Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. G. Törner
Dipl.-Math. M. Dieter
Dipl.-Math. Ch. Henkel

SS 2011

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 1

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ sei die Vorschrift $\varphi(x, y) := 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 7x_2y_2$ gegeben.

a) Prüfen Sie, ob dadurch ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert ist.

b) Berechnen Sie $||(-2, 2)||$ in $(\mathbb{R}^2, \varphi)$ sowie den Winkel zwischen den Standardbasisvektoren.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

(a) Sei $I = [-1, 1]$ und $C(I) := \{f \in Abb(I, \mathbb{R}) \mid f \text{ stetig auf } I\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$C(I) \times C(I) \to \mathbb{R},\ (f, g) \to \langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

auf $C(I)$ ein Skalarprodukt definiert.

(b) Sei V der Vektorraum der symmetrischen Matrizen $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Abbildung:

$$V \times V \to \mathbb{R},\ (A, B) \to \langle A, B\rangle = sp(A \cdot B)$$

ein Skalarprodukt auf V definiert.

Hinweis (zu Teil b): Symmetrische Matrizen $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ sind immer diagonalisierbar.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zeigen Sie: Eine symmetrische Matrix $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ist genau dann positiv definit, wenn gilt $a_{11} > 0$ und $\det A > 0$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Es sei V ein euklid'scher Vektorraum. Zeigen Sie für $x, y \in V$ die folgenden Beziehungen:

a) $||x|| = ||y|| \ \Leftrightarrow\ \langle x + y, x - y\rangle = 0$

b) $||x - y|| = ||x + y|| \ \Leftrightarrow\ \langle x, y\rangle = 0$

c) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Abgabe: Bis Donnerstag, 14.04.2011, 10:15 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage