Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Törner
Dipl.-Math. M. Dieter
Dipl.-Math. V. Gondek

WS 2010/2011

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 4

Aufgabe 13 (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Matrizen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, die die Bedingungen $a \cdot b \cdot c \cdot d \neq 0$ und $AA = 0$ erfüllen.

b) Berechnen Sie alle Potenzen der Matrix $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 14 (6 Punkte)

Zeigen Sie: Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ ist die Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix. Diese Summanden sind eindeutig bestimmt.

Führen Sie die Zerlegung am Beispiel $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ durch.

Aufgabe 15 (6 Punkte)

Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ sei wie folgt eine Abbildung definiert:

$$\mathrm{sp}:\ \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_0^+,\ A \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Zeigen Sie:

a) sp ist surjektiv.

b) $\mathrm{sp}(AB) = \mathrm{sp}(BA)$ für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

c) Ist $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ regulär, so gilt für alle $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$: $\quad \mathrm{sp}(B^{-1}AB) = \mathrm{sp}(A)$.

Aufgabe 16 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Form aller $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, die bei der Matrizenmultiplikation mit jedem $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ vertauschbar sind, die also:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

für alle $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ erfüllen.

Hinweis: Untersuchen Sie zuerst mit möglichst 'einfachen' Matrizen A, welche Form B notwendig haben muss.

Abgabe: Bis Donnerstag, 11.11.2010, 10:15 Uhr, Briefkästen LE 4. Etage