Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Törner
Dipl.-Math. M. Dieter
Dipl.-Math. V. Gondek

WS 2010/2011

# Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 5

**Aufgabe 17** (6 Punkte)

Es sei $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t$ alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & t^2+3 & 2 \\ 4 & 2t^2-4 & 2t+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -12 \\ -1 \end{bmatrix}$$

**Aufgabe 18** (6 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $I_n$ die $(n \times n)$-Einheitsmatrix und $B = [\beta_{ij}] \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ die Matrix mit $\beta_{ij} = 1$ für $1 \leq i, j \leq n$. Mit $\alpha \in \mathbb{R}$ bilden wir die Matrix

$$A := I_n + \alpha B$$

Zeigen Sie: Wenn $1 + n\alpha \neq 0$, so ist $A$ regulär. Bestimmen Sie in diesem Fall die inverse Matrix $A^{-1}$.

**Aufgabe 19** (6 Punkte)

Wir definieren die Potenzen von $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ rekursiv durch

$$A^0 := I_n;\ A^{k+1} := A^k \cdot A \text{ für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Eine Matrix $A = [\alpha_{ij}] \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ heißt strikte obere Dreiecksmatrix, wenn $\alpha_{ij} = 0$ für $i \geq j$ gilt.

(a) Beweisen Sie: Ist $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine strikte obere Dreiecksmatrix, so ist $A^n = 0$.

(b) Für strikte obere Dreiecksmatrizen $X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ sei

$$\exp(X) := \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{k!} X^k.$$

Beweisen oder widerlegen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle strikten oberen Dreiecksmatrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ gilt:

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B).$$

**Aufgabe 20** (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 9 & 5 \\ 6 & 9 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 4 & 9 \\ 10 & 6 & 11 & 4 \end{bmatrix}.$$

(b) Für welche $a \in \mathbb{C}$ ist folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ invertierbar:

$$A := \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}?$$

**Abgabe:** Bis Donnerstag, 18.11.2010, 10:15 Uhr, Briefkästen LE 4. Etage