Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. G. Törner
Dipl.-Math. M. Dieter
Dipl.-Math. Ch. Henkel

SS 2011

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 6

Aufgabe 21 (6 Punkte)

Ist $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$, so wird der Rayleigh-Koeffizient $R_A(x)$ für $x \in \mathbb{C}^n$ gemäß Aufgabe 17 definiert. Außerdem sei $w(A) := \{R_A(x) | x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\}$. Beweisen Sie:

a) $w(I_n) = \{1\}$.

b) Aus $w(A) = 1$ folgt $A = I_n$.

c) $w(S^H AS) = w(A)$ für alle $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ und alle unitären Matrizen S.

Aufgabe 22 (6 Punkte)

Es seien $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

a) $Q = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ ist eine orthogonale Matrix, wenn $A + iB$ unitär ist.

b) $Q = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ ist eine symmetrische Matrix, wenn $A + iB$ hermite'sch ist.

Aufgabe 23 (6 Punkte)

Eine Matrix $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ heißt schief-hermite'sch, wenn $A = -A^H$ gilt.

a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Wenn $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ schief-hermite'sch ist, dann gilt $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ oder $A \in Mat_{n\times n}(i\mathbb{R})$. Dabei bezeichnet $i\mathbb{R}$ die Menge der komplexen Zahlen ib mit $b \in \mathbb{R}$.

b) Beweisen Sie: Wenn A schief-hermite'sch ist, dann liegen alle Eigenwerte von A in $i\mathbb{R}$.

   Hinweis: Beweisen Sie zunächst, dass $\langle B^H x, y\rangle = \langle x, By\rangle$ für alle $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ und alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt.

c) Gilt die Umkehrung von b)?

Aufgabe 24 (6 Punkte)

a) Es sei $A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Bestimmen Sie alle möglichen Jordanformen von A.

b) Es sei $p_A(\lambda) = (\lambda + 1)^3(\lambda - 4)^2$ das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in Mat_{5\times 5}(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie alle möglichen Jordanformen der Matrix A.

Abgabe: Bis Donnerstag, 26.05.2011, 10:15 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage