Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Günter Törner
Dipl.-Math. Miriam Dieter

SS 2010

Übungen zu Algebra und Diskrete Mathematik I

Blatt 4

Aufgabe 13

Laut Vorlesung gibt es für zwei ganze Zahlen $a, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ eine eindeutige Darstellung $a = q \cdot n + r$. Den Rest der Division r bezeichnet man auch mit $r = a \bmod n$ (sprich: a modulo n). Beweisen Sie folgende Aussage:

Das System

$$\begin{aligned} x &= a_1 \bmod n_1 \\ x &= a_2 \bmod n_2 \end{aligned}$$

mit n_1, n_2 teilerfremd, besitzt eine eindeutige Lösung mod $(n_1 \cdot n_2)$.

Hinweis: Es gilt: $a = 0 \bmod n \Leftrightarrow n \mid a$.

Aufgabe 14

a) Gegeben sei die Rekursion $p_0 = 3$, $p_1 = 7$ und $p_n = 3p_{n-1} - 2p_{n-2}$ für $n \geq 2$. Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $p_n = 2^{n+2} - 1$

b) Eine Rekursion sei gegeben durch $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ für $n \geq 3$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \leq 3^n$

Aufgabe 15

a) Die Fibonacci-Zahlen sind wie folgt rekursiv definiert: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{2n} F_i F_{i-1} = F_{2n}^2$$

b) Die Lucas-Zahlen sind für $n \geq 2$ rekursiv definiert durch $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ und $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} L_i = L_{n+2} - 1$$

c) Beweisen Sie den folgenden Zusammenhang zwischen Fibonacci- und Lucas-Zahlen:

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Aufgabe 16

a) Wie viele ganze Zahlen zwischen 0 und 10.000 haben genau eine Ziffer, die gleich 5 ist?

b) Gegeben sei die Multimenge $S = \{a, a, a, b, b, c, c, c, c\}$. Bestimmen Sie die Anzahl der 7-Permutationen und der 8-Permutationen.

Abgabe: Bis Montag, den 10. Mai 2010, 9:00 im Postkasten LE 4.Etage.