Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. G. Törner
Dipl.-Math. M. Dieter
Dipl.-Math. Ch. Henkel

SS 2011

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 9

Aufgabe 33 (6 Punkte)

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Jordansche Normalform von

$$A_a = \begin{bmatrix} 2-a & a-1 & 2a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-a & a-1 & 2a \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 34 (6 Punkte)

Es sei $B = \{(0,3,-2)^T, (1,-1,3)^T, (0,1,-1)^T\}$ Basis des $\mathbb{R}^3$. Geben Sie die Elemente φ der zu B dualen Basis B^* in der folgenden Form an:

$$\varphi \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_i x_i.$$

Aufgabe 35 (6 Punkte)

a) Es sei V der Vektorraum der rellen Polynome vom Grad ≤ 1 (über $\mathbb{R}$) und sei $\varphi_i \in V^*$ definiert durch

$$\varphi_i(f) = \int_0^i f(t)dt \quad (i = 1, 2).$$

Bestimmen Sie eine Basis B von V, so dass $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ die zu B duale Basis ist.

b) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit der Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Ferner sei $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ die zu B duale Basis. Zeigen Sie, dass für alle $x \in V$ und alle $\varphi \in V^*$ gilt:

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(x)b_1 + \ldots + \varphi_n(x)b_n \quad \text{und} \\ \varphi &= \varphi(b_1)\varphi_1 + \ldots + \varphi(b_n)\varphi_n. \end{aligned}$$

Aufgabe 36 (6 Punkte)

Sei V ein Vektorraum unendlicher Dimension über einem Körper K und sei B eine Basis von V. In Analogie zu Aufgabe 32 a) definieren wir eine Teilmenge B^* von V^*. Sei $B^* = \{\varphi_x | x \in B\}$, wobei für $x \in B$ die Linearform φ_x eindeutig definiert ist durch die Bilder der Basisvektoren aus B, und zwar durch $\varphi_x(y) = 0$ für $y \neq x$ und $\varphi_x(x) = 1$. Zeigen Sie:

a) B^* ist linear unabhängig.

b) B^* ist <u>keine</u> Basis von V^*.

Abgabe: Bis Donnerstag, 30.06.2011, 10:15 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage