Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Törner
Dipl.-Math. M. Dieter
Dipl.-Math. V. Gondek

WS 2010/2011

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 6

Aufgabe 21 (6 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$.

(a) Ist $B := \{x_1, x_2, x_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(b) Lassen sich v und w als Linearkombination aus x_1, x_2, x_3 darstellen? Ist die Darstellung gegebenenfalls eindeutig?

(c) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$, die x_1 und x_2 enthält.

Aufgabe 22 (6 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum und es seien $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängige Vektoren in V. Ferner sei

$$(*)\ y = k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n \text{ mit } k_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Man beweise:

$$x_1 - y, \ldots, x_n - y \text{ linear abhängig} \quad \Longleftrightarrow \quad k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 1$$

Aufgabe 23 (6 Punkte)

Es seien U, V, W Unterräume eines Vektorraumes. Gilt dann stets: $U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W)$?
(Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 24 (6 Punkte)

Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit genau 4 Elementen. (Sie dürfen davon ausgehen, dass eine solche existiert!) Das neutrale Element von G bezeichnen wir mit e. Beweisen Sie: Falls es ein $a \in G$ gibt mit $a \cdot a \neq e$, so gilt:

$$G := \{e, a, a \cdot a, a \cdot a \cdot a\}.$$

Abgabe: Bis Donnerstag, 25.11.2010, 10:15 Uhr, Briefkästen LE 4. Etage