Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Günter Törner
Dipl.-Math. Miriam Dieter

SS 2009

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 4

Aufgabe 13 (6 Punkte)

Es sei durch $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform definiert (dies muss nicht gezeigt werden!)

$$f((x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T) = 3x_1y_1 - 2x_1y_3 + x_2y_2 - 3x_3y_2 + 2x_3y_3$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der Bilinearform f bezüglich der kanonischen Basis und bezüglich der Basis $B = \{(1, 2, 1)^T, (3, 1, 0)^T, (2, 0, 0)^T\}$.

Aufgabe 14 (6 Punkte)

Der $\mathbb{R}^n$ sei versehen mit dem kanonischen Skalarprodukt. Ferner sei $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq i, j \leq n$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Es gibt $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ mit $\alpha_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$ $(1 \leq i, j \leq n)$

(ii) $A = [\alpha_{ij}] \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ ist symmetrisch und positiv semidefinit, d.h. es gilt $x^T Ax \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 15 (6 Punkte)

Es sei $I = [0, 1]$ und $C(I) := \{f \in Abb(I, \mathbb{R}) | f \text{ stetig auf } I\}$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) \to \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Π sei der Teilraum von $C(I)$, der aus allen Einschränkungen von Polynomen auf I besteht. Beweisen Sie:

a) Sind $f, g, \in C(I)$ und gilt $|f(t)| \leq b$ für alle $t \in I$, so folgt:

$$\langle f, g \rangle \geq \langle f, f \rangle - b \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$$

b) Zu jedem $f \in C(I)$ mit $f \neq 0$ existiert ein Polynom $p \in \Pi$ mit $\langle f, p \rangle > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis: Zu jedem $f \in C(I)$ und jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $p \in \Pi$ mit $|f(t) - p(t)| < \epsilon$ für alle $t \in I$.

c) $\Pi^\perp = \{0\}$.

Aufgabe 16 (6 Punkte)

Gibt es Matrizen A, B, C, D mit den folgenden Eigenschaften?

a) $A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ist normal, nicht diagonalisierbar über $\mathbb{R}$, nicht orthogonal.

b) $B \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ist diagonalisierbar über $\mathbb{R}$, normal, nicht symmetrisch.

c) $C \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ist diagonalisierbar über $\mathbb{R}$, nicht normal, nicht symmetrisch.

d) $D \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$ ist normal, nicht hermite'sch, nicht unitär.

Geben Sie jeweils ein Beispiel an (mit Nachweis der Eigenschaften), oder zeigen Sie, dass eine solche Matrix nicht existieren kann.

Hinweis: Eine Matrix $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ heißt normal, wenn: $A \cdot A^T = A^T \cdot A$.

Abgabe: Bis Freitag, 22.05.2009, 8:30 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage