

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 9

Aufgabe 33 (6 Punkte)

Bestimmen Sie den Rang der Matrix $A \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & a-1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ a & -3 & 3a & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 34 (6 Punkte)

Es sei K ein Körper und $\varphi : K^n \rightarrow K$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass es Skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ derart gibt, dass für alle $x \in K^n$ gilt:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

Aufgabe 35 (6 Punkte)

Es seien $\varphi, \psi : V \rightarrow W$ zwei lineare Abbildungen zwischen den endlich dimensionalen Vektorräumen V und W und es gelte $\text{Kern } \varphi = \text{Kern } \psi$ und $\text{Bild } \varphi = \text{Bild } \psi$. Folgt daraus $\varphi = \psi$?

Aufgabe 36 (6 Punkte)

Es sei V der Vektorraum der $(n \times n)$ -Matrizen über \mathbb{R} .

- Zeigen Sie, dass $\varphi : V \rightarrow V$ mit $\varphi(A) = A + A^T$ eine lineare Abbildung ist.
- Bestimmen Sie $\text{Kern}(\varphi)$ und $\text{Bild}(\varphi)$.