Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Törner
Dipl.-Math. M. Dieter
Dipl.-Math. V. Gondek

WS 2010/2011

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 10

Aufgabe 37 (6 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit der Dimension $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) n ist eine gerade Zahl

(b) Es gibt eine lineare Abbildung $f : V \to V$ mit Kern(f)=Bild(f).

Aufgabe 38 (6 Punkte)

Es sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung mit $f \circ f = 0$. Ferner sei $\dim V = 2 \cdot \text{Rang } (f)$.
Zeigen Sie: Bild (f) = Kern (f).

Aufgabe 39 (6 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $P(V)$ die Menge der linearen Abbildungen $f : V \to V$ mit $f \circ f = f$. Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(a) Für jedes $f \in P(V)$ gilt: V=Bilf(f)+Kern(f).

(b) Für $f_1, f_2 \in P(V)$ mit $f_1 + f_2 = id_V$, so gilt: V=Bild(f_1)+Bild(f_2).

Aufgabe 40 (6 Punkte)

Es sei $\mathbb{P}_n$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$. Gegeben sei folgende lineare Abbildung:

$$T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_4,\ T(p(x)) := (2 - x)p(x)$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix dieser Abbildung

(a) bezüglich der Standardbasen $A_3 = \{1, x, x^2, x^3\}$ und $A_4 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ sowie

(b) bezüglich der Basen A_3 und $B_4 = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3, 1 + x + x^2 + x^3 + x^4\}$.

Abgabe: Bis Donnerstag, 13.01.2010, 10:15 Uhr, Briefkästen LE 4. Etage

Wir wünschen Ihnen allen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Übergang ins neue Jahr!