Universität Duisburg–Essen **WS 08/09**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Törner

Probeklausur zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

Aufgabe 1: (5+5 Punkte)

Betrachten Sie den Körper $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$ mit den folgenden Operationen:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$
$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - b_2 \overline{a_2}, b_1 a_2 + \overline{a_1} b_2)$$

(i) Bestimmen Sie den Körper: $Z(\mathbb{H}) = \{a \in \mathbb{H} | \forall b \in \mathbb{H} \text{ gilt: } a \cdot b = b \cdot a\}$

(ii) Zeigen Sie: Es gibt eine injektive lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$

Aufgabe 2: (5+5 Punkte)

Gegeben sei das folgenden lineare Gleichungssystem mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & (a-1)x_2 & & & & & & ax_5 & = & 1 \\ ax_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & + & x_4 & + & 2ax_5 & = & 1 \\ ax_1 & + & x_2 & + & ax_3 & + & x_4 & + & (a+1)x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & + & ax_4 & + & (a+1)x_5 & = & 1 \end{array}$$

(i) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a, ob das System lösbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Dimension des Lösungsraumes.

(ii) Bestimmen Sie alle Lösungen für $a = 2$.

Aufgabe 3: (2+8 Punkte)

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Gegeben sei für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ die folgende Matrix aus $\mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$:

$$A_n = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & \dots & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

(i) Berechnen Sie $\det A_2$ und $\det A_3$.

(ii) Entwickeln Sie eine Formel für $\det A_n$ ($n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$) und begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 4: (4+3+3 Punkte)

Betrachten Sie im $\mathbb{R}^4$ die drei Vektoren $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (1, -1, 2, -2)$ und $v_3 = (-1, 4, -1, 8)$.

a) Bestimmen Sie die Dimension des von $\{v_1, v_2, v_3\}$ aufgespannten Unterraumes $U = \mathrm{span}(\{v_1, v_2, v_3\})$.

b) Bestimmen Sie eine Basis von U.

c) Ergänzen Sie diese Basis von U zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 5: (5+5 Punkte)

Es seien $a_1, \ldots, a_6$ die 6 verschiedenen Vektoren im $\mathbb{R}^4$ mit jeweils genau zwei Einsen und zwei Nullen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Jede Auswahl von vier verschiedenen Vektoren aus $\{a_1, \ldots, a_6\}$ bildet eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

(ii) Keine Auswahl von vier verschiedenen Vektoren aus $\{a_1, \ldots, a_6\}$ bildet eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 6: (10 Punkte)

Es seien $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ und $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$, die von

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugten Unterräume von $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine Basis von $V \cap W$.

Aufgabe 7: (10 Punkte)

Bestimmen Sie (2×2)-Matrizen A, B, C mit

$$\mathrm{spur}(ABC) \neq \mathrm{spur}(BAC).$$

Aufgabe 8: (10 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine endliche Teilmenge von V, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, mit $i \neq j$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen über n-elementige Teilmengen von V äquivalent sind:

a) $\{a_1, \ldots, a_n\}$ linear unabhängig

b) $\{a_1, \ldots, a_{i-1}, \lambda a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n\}$ linear unabhängig

c) $\{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + a_j, a_{i+1}, \ldots, a_n\}$ linear unabhängig

d) $\{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + \lambda a_j, a_{i+1}, \ldots, a_n\}$ linear unabhängig

Aufgabe 9: (10 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

und $f = f_A \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$.

a) Zeigen Sie $f^2 = f$.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von f.

c) Bestimmen Sie Bild f und Kern f.

d) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 10: (10 Punkte)

Für jede richtig beantwortete Frage erhalten sie einen Punkt, für eine falsche Antwort wird Ihnen ein Punkt abgezogen. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe kann 0 Punkte nicht unterschreiten.

		richtig	falsch
1)	Die Relation $\sim$, definiert durch $x \sim y \Leftrightarrow x \leq y$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.	☐	☐
2)	Es sei A eine $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und x_0 eine Lösung von $Ax = b$ sowie x_1 eine Lösung von $Ax = 0$. Dann ist $x_0 + x_1$ ebenfalls eine Lösung von $Ax = b$.	☐	☐
3)	Ein homogenes lineares Gleichungssystem hat immer unendlich viele Lösungen.	☐	☐
4)	Für zwei Matrizen A, B, für die das Matrizenprodukt AB definiert ist, gilt: $(AB)^T = A^T B^T$.	☐	☐
5)	Es sei U ein Untervektorraum von V. Dann gibt es einen Untervektorraum W von V, so dass $V = U \oplus W$.	☐	☐
6)	Eine quadratische Matrix ist invertierbar, genau dann wenn A als Produkt von Elementarmatrizen geschrieben werden kann.	☐	☐
7)	Für eine lineare Abbildung $T \in Abb(V, W)$ gilt: T ist injektiv, genau dann wenn T surjektiv ist.	☐	☐
8)	$det(A) > 0 \Rightarrow det(A^{-1}) > 0$.	☐	☐
9)	Sei $GL(n; \mathbb{R})$ die Menge der invertierbaren Matrizen. Dann ist die Abbildung $\Pi : GL(n; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto det(A)$ injektiv.	☐	☐
10)	Sei $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dann gilt $det(2A) = 2 \cdot det(A)$.	☐	☐