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein **Fundamentalsystem** oder eine **Integralbasis**, wenn die zugehörige Jacobi-Matrix J_u in jedem Teilgebiets von Ω den Rang $n-1$ hat.

Bemerkung 11.9

Die Funktionen eines Fundamentalsystems sind nach Theorem 11.6 in Ω unabhängig. Bilden $u_1, \dots, u_{n-1} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ in Ω also eine Integralbasis und ist u eine weitere Lösung von $\langle a(x), \nabla u(x) \rangle = 0$, so existiert eine von null verschiedene Funktion $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$F(u_1, \dots, u_{n-1}, u) \equiv 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (11.57)$$

Mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen kann man beweisen, daß in einer hinreichend kleinen Umgebung eines Punktes $x_0 \in \Omega$, für den gilt

$$D_n F(u_1(x_0), \dots, u_{n-1}(x_0), u(x_0)) \neq 0 \quad (11.58)$$

sich die Relation (11.57) lokal eindeutig nach $u(x)$ auflösen lässt, d.h. es gibt eine Funktion $\tilde{F} : \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ so daß

$$u(x) = \tilde{F}(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)) \quad (11.59)$$

mit

$$F(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x), \tilde{F}(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x))) \equiv 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (11.60)$$

Wir bemerken noch, daß $D_n F \equiv 0$ nicht gelten kann, da sonst F gar nicht von der n -ten Variablen abhängen würde, mithin sich (11.57) als

$$F(u_1, \dots, u_{n-1}) \equiv 0 \quad \text{in } \Omega \quad (11.61)$$

schreiben ließe, womit die Funktionen u_1, \dots, u_{n-1} abhängig wären, also keine Integralbasis sein könnten. Umgekehrt wissen wir schon, daß jede Funktion mit einer Darstellung

$$u(x) = \tilde{F}(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)) \quad (11.62)$$

wieder eine Lösung der PDE $\langle a(x), \nabla u(x) \rangle = 0$ ist. In diesem Sinne kann man

$$u(x) = \tilde{F}(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)) \quad (11.63)$$

als **allgemeine Lösung** von $\langle a(x), \nabla u(x) \rangle = 0$ ansehen. In ihr tritt nicht wie bei einer ODE eine Konstante auf, sondern sogar eine frei wählbare Funktion \tilde{F} der $n-1$ Fundamentallösungen.

Für den Fall $n = 2$ hatten wir oben schon gesehen, daß eine spezielle Lösung $u_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ schon eine Integralbasis bildet, sofern sie nicht konstant ist. Jede weitere Lösung ergibt sich durch $u(x, y) = \tilde{F}(u_1(x, y))$.

11.2 Existenz einer Integralbasis

Es stellt sich natürlich die Frage, ob es zur PDE $\langle a(x), \nabla u(x) \rangle = 0$ immer auch eine Integralbasis gibt. Im Prinzip wissen wir ja nicht einmal, ob es überhaupt (eine) spezielle Lösungen zu $\langle a(x), \nabla u(x) \rangle = 0$ gibt.

Wir hatten das Auffinden von speziellen Lösungen allerdings zurückgeführt auf die Lösung des charakteristischen Systems (11.12). Falls die Koeffizientenfunktion $a : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ **global Lipschitz** ist, d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$ so daß

$$\forall \xi, \eta \in \Omega \subset \mathbb{R}^n : \|a(\xi) - a(\eta)\| \leq C \|\xi - \eta\|, \quad (11.64)$$

dann hat das charakteristische System für die Unbekannte $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$,

$$\gamma'(s) = a(\gamma(s)), \quad \gamma(0) = \gamma_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (11.65)$$

genau eine Lösung. Mit der Vorgabe eines variablen $\gamma_0 \in \mathbb{R}^n$ finden wir also eine n -parametrische Schar von charakteristischen Grundkurven $\gamma(s; \gamma_0)$. Zu jedem γ_0 findet man also wenigstens eine spezielle Lösung. Wir wissen, daß sich jede Lösung der PDE als Fläche denken läßt, die durch Charakteristiken aufgespannt wird. Es ist nun möglich, durch geschickte Wahl von γ_0 $n-1$ -viele spezielle Lösungen zu finden, die auch unabhängig sind.

11.3 Die quasilineare PDE 1. Ordnung in zwei unabhängigen Variablen

Unter der allgemeinen quasilinearen PDE 1. Ordnung in zwei unabhängigen Variablen für eine gesuchte Funktion $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ verstehen wir eine (nichtlineare) Gleichung der Form

$$a_1(x, y, u) u_x + a_2(x, y, u) u_y = a_3(x, y, u), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (11.66)$$

Wir können das umschreiben zu

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1(x, y, u) \\ a_2(x, y, u) \\ a_3(x, y, u) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0. \quad (11.67)$$

Eine Lösung zu (11.67) $(x, y) \mapsto u(x, y)$ fassen wir als Integralfläche im \mathbb{R}^3 auf indem wir die Fläche schreiben als

$$\mathcal{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3, \quad (11.68)$$

$$\mathcal{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u(x, y) \end{pmatrix}.$$

Der Normalenvektor an die Fläche \mathcal{F} ergibt sich aus dem Kreuzprodukt

$$\partial_x \mathcal{F}(x, y) \times \partial_y \mathcal{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_x(x, y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_x \\ -u_y \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11.69)$$

Also ist ein Normaleneinheitsvektor an die Fläche gegeben durch

$$\vec{n}_{\mathcal{F}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (11.70)$$

Wir sehen jetzt, daß der Vektor $a = (a_1, a_2, a_3)$ immer senkrecht zur Normalen an die Integralfläche (11.68) ist. Der Vektor $a = (a_1(x, y, u(x, y)), a_2(x, y, u(x, y)), a_3(x, y, u(x, y)))$ muß also also in der Tangentialebene der Integralfläche im Punkt $(x, y, u(x, y))$ liegen.

Definition 11.10 (Charakteristisches System für quasilineare PDE)

Wir nennen $a = (a_1(x, y, u(x, y)), a_2(x, y, u(x, y)), a_3(x, y, u(x, y)))$ charakteristische Richtung zu (11.67) und definieren das zugehörige System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung, das sogenannte **charakteristische System** für $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$

$$\gamma'(s) = a(\gamma(s)) = \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \gamma'_1(s) \\ \gamma'_2(s) \\ \gamma'_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \\ a_2(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \\ a_3(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \end{pmatrix}, \quad \gamma(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \quad (11.71)$$

■

Prüfen Sie nach, daß diese Definition mit der Definition im verkürzten Fall übereinstimmt, falls man die verkürzte Gestalt der PDE betrachtet.

Lemma 11.11

Sei $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ Lösung der quasilinearen PDE und sei $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ eine Lösung des zugehörigen charakteristischen Systems mit $\gamma(0) = (x_0, y_0, u(x_0, y_0))$, d.h. $\gamma(0)$ liegt auf der Integralfläche. Dann liegt $\gamma(s)$ immer auf der Integralfläche. Zwei Lösungen u_1, u_2 der PDE, die sich in einem Punkt treffen, d.h. $(x_0, y_0, u_1(x_0, y_0)) = (x_0, y_0, u_2(x_0, y_0)) = P$ schneiden sich sogar in der durch diesen Punkt $P \in \mathbb{R}^3$ gehenden Charakteristik.

Beweis. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) &= u_x(\gamma_1, \gamma_2)\gamma'_1 + u_y(\gamma_1, \gamma_2)\gamma'_2 \\ \gamma_1, \gamma_2 &\text{ erfüllen die zugehörigen charakteristischen Gleichungen} \Rightarrow \\ &= u_x(\gamma_1, \gamma_2)a_1(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) + u_y(\gamma_1, \gamma_2)a_2(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \\ u &\text{ erfüllt die PDE} \Rightarrow \\ &= a_3(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \\ \text{charakteristische Gleichung für } \gamma_3 &\text{ einsetzen} \Rightarrow \\ &= \gamma'_3(s) = \frac{d}{ds}\gamma_3(s). \end{aligned} \quad (11.72)$$

Also gilt nach Integration $u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = \gamma_3(s) + K$. Wegen $\gamma(0) = (\gamma_1(0), \gamma_2(0), \gamma_3(0)) = (x_0, y_0, u(x_0, y_0))$ folgt $u(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) = \gamma_3(0)$ also $K = 0$ und mithin

$$u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = \gamma_3(s), \quad (11.73)$$

also liegt $\gamma(s)$ auf der Integralfläche. ■

Betrachten wir eine einparametrische Schar von Charakteristiken. Das ist eine Familie von Kurven $\gamma = \gamma(s; c)$ die das System (11.71) erfüllen, wobei s der Kurvenparameter ist (wo befindet sich mich auf der Kurve) und c angibt, welche Kurve ausgewählt wird. Jede solche einparametrische Schar von Charakteristiken erzeugt also Integralfläche (die Kurven der Schar überdecken die Lösungsfläche).

Es gilt aber auch die Umkehrung, d.h. jede Integralfläche definiert eine Lösung des charakteristischen Systems.

Lemma 11.12

Sei $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ Lösung der quasilinearen PDE und $(\gamma_1, \gamma_2) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ erfülle

$$\begin{aligned} \gamma'_1(s) &= a_1(\gamma_1(s), \gamma_2(s), u(\gamma_1(s), \gamma_2(s))), \\ \gamma'_2(s) &= a_2(\gamma_1(s), \gamma_2(s), u(\gamma_1(s), \gamma_2(s))). \end{aligned} \quad (11.74)$$

Dann gilt, daß

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \\ u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \end{pmatrix} \quad (11.75)$$

das zugehörige charakteristische System löst.

Beweis. Sei $(x, y, (u(x, y)))$ die gegebene Integralfläche. Wir betrachten zuerst die Lösung $(\gamma_1, \gamma_2) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ von

$$\begin{aligned}\gamma'_1(s) &= a_1(\gamma_1(s), \gamma_2(s), u(\gamma_1(s), \gamma_2(s))) \\ \gamma'_2(s) &= a_2(\gamma_1(s), \gamma_2(s), u(\gamma_1(s), \gamma_2(s))).\end{aligned}\quad (11.76)$$

(Das sind noch nicht die beiden Gleichungen des charakteristischen Systems!). Nun setzen wir $\gamma_3(s) := u(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\gamma'_3(s) &= u_x(\gamma_1, \gamma_2)\gamma'_1 + u_y(\gamma_1, \gamma_2)\gamma'_2 \\ &= u_x(\gamma_1, \gamma_2)a_1(\gamma_1(s), \gamma_2(s), u(\gamma_1(s), \gamma_2(s))) + u_y(\gamma_1, \gamma_2)a_2(\gamma_1(s), \gamma_2(s), u(\gamma_1(s), \gamma_2(s))) \\ &\quad u \text{ erfüllt die PDE} \Rightarrow \\ &= a_3(\gamma_1(s), \gamma_2(s), u(\gamma_1(s), \gamma_2(s))) \\ &\quad \text{Definition von } \gamma_3 \Rightarrow \\ &= a_3(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)).\end{aligned}\quad (11.77)$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}\gamma'_1(s) &= a_1(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \\ \gamma'_2(s) &= a_2(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \\ \gamma'_3(s) &= a_3(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)),\end{aligned}\quad (11.78)$$

und $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ löst tatsächlich das charakteristische System. \blacksquare

Da u längs einer Charakteristik nicht mehr konstant sein muß weil $u = \gamma_3(s)$, sind im Fall $n = 2$ die Charakteristiken im allgemeinen keine Höhenlinien der Integralfläche mehr, aber man kann sich leicht überlegen, daß unser Lösungsverfahren auf demselben Prinzip basiert wie bei der homogenen, linearen verkürzten PDE 1. Ordnung: eine Funktion $u = u(x, y)$ mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung ist genau dann eine Lösung der PDE $a_1(x, y, u)u_x + a_2(x, y, u)u_y = a_3(x, y, u)$, wenn ihre Fläche von Charakteristiken aufgespannt wird, d.h. u ist Lösung, wenn $\gamma_3(s) = u(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ identisch erfüllt ist.

Im allgemeineren Fall für n unabhängige Variablen können wir ganz genauso vorgehen. Es gilt

Theorem 11.13

Sind die Koeffizientenfunktionen $a_i(x_1, \dots, x_n, \xi)$, $i = 1 \dots (n+1)$ stetig in dem Gebiet $\Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und verschwinden in keinem Punkt von Ω gleichzeitig, so ist jede Funktion $u = u(x_1, \dots, x_n)$ mit stetigen partiellen Ableitungen 1. Ordnung genau dann eine Lösung von

$$\langle a(x), \begin{pmatrix} \nabla u(x) \\ -1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, a : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^{n+1}, \quad (11.79)$$

falls für jede Lösung des zugehörigen charakteristischen Systems für $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\frac{d}{ds}\gamma(s) = a(\gamma(s)) \quad (11.80)$$

gilt, daß

$$\gamma_{n+1}(s) = u(\gamma_1(s), \dots, \gamma_n(s)) \quad (11.81)$$

ist.

Beweis. Eine Kombination der beiden vorherigen Lemmata sowie die offensichtliche Erweiterung auf mehr Variablen. \blacksquare

11.4 Spezielle Lösung durch Anfangskurve

Wir wollen verlangen, daß die Lösung u der quasilinearen PDE 1. Ordnung in zwei unabhängigen Variablen durch die Kurve $t \mapsto \vartheta(t) \in \mathbb{R}^3$ geht, daß also gilt $\vartheta_3(t) = u(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$.

In diesem Fall kann man zeigen (unter den üblichen Glattheitsannahmen an die Koeffizienten der PDE)

1. Ist $t \mapsto (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))$ **keine Grundcharakteristik**, d.h. es gilt

$$\det \begin{pmatrix} \vartheta'_1(t) & a_1(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t)) \\ \vartheta'_2(t) & a_2(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t)) \end{pmatrix} \neq 0 \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad (11.82)$$

dann gibt es **genau eine Lösung** zu $a_1(x, y, u)u_x + a_2(x, y, u)u_y = a_3(x, y, u)$.

2. Ist $t \mapsto (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t))$ **eine Charakteristik**, so gibt es unendlich viele Lösungen der PDE $a_1(x, y, u)u_x + a_2(x, y, u)u_y = a_3(x, y, u)$, weil man keine Bedingung transversal zu ϑ vorschreibt (siehe den linearen Fall).

3. Ist $t \mapsto (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t))$ **keine Charakteristik**, aber $t \mapsto (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))$ **ist Grundcharakteristik**, so gibt es **keine Lösung** durch ϑ , denn jede Lösung u der PDE würde über die Definition $\vartheta_3(t) := u(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))$ eine Lösung des charakteristischen Systems erzeugen.

Wir betrachten den ersten Fall genauer und beweisen:

Theorem 11.14

Die quasilineare PDE 1. Ordnung in zwei unabhängigen Variablen

$$a_1(x, y, u(x, y))u_x(x, y) + a_2(x, y, u(x, y))u_y(x, y) = a_3(x, y, u(x, y)) \quad (11.83)$$

mit glatten Koeffizientenfunktionen a_i sei gegeben. Die glatte Anfangskurve $t \mapsto \vartheta(t) \in \mathbb{R}^3$ sei gegeben. Die Grundanfangskurve $t \mapsto (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ sei **nicht-charakteristisch**, d.h.

$$\det \begin{pmatrix} \vartheta'_1(t) & a_1(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t)) \\ \vartheta'_2(t) & a_2(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t)) \end{pmatrix} \neq 0 \quad t \in I \subset \mathbb{R}. \quad (11.84)$$

Dann existiert eine Umgebung der Anfangskurve $t \mapsto \vartheta(t) \in \mathbb{R}^3$ und in dieser Umgebung **genau eine Lösung** $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ zur quasilinearen PDE mit

$$u(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)) = \vartheta_3(t) \quad \text{Anfangsbedingung}. \quad (11.85)$$

Beweis. Wir konstruieren die Lösung lokal mit Hilfe der Charakteristiken. Für ein fixiertes $t \in I \subset \mathbb{R}$ betrachten wir das zugehörige charakteristische System

$$\begin{pmatrix} \gamma'_1(s) \\ \gamma'_2(s) \\ \gamma'_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \\ a_2(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \\ a_3(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \end{pmatrix} \quad (11.86)$$

mit der Anfangsbedingung $\gamma(0) = \vartheta(t)$. Wegen der Glattheit der Koeffizientenfunktionen a_i hat dieses Problem lokal eine eindeutige, glatte Lösung (Satz v. Picard-Lindelöf), die auch glatt von den Daten abhängt. Für variables t ergibt sich die einparametrische Lösungsschar

$$\gamma = \gamma(s; \vartheta(t)) =: \begin{pmatrix} X(s, t) \\ Y(s, t) \\ U(s, t) \end{pmatrix} \quad (11.87)$$

Die Funktionen X, Y, U sind glatt in s und t . Außerdem, wegen der Anfangsbedingung,

$$\begin{pmatrix} X(0, t) \\ Y(0, t) \\ U(0, t) \end{pmatrix} = \gamma(0; \vartheta(t)) = \vartheta(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R}. \quad (11.88)$$

Wir zeigen als erstes, daß die Abbildung $(s, t) \mapsto (X(s, t), Y(s, t))$ in einer Umgebung der Anfangskurve (also in der Nähe von $s = 0$ lokal invertierbar ist. Dazu betrachten wir die Jacobi-Determinante

$$J_{(X, Y)} = \det \frac{\partial(X, Y)}{\partial(s, t)} = \det \begin{pmatrix} X_s(s, t) & X_t(s, t) \\ Y_s(s, t) & Y_t(s, t) \end{pmatrix} = X_s(s, t)Y_t(s, t) - X_t(s, t)Y_s(s, t) \quad (11.89)$$

Mit den Beziehungen

$$\begin{aligned}
X_s(s, t) &= \frac{d}{ds} X(s, t) = \frac{d}{ds} \gamma_1(s; \vartheta(t)) = \gamma'_1(s; \vartheta(t)) = a_1(\gamma_1(s; \vartheta(t)), \gamma_2(s; \vartheta(t)), \gamma_3(s; \vartheta(t))) \\
X_s(0, t) &= a_1(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t)) \\
X_t(0, t) &= \frac{d}{dt} X(0, t) = \frac{d}{dt} \vartheta_1(t) = \vartheta'_1(t) \\
Y_t(0, t) &= \frac{d}{dt} Y(0, t) = \frac{d}{dt} \vartheta_2(t) = \vartheta'_2(t) \\
Y_s(s, t) &= \frac{d}{ds} Y(s, t) = \frac{d}{ds} \gamma_2(s; \vartheta(t)) = \gamma'_2(s; \vartheta(t)) = a_2(\gamma_1(s; \vartheta(t)), \gamma_2(s; \vartheta(t)), \gamma_3(s; \vartheta(t))) \\
Y_s(0, t) &= a_2(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t))
\end{aligned} \tag{11.90}$$

folgt

$$J_{(X, Y)}|_{s=0} = a_1(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t)) \vartheta'_2(t) - \vartheta'_1(t) a_2(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t)) \neq 0 \tag{11.91}$$

wegen der Bedingung, daß ϑ_1, ϑ_2 keine Grundcharakteristik sind. Aus der Stetigkeit folgt auch $J_{(X, Y)} \neq 0$ in einer ganzen Umgebung um $s = 0$. Also kann man lokal schreiben, z. Bsp. für $t \in I \subset \mathbb{R}$ und $s \in (\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$

$$X = X(s, t), Y = Y(s, t) \Leftrightarrow s = s(X, Y), t = t(X, Y). \tag{11.92}$$

Damit können wir eindeutig eine (glatte) Funktion definieren (die Funktionen U, s, t sind ja glatt)

$$\Phi : V \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \quad \Phi(x, y) = U(s(x, y), t(x, y)). \tag{11.93}$$

Wir behaupten, daß diese Funktion Φ die PDE und die Anfangsbedingung erfüllt.

Nebenrechnung: Da X, Y und (s, t) lokal zueinander invers sind, können wir schreiben

$$s(X(s, t), Y(s, t)) = st(X(s, t), Y(s, t)) = t. \tag{11.94}$$

Differenzieren nach s und t der beiden Gleichungen ergibt die Relationen

$$\begin{aligned}
s_X(X, Y) X_s(s, t) + s_Y(X, Y) Y_s(s, t) &= 1, \\
s_X(X, Y) X_t(s, t) + s_Y(X, Y) Y_t(s, t) &= 0, \\
t_X(X, Y) X_s(s, t) + t_Y(X, Y) Y_s(s, t) &= 0, \\
t_X(X, Y) X_t(s, t) + t_Y(X, Y) Y_t(s, t) &= 1.
\end{aligned} \tag{11.95}$$

Die Funktion Φ erfüllt die Anfangsbedingung, d.h. für $t \in I$ gilt $\vartheta_3(t) = \Phi(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))$ weil nach Definition $\vartheta_3(t) = U(0, t) = \Phi(X(0, t), Y(0, t)) = \Phi(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))$ ist. Nun überprüfen wir die Differentialgleichung: es muß gelten

$$\begin{aligned}
a_1(X, Y, \Phi(X, Y)) \Phi_X(X, Y) + a_2(X, Y, \Phi(X, Y)) \Phi_Y(X, Y) &= a_2(X, Y, \Phi(X, Y)) \Leftrightarrow \\
a_1(X(s, t), Y(s, t), \Phi(X(s, t), Y(s, t))) \Phi_X(X(s, t), Y(s, t)) \\
+ a_2(X(s, t), Y(s, t), \Phi(X(s, t), Y(s, t))) \Phi_Y(X(s, t), Y(s, t)) &= a_2(X(s, t), Y(s, t), \Phi(X(s, t), Y(s, t)))
\end{aligned} \tag{11.96}$$

Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}
\Phi(X, Y) &= U(s(X, Y), t(X, Y)) \Rightarrow \\
\Phi_X(X, Y) &= U_s(s, t) s_X(X, Y) + U_t(s, t) t_X(X, Y) \\
\Phi_Y(X, Y) &= U_s(s, t) s_Y(X, Y) + U_t(s, t) t_Y(X, Y).
\end{aligned} \tag{11.97}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
& a_1(X(s, t), Y(s, t), U(s, t)) [U_s(s, t) s_X(X, Y) + U_t(s, t) t_X(X, Y)] \\
& + a_2(X(s, t), Y(s, t), U(s, t)) [U_s(s, t) s_Y(X, Y) + U_t(s, t) t_Y(X, Y)] \\
& \text{weil } a_1(X(s, t), Y(s, t), U(s, t)) = a_1(\gamma(s; \vartheta(t)) = \gamma'_1(s; \vartheta) = X_s(s, t) \\
& = X_s(s, t) [U_s(s, t) s_X(X, Y) + U_t(s, t) t_X(X, Y)] + Y_s(s, t) [U_s(s, t) s_Y(X, Y) + U_t(s, t) t_Y(X, Y)] \\
& = U_s [X_s s_X + Y_s s_Y] + U_t [X_s t_X + Y_s t_Y] \\
& \text{benutze die Relationen (11.95)} \\
& = U_s \cdot 1 + U_t \cdot 0 \\
& = \frac{d}{ds} U(s, t) = \frac{d}{ds} [\gamma_3(s; \vartheta(t))] = \vartheta'_3(s; \vartheta(t)) = a_3(\gamma(s; \vartheta(t)) \\
& = a_3(X(s, t), Y(s, t), U(s, t)) = a_3(X, Y, \Phi(X, Y))
\end{aligned} \tag{11.98}$$

was die Erfüllung der PDE zeigt.

Die Lösung ist auch eindeutig. Denn seien Φ und Ψ zwei Lösungen der PDE zur selben Anfangskurve. Zu jeder Integralfläche korrespondieren Lösungen des charakteristischen Systems, denn wenn man löst

$$\begin{pmatrix} \bar{\gamma}'_1(s) \\ \bar{\gamma}'_2(s) \\ \bar{\gamma}'_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(\bar{\gamma}_1(s), \bar{\gamma}_2(s), \Psi(\bar{\gamma}_1(s), \bar{\gamma}_2(s))) \\ a_2(\bar{\gamma}_1(s), \bar{\gamma}_2(s), \Psi(\bar{\gamma}_1(s), \bar{\gamma}_2(s))) \\ a_3(\bar{\gamma}_1(s), \bar{\gamma}_2(s), \Psi(\bar{\gamma}_1(s), \bar{\gamma}_2(s))) \end{pmatrix}, \tag{11.99}$$

dann erfüllt $\bar{\gamma}_1(s), \bar{\gamma}_2(s), \bar{\gamma}_3(s)$ mit

$$\bar{\gamma}_3(s) := \Psi(\bar{\gamma}_1(s), \bar{\gamma}_2(s)) \tag{11.100}$$

das charakteristische System. Für die Lösung zur Anfangskurve ϑ schreiben wir also

$$\begin{pmatrix} \bar{\gamma}_1(s; \vartheta(t)) \\ \bar{\gamma}_2(s; \vartheta(t)) \\ \bar{\gamma}_3(s; \vartheta(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X}(s, t) \\ \bar{Y}(s, t) \\ \bar{U}(s, t) \end{pmatrix}. \tag{11.101}$$

Da die Anfangskurve für Ψ mit der von Φ übereinstimmt und die Lösungen des charakteristischen Systems eindeutig sind, folgt aber, daß

$$\begin{pmatrix} \bar{X}(s, t) \\ \bar{Y}(s, t) \\ \bar{U}(s, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(s, t) \\ Y(s, t) \\ U(s, t) \end{pmatrix}. \tag{11.102}$$

Also

$$\Psi(X, Y) = \Psi(X(s, t), Y(s, t)) =: \bar{U}(s, t) = U(s, t) = \Phi(X(s, t), Y(s, t)) = \Phi(X, Y). \tag{11.103}$$

Das ist die Behauptung. \blacksquare

Bemerkung 11.15

Die eindeutige Lösung existiert i.A. nicht global, sondern nur in einer lokalen Umgebung der Anfangskurve. Selbst wenn die Auflösung nach X, Y in allen Punkten lokal geht, braucht es nicht global eindeutig umkehrbar zu sein.

11.5 Die allgemeine nichtlineare PDE 1. Ordnung

Wir studieren nun die Lösungstheorie zur allgemeinen nichtlinearen PDE 1. Ordnung

$$\begin{aligned}
F(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n), \nabla u(x_1, \dots, \dots, x_n)) &= 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\
u((x_1, \dots, \dots, x_n)) &= g(x_1, \dots, \dots, x_n) \quad \text{auf } x \in \Gamma \subset \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{11.104}$$

Die bisherige leitende Idee war, die Lösung entlang von Kurven zu bestimmen, die vom Rand in das Innere laufen (die charakteristischen Kurven). Wie soll man nun im allgemeinen Fall die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ wählen, damit man $u(\gamma(s))$ bestimmen kann? Wir definieren

$$\begin{aligned}
\gamma(s) &\in \mathbb{R}^n, \\
z(s) &:= u(\gamma(s)) \in \mathbb{R}, \\
p(s) &:= \nabla u(\gamma(s)) \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Differentiation von p nach s ergibt

$$p'_i(s) = \sum_{j=1}^n u_{x_i x_j}(\gamma(s)) \gamma'_j(s). \quad (11.105)$$

Partielle Differentiation nach x_i der PDE liefert

$$\begin{aligned} D_{x_i} F(x, u, \nabla u) 1 + D_z F(x, u, \nabla u) u_{x_i} + &= \sum_{j=1}^n D_{p_j} F(x, u, \nabla u) u_{x_i x_j} = 0, i = 1 \dots n \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n D_{p_j} F(x, u, \nabla u) u_{x_i x_j} &= -D_{x_i} F(x, u, \nabla u) 1 - D_z F(x, u, \nabla u) u_{x_i}. \end{aligned} \quad (11.106)$$

Nehmen wir weiter an, daß

$$\gamma'_j(s) = D_{p_j} F(\gamma(s), z(s), p(s)) \quad (11.107)$$

gilt, dann folgt entlang $\gamma(s)$ unter Einsetzen von (11.106) in (11.105), daß

$$\begin{aligned} p'_i(s) &= \sum_{j=1}^n u_{x_i x_j}(\gamma(s)) D_{p_j} F(\gamma(s), z(s), p(s)) \\ &= -D_{x_i} F(\gamma(s), u(\gamma(s)), \nabla u(\gamma(s))) 1 - D_z F(\gamma(s), u(\gamma(s)), \nabla u(\gamma(s))) u_{x_i}(\gamma(s)) \\ &= -D_{x_i} F(\gamma(s), z(s), p(s)) - D_z F(\gamma(s), z(s), p(s)) p_i(s). \end{aligned} \quad (11.108)$$

Zu letzt liefert differenzieren von $z(s) = u(\gamma(s))$ die Beziehung

$$z'(s) = \langle \nabla u(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle = \langle p(s), D_p F(\gamma(s), z(s), p(s)) \rangle, \quad (11.109)$$

wobei wir die Annahme über γ' benutzt haben.

Definition 11.16

Das charakteristische System der allgemeinen PDE 1. Ordnung (11.104) lautet für das $2n+1$ -Tupel γ, z, p ,

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= D_p F(\gamma(s), z(s), p(s)) \in \mathbb{R}^n, \\ z'(s) &= \langle D_p F(\gamma(s), z(s), p(s)), p(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}, \\ p'(s) &= -D_{x_i} F(\gamma(s), z(s), p(s)) - D_z F(\gamma(s), z(s), p(s)) p(s) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (11.110)$$

Theorem 11.17

Sei $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ eine Lösung von (11.104). Definiere $z(s) := u(\gamma(s))$, $p(s) := \nabla u(\gamma(s))$ und $\gamma : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ löse die ersten n -Gleichungen von (11.110). Dann lösen $p(s), z(s)$ die weiteren $n+1$ -Gleichungen von (11.110).

Beweis. Das ist zusammengefasst gerade das Ergebnis der letzten Herleitung. ■

Wir spezialisieren unsere Überlegungen im Folgenden wieder auf den Fall von 2 unabhängigen Variablen

Definition 11.18 (Streifen)

Ein 5-Tupel $t \mapsto (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t), p(t), q(t))$ heißt **Streifen**, falls die Streifenbedingung

$$\vartheta'_3(t) = p(t)\vartheta'_1(t) + q(t)\vartheta'_2(t) \quad t \in I \subset \mathbb{R} \quad (11.111)$$

identisch erfüllt ist. Die ersten drei Komponenten $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ stellen die Trägerkurve des Streifens dar.

Motivation: Sei $t \mapsto \vartheta(t) \in \mathbb{R}^3$ eine Kurve, die ganz auf einer Fläche $(x, y, u(x, y))$ liegt, d.h. es gilt

$$\vartheta_3(t) = u(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)). \quad (11.112)$$

Dann folgt durch differenzieren nach t , daß

$$\frac{d}{dt} \vartheta_3(t) = \vartheta'_3(t) = u_x(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)) \vartheta'_1(t) + u_y(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)) \vartheta'_2(t). \quad (11.113)$$

also ist $(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t), p(t), q(t))$ ein Streifen, falls $p(t) = u_x(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))$ und $q(t) = u_y(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))$ sind. Wir stellen uns vor, daß an der Trägerkurve $\vartheta \in \mathbb{R}^3$ kleine Flächenstücke angeheftet sind, die in jedem Punkt tangential zur Fläche liegen, falls man $p = u_x$ und $q = u_y$ wählt.

Trotzdem bezieht sich die Definition des Streifens nicht auf eine Fläche!

Definition 11.19 (Integralstreifen)

Ein 5-Tupel $t \mapsto (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t), p(t), q(t))$ heißt **Integralstreifen** zu $F : \mathbb{R}^5 \mapsto \mathbb{R}$, falls es ein Streifen ist und $F = 0$ entlang des Streifens gilt. Also falls

$$\begin{aligned} 0 &= F(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t), p(t), q(t)), \\ \vartheta'_3(t) &= p(t) \vartheta'_1(t) + q(t) \vartheta'_2(t) \quad t \in I \subset \mathbb{R} \end{aligned} \quad (11.114)$$

gilt.

Definition 11.20 (Charakteristisches System zu $F = 0$)

Zur nichtlinearen PDE 1. Ordnung in zwei Variablen

$$F(x, y, u, u_x(x, y), u_y(x, y)) = 0, \quad F(x, y, z, p, q) \in \mathbb{R}, \quad (11.115)$$

definieren wir für das 5-Tupel $s \mapsto (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s))$ das charakteristische System

$$\begin{aligned} \gamma'_1(s) &= F_p(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)), \\ \gamma'_2(s) &= F_q(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)), \\ \gamma'_3(s) &= p(s) F_p(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)) + q(s) F_q(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)), \quad \text{Streifen}, \\ p'(s) &= -F_x(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)) - p(s) F_z(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)), \\ q'(s) &= -F_y(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)) - q(s) F_z(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)). \end{aligned} \quad (11.116)$$

Wegen $\gamma'_3(s) = p(s) F_p(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)) + q(s) F_q(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)) = p(s) \gamma'_1(t) + q(s) \gamma'_2(t)$ bestimmt dieses System einen ausgezeichneten Streifen, den sogenannten **charakteristischen Streifen**. (Dieser Streifen sollte transversal zum Anfangsstreifen liegen, damit unsere Lösungstheorie klappen kann).

Bemerkung 11.21

Im quasilinearen Fall $0 = F(x, y, z, p, q) = a_1(x, y, z) p + a_2(x, y, z) q = a_3(x, y, z)$ erhalten wir aus der obigen Beziehung gerade

$$\begin{aligned} \gamma'_1 &= a_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \\ \gamma'_2 &= a_2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \\ \gamma'_3 &= p(s) a_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) + q a_2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = a_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) + q a_2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \\ p'(s) &= -F_x(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)) - p(s) F_z(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)), \\ q'(s) &= -F_y(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)) - q(s) F_z(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)), \end{aligned} \quad (11.117)$$

das heißt die üblichen charakteristischen Gleichungen für γ und 2 entkoppelte Gleichungen für p und q . Hier spielen also p, q nur eine passive Rolle.

Korollar 11.22

Wenn das 5-Tupel $s \mapsto (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s))$ ein charakteristischer Streifen ist, dann gilt $\frac{d}{ds} F(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), p(s), q(s)) = 0$, also ist F konstant entlang des charakteristischen Streifens (aber es gilt nicht unbedingt $F = 0$.)

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F &= F_x \gamma'_1 + F_y \gamma'_2 + F_z \gamma'_3 + F_p p' + F_q q' \\ &= F_x F_p + F_y F_q + F_z (p F_p + q F_q) + F_p (-F_x - p F_u) + F_q (-F_y - q F_u) = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Theorem 11.23

Die nichtlineare PDE 1. Ordnung in zwei unabhängigen Variablen

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = 0 \quad (11.118)$$

sei gegeben. Die Anfangskurve $t \mapsto \vartheta(t) \in \mathbb{R}^3$ sei gegeben sowie die Funktionen $t \mapsto (p_0(t), q_0(t))$. Die glatte Grundanfangskurve $t \mapsto (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ sei **nicht-charakteristisch**, d.h.

$$\det \begin{pmatrix} \vartheta'_1(t) & F_p(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t), p_0(t), q_0(t)) \\ \vartheta'_2(t) & F_q(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t), p_0(t), q_0(t)) \end{pmatrix} \neq 0 \quad t \in I \subset \mathbb{R} \quad (11.119)$$

und die Funktionen $t \mapsto (p_0(t), q_0(t))$ so bestimmt, daß

$$\begin{aligned} 0 &= F(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t), p_0(t), q_0(t)) \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \\ \vartheta'_3(t) &= p_0(t)\vartheta'_1(t) + q_0(t)\vartheta'_2(t) \quad \text{Anfangs-Streifenbedingung}. \end{aligned} \quad (11.120)$$

Dann existiert eine Umgebung der Anfangskurve $t \mapsto \vartheta(t) \in \mathbb{R}^3$ und in dieser Umgebung **genau eine** Lösung $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ zu $F = 0$ mit

$$\begin{aligned} u(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)) &= \vartheta_3(t), \\ u_x(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)) &= p_0(t), \\ u_y(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)) &= q_0(t) \quad \text{Anfangsbedingung}. \end{aligned} \quad (11.121)$$

Beweis. Eine direkte Konstruktion, ähnlich dem quasilinearen Sonderfall. ■

Bemerkung 11.24

Das heißt nicht, daß $F = 0$ eine eindeutige Lösung besitzt, denn zu der eindeutig gegebenen Anfangskurve ϑ könnte es verschiedene Anfangs-Integralstreifen geben, d.h. verschiedene Ergänzungen p_0, q_0 so daß

$$\begin{aligned} 0 &= F(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t), p_0(t), q_0(t)) \quad t \in I \subset \mathbb{R} \\ \vartheta'_3(t) &= p_0(t)\vartheta'_1(t) + q_0(t)\vartheta'_2(t) \end{aligned} \quad (11.122)$$

gilt. Dieses System stellt bei gegebenem ϑ zwei Bedingungen an p_0, q_0 , welche daraus aber eventuell nicht eindeutig bestimmt sind. Sobald aber der Anfangs-Integralstreifen eindeutig festgelegt ist, gibt es nur eine Lösung.

Das Problem, durch eine vorgegebene Kurve $t \mapsto \vartheta(t) \in \mathbb{R}^3$ eine Lösung zu $F = 0$ zu bestimmen, kann nun wie folgt gelöst werden:

1. Die vorgegebene Kurve wird zu einem Integral-Streifen von $F = 0$ ergänzt, indem man die dazu noch erforderlichen Funktionen $p_0(t)$ und $q_0(t)$ aus der Integralstreifenbedingung berechnet. Eventuell gibt es dazu mehrere Lösungen, man muß sich für eine Lösung entscheiden. Man hat also das 5-Tupel $(\vartheta(t), p_0(t), q_0(t))$ vorliegen.
2. Man löst das charakteristische System (11.20) für das 5-Tupel $(\gamma(s), p(s), q(s))$ unter der Anfangsbedingung $(\gamma(0), p(0), q(0)) = (\vartheta(t), p_0(t), q_0(t))$. Weil $F = 0$ für $(\vartheta(t), p_0(t), q_0(t))$ folgt entlang $(\gamma(s), p(s), q(s))$, daß $F = 0$ erfüllt ist, als Konsequenz aus Korollar 11.22. Somit hat man eine einparametrische Schar von Charakteristiken erhalten, die eine zweiparametrische Mannigfaltigkeit darstellen. Wir definieren

$$\gamma(s; \theta(t)) = \begin{pmatrix} X(s, t) \\ Y(s, t) \\ U(s, t) \end{pmatrix} \quad (11.123)$$

und lösen lokal nach s und t auf: $s = s(X, Y)$, $t = t(X, Y)$.

3. Die Lösung ergibt sich, wie im quasilinearen Fall, aus

$$\Phi(x, y) = U(s(x, y), t(x, y)) \quad (11.124)$$

Wir bemerken noch, daß die Funktionen $p(s), q(s)$ nur indirekt die Lösung beinflussen, indem sie die Komponenten γ beeinflussen.

Beispiel: "Burgers-Gleichung". Zu lösen

$$u(x, y) u_x(x, y) + u_y(x, y) = 1, \quad u(t, t) = \frac{1}{2} t, \quad t \in [0, 1]. \quad (11.125)$$

In der gewohnten Schreibweise:

$$\left\langle \begin{pmatrix} u \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad a(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} \eta_3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11.126)$$

Die Anfangskurve ist

$$\vartheta(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ \frac{1}{2}t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]. \quad (11.127)$$

Wir überprüfen zuerst, ob die Anfangsvorgabe nicht-charakteristisch ist:

$$\det \begin{pmatrix} \vartheta'_1(t) & a_1(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t)) \\ \vartheta'_2(t) & a_2(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t)) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & \vartheta_3(t) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}t \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - \frac{1}{2}t \neq 0 \quad t \in [0, 1] \quad (11.128)$$

Das charakteristische System lautet

$$\begin{pmatrix} \gamma'_1(s) \\ \gamma'_2(s) \\ \gamma'_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_3(s) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (11.129)$$

mit der Lösung

$$\begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \\ \gamma_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s^2 + C_2 s + C_3 \\ s + C_1 \\ s + C_2 \end{pmatrix}. \quad (11.130)$$

Eine spezielle Lösung, die durch die Anfangskurve geht, d.h. $\gamma(0) = \vartheta(t)$ bestimmt die Konstanten C_i :

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} C_3 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \vartheta(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ \frac{1}{2}t \end{pmatrix}. \quad (11.131)$$

Damit definiert man die einparametrische Schar von Charakteristiken

$$\gamma(s; \vartheta(t)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}s t + t \\ s + t \\ 1 + \frac{1}{2}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(s, t) \\ Y(s, t) \\ U(s, t) \end{pmatrix}. \quad (11.132)$$

Die Relation

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}s t + t \\ s + t \end{pmatrix} \quad (11.133)$$

auflösen nach (s, t) liefert:

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X-Y}{\frac{Y}{2}-1} \\ \frac{X-\frac{Y^2}{2}}{1-\frac{Y}{2}} \end{pmatrix}. \quad (11.134)$$

Die Auflösung von s, t in die Darstellung für $U(s, t)$ einsetzen, liefert die Lösung

$$\Phi(x, y) = U(s(x, y), t(x, y)) = s(x, y) + \frac{1}{2}t(x, y) = \frac{2(x-y) - (x - \frac{y^2}{2})}{y-2}. \quad (11.135)$$

Die Lösung wird für $y \rightarrow 2$ singulär. Das entspricht dem Wert $\vartheta_2(t) = 2$, $t = 2$. Für $t = 2$ ist die nicht-charakteristiken Bedingungen verletzt.