Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Törner

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 10

Aufgabe 37 (6 Punkte)

(i) Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $\varphi(1,1) := (1,0,-2)$ und $\varphi(1,2) := (0,1,-1)$. Bestimmen Sie $\varphi(x_1, x_2)$ und $\varphi(5,7)$.

(ii) Es sei $\{a_1, a_2\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ und $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Gibt es lineare Abbildungen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bzw. $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften?

(1) $F(a_1 + a_2) = a_1,\ F(a_1 - a_2) = a_1,\ F(5a_1 + a_2) = a_1$

(2) $G(a_1 + a_2) = b_1 + b_3,\ G(3a_1 + a_2) = b_2 - b_3,\ G(3a_1 - a_2) = -3b_1 + 2b_2 - 5b_3$

Berechnen Sie - falls möglich - jeweils $F(a_i)$ und $G(a_i)$ $(i = 1, 2)$. Begründen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 38 (6 Punkte)

Es seien $\varphi, \psi : V \to W$ zwei lineare Abbildungen zwischen den endlich dimensionalen Vektorräumen V und W und es gelte $\operatorname{Kern} \varphi = \operatorname{Kern} \psi$ und $\operatorname{Bild} \varphi = \operatorname{Bild} \psi$. Folgt daraus $\varphi = \psi$?

Aufgabe 39 (6 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum über K und $P(V)$ die Menge der linearen Abbildungen $f : V \to V$ mit $f \circ f = f$. Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(i) Für jedes $f \in P(V)$ gilt: $V = \operatorname{Bild}(f) + \operatorname{Kern}(f)$.

(ii) Ist $f_1, f_2 \in P(V)$ mit $f_1 + f_2 = \mathrm{id}_V$, so gilt: $V = \operatorname{Bild}(f_1) + \operatorname{Bild}(f_2)$.

Aufgabe 40 (6 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum, $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung und $\varphi^i := \varphi \circ \ldots \circ \varphi$ (i Faktoren), $\varphi^0 := id_V$. Zeigen Sie:

(i) $\operatorname{Kern}(\varphi^j) \subset \operatorname{Kern}(\varphi^{j+1})$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$

(ii) $\operatorname{Kern}(\varphi^k) = \operatorname{Kern}(\varphi^{k+1}) \ \Rightarrow \ \operatorname{Kern}(\varphi^j) = \operatorname{Kern}(\varphi^{j+1})$ für alle $j \geq k$.

Abgabe: Bis Donnerstag, 8.01.2009, 10 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage

Wir wünschen allen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Start ins neue Jahr!