Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. G. Törner
Dipl.-Math. M. Dieter
Dipl.-Math. Ch. Henkel

SS 2011

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 8

Aufgabe 29 (6 Punkte)

Sei J die Jordansche Normalform einer Matrix $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$. A habe genau einen Eigenwert λ. Beweisen Sie die folgende Aussage:
Ist r die kleinste Zahl mit $(A-\lambda E)^r = 0$, so hat das größte Jordan-Kästchen in J genau r Zeilen und Spalten.

Aufgabe 30 (6 Punkte)

Es sei $A \in Mat_{n\times n}(K)$.
Zeigen Sie: Zerfällt das charakteristische Polynom von A über K in Linearfaktoren, so ist A ähnlich zu A^T.

Aufgabe 31 (6 Punkte)

Geben Sie die Elemente φ der zur Basis $B = \{(3,1)^T, (2,1)^T\}$ des $\mathbb{R}^2$ dualen Basis B^* in der Form

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$$

an.

Aufgabe 32 (6 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum und V^* der Dualraum von V. Zeigen Sie:

a) Hat V die Dimension $n \in \mathbb{N}$ und ist $\{v_1,\dots,v_n\}$ eine Basis von V, so gibt es eindeutig bestimmte $\varphi_i \in V^*$ mit

$$\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \le i,j \le n.$$

Die Familie $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ ist eine Basis von V^*.

b) Ist $v \in V$ und gilt $\varphi(v) = 0$ für alle $\varphi \in V^*$, so ist $v = 0$.

Abgabe: Bis Donnerstag, 16.06.2011, 10:15 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage