Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Törner
Dipl.-Math. M. Dieter
Dipl.-Math. V. Gondek

WS 2010/2011

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 8

Aufgabe 29 (6 Punkte)

Es sei W ein endlich dimensionaler Vektorraum und U ein Untervektorraum von W mit $U \neq W$. Beweisen Sie:

(a) Es gibt eine Basis von W aus Vektoren, die alle nicht zu U gehören.

(b) Es gibt einen Untervektorraum V von W mit $U \cap V = \{0\}$ und $\langle U \cup V \rangle = W$.

Aufgabe 30 (6 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, sowie $A, B \subset V$ beliebige Teilmengen. $\overline{A}$ bezeichne den von A aufgespannten Untervektorraum. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(b) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A} \cup B}$

(c) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$

Aufgabe 31 (6 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear? (Begründen Sie Ihre Antworten!)

(a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ f_1(x, y) = (x + y, y^2)$

(b) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ f_2(x, y, z) = (y, 2z, y - x)$

(c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ f_3(x, y) = (3x - y, x + y, x + 1)$

(d) $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ f_4(x, y) = |x - y|$

Bestimmen Sie für alle lineare Abbildungen f_i Basen von $\text{Kern}(f_i)$, $\text{Bild}(f_i)$ sowie die Dimensionen dieser Unterräume.

Aufgabe 32 (6 Punkte)

(a) Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $\varphi(1, 1) := (1, 0, -2)$ und $\varphi(1, 2) := (0, 1, -1)$. Bestimmen Sie $\varphi(x_1, x_2)$ und $\varphi(5, 7)$.

(b) Es sei $\{a_1, a_2\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ und $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Gibt es lineare Abbildungen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bzw. $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften?

   (1) $F(a_1 + a_2) = a_1,\ F(a_1 - a_2) = a_1,\ F(5a_1 + a_2) = a_1$

   (2) $G(a_1 + a_2) = b_1 + b_3,\ G(3a_1 + a_2) = b_2 - b_3,\ G(3a_1 - a_2) = -3b_1 + 2b_2 - 5b_3$

   Berechnen Sie - falls möglich - jeweils $F(a_i)$ und $G(a_i)$ $(i = 1, 2)$. Begründen Sie Ihre Aussagen.

Abgabe: Bis Donnerstag, 09.12.2010, 10:15 Uhr, Briefkästen LE 4. Etage