

## Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 7

### Aufgabe 25 (6 Punkte)

Eine reelle  $(3 \times 3)$ -Matrix heißt magisches Quadrat, wenn die Summe aller Elemente in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen immer die gleiche Zahl liefert. Die Menge  $MQ_3$  aller dieser magischen Quadrate ist (mit den üblichen Verknüpfungen) ein Untervektorraum der reellen  $(3 \times 3)$ -Matrizen (Das braucht nicht gezeigt zu werden!).

- (a) Beweisen Sie: Haben zwei magische Quadrate die gleiche erste Zeile, so sind sie gleich.
- (b) Untersuchen Sie folgende magische Quadrate auf lineare Unabhängigkeit:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (c) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von  $MQ_3$ .

### Aufgabe 26 (6 Punkte)

Es seien  $x_1, \dots, x_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) linear unabhängige Elemente eines Vektorraumes  $V$ . Das Element  $a \in V$  habe folgende Eigenschaft: Für jedes  $j \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , sind  $x_1, \dots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \dots, x_n$  linear abhängig. Beweisen Sie, dass  $a = 0$  ist.

### Aufgabe 27 (6 Punkte)

Welche der folgenden Teilmengen des Vektorraumes der reellen  $(n \times n)$ -Matrizen sind Unterräume:

- (a) die Menge der symmetrischen Matrizen ( $A = A^T$ )
- (b) die Menge der invertierbaren Matrizen
- (c) die Menge der oberen Dreiecksmatrizen?

### Aufgabe 28 (6 Punkte)

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$ .

- (a) Sei  $U \subset V$  ein echter Untervektorraum (d.h.  $U \neq V$ ),  $w \in U$ ,  $u, v \in V \setminus U$ . Zeigen Sie:
  - (1) Es gibt höchstens ein  $r \in \mathbb{K}$  mit  $u + r \cdot v \in U$
  - (2) Für alle  $s \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  ist  $w + s \cdot u \notin U$
- (b) Seien  $U, W$  Untervektorräume von  $V$ . Zeigen Sie:  $U \cup W$  ist genau dann ein Teilraum von  $V$ , wenn  $U \subset W$  oder  $W \subset U$  gilt.