

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 10

Aufgabe 37 (6 Punkte)

Bestimmen Sie $x, y, z \in \mathbb{Z}$, so dass die Matrix A positiv oder negativ definit ist.

$$A = \begin{bmatrix} y^2 & y & x & z \\ -1 & 2x^2 + 1 & 1 & 2 \\ x^2 & 1 & 4 & z + 2 \\ 2 - z^2 & 2 & z^3 + 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 38 (6 Punkte)

Bestimmen Sie, welchen Kegelschnitt die Gleichung

$$-x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 = 8$$

im \mathbb{R}^2 bestimmt.

Aufgabe 39 (6 Punkte)

Zu einer Quadrik Q im \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, gehöre die symmetrische Matrix $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

- Zeigen Sie: Wenn Q eine Gerade enthält, kann A weder positiv noch negativ definit sein.
- Geben Sie ein Beispiel für eine Quadrik im \mathbb{R}^3 an, die keine Gerade enthält und bei der A weder positiv noch negativ definit ist.

Hinweis: "Quadrik" ist eine Bezeichnung für die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung der Form $x^T Ax + 2b^T x + c = 0$ für eine symmetrische Matrix $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 40 (6 Punkte)

Vorgegeben sei der Raum \mathbb{R}^2 mit der Euklidischen Abstandsnorm. Eine Ellipse ist die Menge aller Punkt $P = (x, y)$, für die die Summe der Abstände von zwei gegebenen festen Punkten $F = (c, 0)$ und $F' = (-c, 0)$ konstant ($= 2a$, mit $a \neq 0$) ist. Leiten Sie anhand dieser Information die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der Ellipse her.