Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Törner

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 6

Aufgabe 21 (6 Punkte)

Bestimmen Sie mit dem in der Vorlesung angegebenen Verfahren die inverse Matrix von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 22 (6 Punkte)

(i) Gegeben sind 6 Matrizen $A, B, C, D, F, G \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$. Gesucht sind Matrizen $X, Y \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, die das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\begin{array}{ccccc} A \cdot X & + & B \cdot Y & = & F \\ C \cdot X & + & D \cdot Y & = & G \end{array}$$

Es seien D und $A - BD^{-1}C$ regulär. Zeigen Sie, dass dann X und Y eindeutig bestimmt sind, und entwickeln Sie Formeln für die Lösungen von X und Y.

(ii) Berechnen Sie mit den Formeln aus (i) (falls anwendbar!) Lösungen $X, Y \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 16 & 9 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \cdot Y = \begin{bmatrix} -22 & -32 \\ 97 & 132 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot Y = \begin{bmatrix} 55 & 68 \\ 31 & 38 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 23 (6 Punkte)

(i) Bestimmen Sie alle Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, die die Bedingungen $a \cdot b \cdot c \cdot d \neq 0$ und $AA = 0$ erfüllen.

(ii) Beweisen Sie: $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Aufgabe 24 (6 Punkte)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei $x \oplus y := x + y - xy$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 27.11.2008, 10 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage