



**Technische Universität München
Fakultät für Mathematik**

**Schwache Spektralsynthese
auf polynomiellen Hypergruppen**

**Weak spectral synthesis
on polynomial hypergroups**

Master's Thesis von Remo Kretschmann

Aufgabensteller: Prof. Dr. Rupert Lasser
Betreuer: Prof. Dr. Rupert Lasser
Abgabedatum: 12. November 2012



Erklärung

Ich erkläre hiermit, daß ich die Master's Thesis selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe.

Danksagungen

Ich möchte mich an dieser Stelle ganz herzlich bei allen bedanken, die mich bei der Entstehung dieser Arbeit unterstützt haben.

Ich danke Prof. Lasser dafür, dass er mir dieses interessante Thema vorgeschlagen hat, für die persönliche Betreuung, dafür, dass er bei unseren Treffen ausführlich auf meine Fragen eingegangen ist und dafür, dass er meine Masterarbeit immer wieder in die richtige Richtung gelenkt hat.

Dank geht auch an meine Familie, die mich im Lauf meines Studiums finanziell unterstützt hat und mir Rückhalt und Motivation gibt.

Ich danke Matthias und Andreas für das Korrekturlesen und ganz besonders Paktia, die mir eine Konstante ist.

Inhaltsverzeichnis

Motivation für Spektralsynthese	4
1 Orthogonale Polynome und Hypergruppen	6
2 Spektralmengen und schwache Spektralmengen	11
2.1 Definition und Überblick	11
2.2 Wachstumsbedingungen	15
3 Beispiele und deren Spektralsynthese	23
3.1 Jacobi-Polynome	23
3.1.1 Ultrasphärische Polynome	24
3.2 Zugehörige ultrasphärische Polynome	25
3.3 q-ultrasphärische Polynome	25
3.4 Verallgemeinerte Chebyshev-Polynome	26
3.5 Geronimus-Polynome	27
3.6 Grinspun-Polynome	28
3.7 Cartier-Dunau-Polynome	28
Literaturverzeichnis	32

Motivation für Spektralsynthese

Die abstrakte harmonische Analyse hat ihren Ursprung in der klassischen Fourier-Analyse. Deren Anfänge reichen bis ins achtzehnte Jahrhundert zurück. Beispielsweise setzt sich der Ton, den eine schwingende Saite, eine Luftsäule oder ein Stück Metall erzeugt, aus einer Reihe reiner Töne zusammen, den Obertönen oder Harmonischen. In der Akustik und der physikalischen Mathematik beschäftigt man sich mit der Bestimmung dieser Bestandteile (harmonische Analyse), wie auch mit der Rekonstruktion eines musikalischen Tones aus seinen Bestandteilen (harmonische Synthese). Bei vielen physikalischen Problemen, die entweder periodisch sind, oder versteckte Perioden besitzen, kann man ähnlich vorgehen, etwa in der Optik oder der Astrophysik.

Mit dem Spektrum bezeichnet man je nach Anwendungsgebiet verschiedene Dinge. Im einfachsten Fall meint man damit nichts anderes als die Fourier-Transformierte \hat{f} einer (nicht notwendigerweise periodischen) Funktion f auf den reellen Zahlen. In einigen Situationen in der Physik ist nur die Amplitude $|\hat{f}(\lambda)|$ oder die Energie $|\hat{f}(\lambda)|^2$ einer Frequenz λ von Bedeutung, während die Phasenverschiebung $\frac{\hat{f}(\lambda)}{|\hat{f}(\lambda)|}$ keine Rolle spielt. Man spricht dann vom Energiespektrum. Eine andere Sichtweise ist das Frequenzspektrum, das die Menge aller Frequenzen λ bezeichnet, die in einem betrachteten Objekt vorhanden sind. Im Fall einer Funktion f auf \mathbb{R} ist das gerade der Träger von \hat{f} .

Die Spektralanalyse ist nun die Zerlegung einer Funktion in ihr Spektrum mit Hilfe einer Fourier-Transformation, Spektralsynthese die Rekonstruktion einer Funktion aus ihrem Spektrum. Eine stetige periodische Funktion f auf den reellen Zahlen lässt sich eindeutig aus ihrer Fourier-Transformierten \hat{f} rekonstruieren. In einem allgemeineren Kontext ist das jedoch nicht immer der Fall. Für die Spektralsynthese ist also die Frage von zentraler Bedeutung, ob sich einem gegebenen Spektrum genau eine Funktion zuordnen lässt, oder ob es mehrere Funktionen gibt, die das selbe Spektrum besitzen.

In der abstrakten harmonischen Analyse wird das Spektrum von einzelnen Funktionen auf Mengen von Funktionen erweitert. Wir betrachten den

Raum $L^1(G)$ der L^1 -Funktionen auf einer lokalkompakten abelschen Gruppe G . Unter dem Spektrum einer Teilmenge M von $L^1(G)$ verstehen wir dann gerade die Hülle von M . Dieser Begriff entspricht in etwa dem Frequenzspektrum. So liegt für alle Funktionen f aus einem abgeschlossenen Ideal I in $L^1(G)$ der Träger ihrer Fourier-Transformierten \widehat{f} im Komplement der Hülle von I . Es stellt sich die Frage, ob ein abgeschlossenes Ideal in $L^1(G)$ eindeutig durch seine Hülle bestimmt ist. Es stellt sich heraus, dass das im Allgemeinen nicht der Fall ist, und es mehrere Ideale geben kann, die die selbe Hülle besitzen.

Wir gehen in dieser Arbeit der Frage nach, ob in einer polynomiellen Hypergruppe zu einem Spektrum, das nur aus einem Punkt besteht, genau ein abgeschlossenes Ideal existiert, das diesen Punkt als Hülle hat. Darüber hinaus zeigen wir, dass unter gewissen Voraussetzungen eine schwächere Eigenschaft gilt, nämlich dass der Punkt eine schwache Spektralmenge ist.

Kapitel 1

Orthogonale Polynome und Hypergruppen

In diesem Kapitel gehen wir darauf ein, wie eine Folge orthogonaler Polynome eine Hypergruppe erzeugt und wie wir diese Hypergruppe mit der Faltungsalgebra $\ell^1(\mathbb{N}_0)$ bzw. $\ell^1(h)$ identifizieren können. Wir definieren eine Fourier-Transformation auf $\ell^1(h)$, führen mehrere duale Mengen ein und beschreiben, wie sie miteinander zusammenhängen.

Wir untersuchen Folgen orthogonaler Polynome, die sich auf folgende Weise konstruieren lassen: Wir gehen von reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ aus, die

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 &= 1, \\ a_n + b_n + c_n &= 1 \quad \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

erfüllen. Es bezeichne $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Weiterhin sollen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht die Nullfolge sein. Daraus konstruieren wir nun rekursiv eine Folge $(R_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Polynomen auf \mathbb{R} :

$$R_0(x) := 1, \quad R_1(x) := \frac{1}{a_0}(x - b_0),$$

$$R_1(x)R_n(x) := a_n R_{n+1}(x) + b_n R_n(x) + c_n R_{n-1}(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Später werden wir die Polynome R_n auch auf \mathbb{C} erweitern. Für Beispiele verweisen wir auf Kapitel 3.

Nach dem Satz von Favard (siehe [Chi78]) ist $(R_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine orthogonale Polynomsequenz, das heißt es gibt ein Wahrscheinlichkeitsmaß π auf \mathbb{R} und $\mu_m > 0$, so dass

$$\int_{\mathbb{R}} R_n(x)R_m(x)d\pi(x) = \delta_{n,m}\mu_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Sei $\ell^1(\mathbb{N}_0)$ der Banachraum der komplexen Folgen $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < \infty,$$

versehen mit der Norm $\|(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0}\| := \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|$. Wir definieren

$$D := \{z \in \mathbb{C} : (R_n(z))_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ ist beschränkt}\},$$

und betrachten Funktionen der Form

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n R_n|_D$$

auf D mit $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$. Die Menge dieser Funktionen bezeichnen wir mit

$$A := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n R_n|_D : (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \ell^1(\mathbb{N}_0) \right\}$$

und versehen sie mit der punktweisen Multiplikation. Jetzt können wir $\ell^1(\mathbb{N}_0)$ mit Hilfe der Abbildung

$$a = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \mapsto \hat{a} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n R_n|_D$$

bijektiv auf A abbilden und so A mit $\ell^1(\mathbb{N}_0)$ identifizieren. Nun stellt sich die Frage, wie man eine Verknüpfung $*$ auf $\ell^1(\mathbb{N}_0)$ definiert, die

$$\widehat{a * b} = \hat{a} \cdot \hat{b}, \quad \forall a, b \in \ell^1(\mathbb{N}_0)$$

erfüllt. Wir stellen fest, dass sich das Produkt zweier Polynome als Linearkombination von Polynomen ausdrücken lässt (Lemma 6.1 in [Las05]),

$$R_n(x)R_m(x) = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} g(n, m; k)R_k(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Dies ist eine endliche Summe. Mit Hilfe der Koeffizienten $g(n, m; k)$ definieren wir uns zunächst eine Verknüpfung $\omega : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \ell_{co}^1(\mathbb{N}_0)$,

$$\omega(n, m) = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} g(n, m; k)\varepsilon_k,$$

wobei $\varepsilon_k := (\delta_{k,m})_{m \in \mathbb{N}_0}$ und ℓ_{co}^1 die endlichen Konvexkombinationen von Dirac-Funktionen ε_k bezeichnet. Unter der Voraussetzung, dass $g(n, m; k) \geq 0$ für alle $|n - m| \geq k \geq n + m$, wird \mathbb{N}_0 mit ω als Faltung und $\tilde{n} = n$ als Involution zu einer diskreten kommutativen Hypergruppe (Theorem 6.1 in [Las05]).

Ein Tripel (K, ω, \sim) heißt *diskrete Hypergruppe*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(1) Die Abbildung $\omega : K \times K \rightarrow \ell_{co}^1$ erfüllt das Assoziativgesetz

$$\omega(\varepsilon_x, \omega(y, z)) = \omega(\omega(x, y), \varepsilon_z) \quad \text{für alle } x, y, z \in K.$$

(2) Die Abbildung $\sim : K \rightarrow K$ ist bijektiv,

$$\widetilde{\widetilde{x}} = x \quad \text{und} \quad \omega(x, y)^\sim = \omega(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in K.$$

(3) Es gibt ein Element $e \in K$, so dass

$$\omega(e, x) = \varepsilon_x = \omega(x, e) \quad \text{für alle } x \in K.$$

(4) $e \in \text{supp } \omega(x, \tilde{y})$ genau dann, wenn $x = y$.

Ist $\omega(x, y) = \omega(y, x)$ für alle $x, y \in K$, so heißt die Hypergruppe (K, ω, \sim) *kommutativ*. Die Abbildung ω heißt *Faltung* und die Abbildung \sim heißt *Involution*, e heißt *Einselement*. K ist in Unserem Fall immer \mathbb{N}_0 . Eine solche von orthogonales Polynomen erzeugte Hypergruppe nennen wir kurz *polynomielle Hypergruppe*.

Die Eigenschaft $g(n, m; k) \geq 0$ ist für viele Beispiele erfüllt, etwa bei den Chebyshev-Polynomen, den Cosh-Polynomen, den Ultrasphärischen Polynomen und den Jacobi-Polynomen. Siehe dazu S. 95-100 in [Las05].

Die Verknüpfung ω erweitern wir auf $\ell^1(\mathbb{N}_0)$, indem wir für alle $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \ell^1(\mathbb{N}_0)$ und $g = (g_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \ell^1(\mathbb{N}_0)$

$$\omega(f, g) = \sum_{n, m=0}^{\infty} f_n g_m \omega(n, m)$$

setzen. $\ell^1(\mathbb{N}_0)$ wird mit der Faltung $f * g := \omega(f, g)$ und der Involution $f \mapsto f^* = \bar{f}$ für $f, g \in \ell^1(\mathbb{N}_0)$ zu einer Banach-**-Algebra* (Theorem 2.3 in [Las05]).

Ein Banachraum $(A, \|\cdot\|)$ über \mathbb{C} (oder \mathbb{R}) mit einer Involution $*$ heißt *Banach-**-Algebra**, falls A eine Algebra ist, die Norm submultiplikativ ist, d.h. $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ für alle $x, y \in A$, und die Involution $\|x^*\| = \|x\|$ für alle $x \in A$ erfüllt.

Die Faltung $*$ besitzt nun die gewünschte Eigenschaft, dass

$$\widehat{a * b} = \widehat{a} \cdot \widehat{b}, \quad \forall a, b \in \ell^1(\mathbb{N}_0)$$

(Theorem 3.3 in [Las05]). Wir können ω auch von \mathbb{N}_0 auf die Potenzmenge von \mathbb{N}_0 erweitern. Für $A, B \subseteq \mathbb{N}_0$ definieren wir dann

$$\omega(A, B) := \bigcup_{x \in A, y \in B} \text{supp } \omega(x, y).$$

Jetzt definieren wir für festes $n \in \mathbb{N}_0$ und für alle Abbildungen $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ den *Links-Translations-Operator* L_n durch

$$L_n f(m) := \sum_{k=|n-m|}^{n+m} g(n, m; k) f(k)$$

Eine positive Funktion $h : \mathbb{N}_0 \rightarrow [0, \infty[$ heißt *links-invariant*, wenn für alle $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ mit $|\text{supp} f| < \infty$ und $m \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_m f(n) h(n) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) h(n)$$

gilt. Eine *Haar-Funktion* ist eine links-invariante positive Funktion $h : \mathbb{N}_0 \rightarrow [0, \infty[$ mit $h \neq 0$.

In unserem Fall existiert eine bis auf die Wahl von $h(0)$ eindeutige Haar-Funktion h . Wählen wir $h(0) = 1$, so ist h nach Theorem 2.1 in [Las05] gegeben durch

$$h(n) = (\omega(n, n)(0))^{-1} = g(n, n; 0)^{-1} = \mu_n^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Damit definieren wir den Banachraum

$$\ell^1(h) := \left\{ f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{n \in \mathbb{N}_0} |f(n)| h(n) < \infty \right\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} |f(n)| h(n).$$

$\ell^1(h)$ wird mit der Faltung

$$f * g(m) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} f(n) L_n g(m) h(n) \quad \forall m \in \mathbb{N}_0$$

und der *-Operation $f^* = \bar{f}$ zu einer Banach-*-Algebra (Theorem 2.4 (i) in [Las05]). Über den Isomorphismus $f \mapsto fh$ können wir $\ell^1(h)$ mit $\ell^1(\mathbb{N}_0)$ identifizieren. Für $f \in \ell^1(h)$ definieren wir jetzt die *Fourier-Transformierte* $\hat{f} : D_s \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(x) f(k) h(k).$$

Dabei bezeichnet

$$D_s := \{x \in \mathbb{R} : (R_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ ist beschränkt}\}.$$

Man kann die Fourier-Transformierte auch auf der größeren Menge

$$D := \{z \in \mathbb{C} : (R_n(z))_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ ist beschränkt}\}$$

definieren,

$$\mathcal{F}f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(z)f(k)h(k) \quad \forall z \in D.$$

Ein lineares Funktional $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer Algebra A (in unserem Fall ist das $\ell^1(h)$) heißt *multiplikativ*, falls $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$ für alle $f, g \in A$ gilt. Da $\ell^1(h)$ eine Banach-Algebra ist, ist jedes lineare, multiplikative Funktional auf $\ell^1(h)$ automatisch beschränkt (Lemma 2.1.5 in [Kan09]). Den *Strukturraum* von A bezeichnen wir mit

$$\Delta(A) = \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \neq 0, \varphi \text{ linear und multiplikativ}\}.$$

Wir versehen ihn mit der Gelfand-Topologie, das heißt mit der schwächsten Topologie, bezüglich der die Funktionale

$$\Delta(A) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \varphi(x), \quad x \in A$$

stetig sind. Darüber hinaus bezeichnen wir den *symmetrischen Strukturraum* von A mit

$$\Delta_s(A) = \{\varphi \in \Delta(A) : \varphi(\bar{f}) = \overline{\varphi(f)} \forall f \in A\}.$$

Wir definieren für $a \in A$ die *Gelfand-Transformierte* $\hat{a} : \Delta(A) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\hat{a}(\varphi) = \varphi(a).$$

Wir werden sehen, dass die Fourier-Transformation, richtig interpretiert, nichts anderes ist als die Gelfand-Transformation. Dazu betrachten wir die *Charaktere*

$$\chi^b(\mathbb{N}_0) = \{\alpha \in \ell^\infty(\mathbb{N}_0) : \alpha \neq 0, L_x \alpha(y) = \alpha(x)\alpha(y) \forall x, y \in \mathbb{N}_0\}$$

und die *symmetrischen Charaktere*

$$\widehat{\mathbb{N}}_0 = \{\alpha \in \chi^b(\mathbb{N}_0) : \alpha(x) = \overline{\alpha(x)} \forall x \in \mathbb{N}_0\}$$

Wir definieren zu jedem $z \in \mathbb{C}$ die Abbildung $\alpha_z : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\alpha_z(n) = R_n(z).$$

Nach Proposition 6.2 (iii) in [Las05] sind die Abbildungen $D \rightarrow \chi^b(\mathbb{N}_0)$, $z \mapsto \alpha_z$ und ihre Einschränkung auf D_s , $D_s \rightarrow \widehat{\mathbb{N}}_0$, $x \mapsto \alpha_x$ Homöomorphismen. Wir können also $\widehat{\mathbb{N}}_0$ mit D_s identifizieren bzw. $\chi^b(\mathbb{N}_0)$ mit D . Nach Theorem 3.1 in [Las05] ist außerdem die Abbildung $\chi^b(\mathbb{N}_0) \rightarrow \Delta(\ell^1(h))$, $\alpha \mapsto \varphi_\alpha$ mit

$$\varphi_\alpha(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\alpha(k)} f(k)h(k) \quad \forall f \in \ell^1(h)$$

bijektiv zwischen $\chi^b(\mathbb{N}_0)$ und $\Delta(\ell^1(h))$. Ihre Einschränkung auf $\widehat{\mathbb{N}}_0$ ist ebenfalls bijektiv zwischen $\widehat{\mathbb{N}}_0$ und $\Delta_s(\ell^1(h))$. Auf diese Weise können wir D_s mit $\Delta_s(\ell^1(h))$ identifizieren (bzw. D mit $\Delta(\ell^1(h))$) und so die Fourier-Transformation als Gelfand-Transformation verstehen.

Kapitel 2

Spektralmengen und schwache Spektralmengen

2.1 Definition und Überblick

Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Strukturraum $\Delta(A)$ und Gelfand-Transformation $a \mapsto \hat{a}$ (das ist in unserem Fall $\ell^1(h)$ mit der zuvor definierten Fourier-Transformation). Für eine Teilmenge M von A definieren wir die *Hülle* $h(M)$ von M ,

$$h(M) = \{\varphi \in \Delta(A) : \varphi(a) = 0 \ \forall a \in M\}.$$

Weiter definieren wir für eine abgeschlossene Teilmenge E von $\Delta(A)$ den *Kern* $k(E)$ von E ,

$$k(E) = \{a \in A : \hat{a}(\varphi) = 0 \ \forall \varphi \in E\},$$

sowie

$$j(E) = \{a \in A : \hat{a} \text{ hat kompakten Träger und } \text{supp } \hat{a} \cap E = \emptyset\}.$$

Eine kommutative Banach-Algebra heißt *regulär*, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge E von $\Delta(A)$ und jedes $\varphi_0 \in \Delta(A) \setminus E$ ein $x \in A$ existiert, so dass

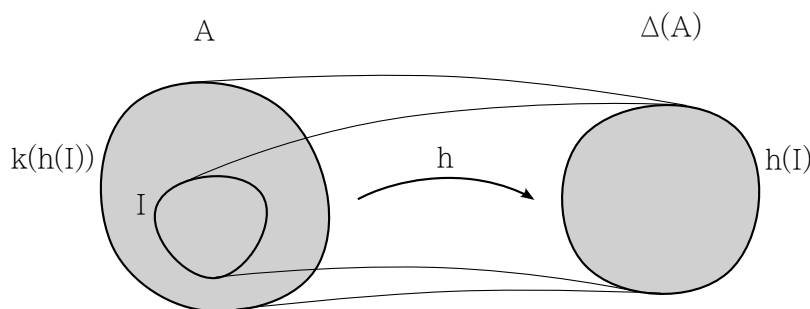
$$\varphi_0(x) \neq 0 \quad \text{und} \quad \varphi(x) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in E.$$

Regularität kann als eine Trennungseigenschaft interpretiert werden.

Ist A regulär, so ist jede Teilmenge E von $\Delta(A)$ wegen $E = h(k(E))$ ([Kan09], Lemma 4.2.3) bereits eindeutig durch ihren Kern $k(E)$ bestimmt. Des weiteren ist $k(E)$ ein abgeschlossenes Ideal.

Ein *Ideal* in einer kommutativen Banach-Algebra A ist eine Teilmenge $I \subseteq A$ mit der Eigenschaft, dass $ab \in I$ für alle $a \in A$ und $b \in I$.

Das Problem der Spektralsynthese ist nun die Frage, inwieweit ein abgeschlossenes Ideal I in A von seiner Hülle $h(I)$ bestimmt ist. Im Allgemeinen ist nämlich $I \neq k(h(I))$. Formulieren wir die Frage also allgemeiner: Ist eine abgeschlossene Teilmenge E von $\Delta(A)$ gegeben, was sind dann die abgeschlossenen Ideale in A , deren Hülle gleich E ist? Und welche abgeschlossenen Teilmengen E von $\Delta(A)$ sind die Hülle von nur einem abgeschlossenen Ideal in A , nämlich von $k(E)$?



Eine abgeschlossene Teilmenge E von $\Delta(A)$ heißt *Spektralmenge* (oder *Synthesemenge*), wenn $k(E)$ das einzige abgeschlossene Ideal in A ist, dessen Hülle E ist.

Falls A halbeinfach und regulär ist, gilt

$$h(k(E)) = h(j(E)) = E.$$

Darüber hinaus ist $k(E)$ das größte Ideal dessen Hülle E ist und $j(E)$ ist das kleinste solche Ideal (Theorem 5.1.6 in [Kan09]). In diesem Fall ist E also genau dann eine Spektralmenge, wenn $k(E) = j(E)$ ist.

Eine kommutative Banach-Algebra A heißt halbeinfach, wenn ihr *Radikal*

$$\text{rad}(A) = \bigcap \{\ker \varphi : \varphi \in \Delta(A)\}$$

nur aus der 0 besteht, wenn also $\text{rad}(A) = \{0\}$.

Ist jede abgeschlossene Teilmenge $E \subseteq \Delta(A)$ eine Spektralmenge, so sagen wir, dass für A *Spektralsynthese gilt*. Der Begriff *Synthese* bedeutet in diesem Zusammenhang, dass man ein abgeschlossenes Ideal $I \subseteq A$ eindeutig aus seiner Hülle $h(I)$ rekonstruieren (oder zusammensetzen) kann.

Da selbst für eine reguläre, halbeinfache kommutative Banach-Algebra für gewöhnlich keine Spektralsynthese gilt, besteht ein großes Interesse daran, zu untersuchen ob die Spektralmengen-Eigenschaft unter bestimmten Operationen wie der endlichen Vereinigungen erhalten bleibt. Ein Hilfsmittel dabei sind Ditkin-Mengen.

Eine abgeschlossene Teilmenge E von $\Delta(A)$ heißt *Ditkin-Menge*, wenn für jedes $x \in k(E)$ eine Folge $(y_k)_k$ in $j(E)$ existiert, so dass

$$y_k x \rightarrow x \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Die Vereinigung von zwei Ditkin-Mengen ist wieder eine Ditkin-Menge ([Kan09], Lemma 5.2.1). Die Vereinigung zweier Spektralmengen ist hingegen im Allgemeinen keine Spektralmenge. Ein Gegenbeispiel ist die Mirkil-Algebra, siehe [Mir60]. Es gilt jedoch ([Kan09], Theorem 5.2.5):

Satz 1. *Sei A eine halbeinfache reguläre kommutative Banach-Algebra und seien E_1 und E_2 abgeschlossene Teilmengen von $\Delta(A)$ derart, dass $E_1 \cap E_2$ eine Ditkin-Menge ist. Dann ist $E_1 \cup E_2$ genau dann eine Spektralmenge, wenn E_1 und E_2 Spektralmengen sind.*

Wir sind an Bedingungen interessiert, die für eine konkrete abgeschlossene Teilmenge E von $\Delta(A)$ sicherstellen, dass sie eine Spektralmenge ist. Das Wiener-Ditkin-Theorem liefert eine solche Bedingung, nämlich dass der Rand $\partial(E)$ von E verstreut ist.

Ein topologischer Raum X heißt *verstreut*, wenn jede nicht leere abgeschlossene Teilmenge F von X einen isolierten Punkt hat, das heißt ein $x \in F$ und eine offene Teilmenge U von X so dass $U \cap F = \{x\}$.

Satz 2 (Wiener-Ditkin). *Sei A eine halbeinfache reguläre kommutative Banach-Algebra, für die \emptyset eine Ditkin-Menge ist. Dann ist jede abgeschlossene Teilmenge E von $\Delta(A)$ mit verstreutem Rand $\partial(E)$ eine Spektralmenge.*

Es gibt mehrere Erweiterungen des Wiener-Ditkin-Theorems, unter anderem von Atzmon ([Atz70], Theorem 1.2) und von Kaniuth ([Kan09], Theorem 5.2.13).

Der Banach-Raum $L^1(G)$ über einer lokalkompakten abelschen Gruppe G mit der Norm $\|\cdot\|_1$ wird mit der Faltung

$$(f * g)(x) = \int_G f(xy)g(y^{-1})dy$$

zu einer Banach-Algebra. Falls G diskret ist, definieren wir die Faltung durch

$$(f * g)(x) = \sum_{y \in G} f(xy)g(y^{-1}).$$

Im Fall einer kompakten abelschen Gruppe G gilt für $L^1(G)$ Spektralsynthese ([Kan09], Korollar 5.5.3). Ein bekannter Satz von Malliavin [Mal59] besagt jedoch, dass für $L^1(G)$ mit einer nicht kompakten lokalkompakten abelschen Gruppe G keine Spektralsynthese gilt, das heißt, es gibt eine abgeschlossene Teilmenge E von $\widehat{G} = \Delta(L^1(G))$ mit der Eigenschaft, dass $k(E)$ nicht das einzige abgeschlossene Ideal in $L^1(G)$ mit Hülle E ist. Aus diesem Grund besteht ein Interesse daran, sowohl Spektralmengen als auch Ditkin-Mengen für $L^1(G)$ zu erzeugen.

Kaplanski hat in [Kap49] gezeigt, dass alle Punktmenge in $\widehat{G} = \Delta(L^1(G))$ Spektralmengen sind. Helson hat dieses Ergebnis in [Hel52] verbessert und gezeigt, dass jede abgeschlossene Teilmenge von \widehat{G} mit verstreutem Rand

eine Spektralmenge ist. Die Einheitssphäre $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Spektralmenge für $L^1(\mathbb{R}^2)$, siehe [Her58]. Ein anschauliches Beispiel für eine Menge, die keine Spektralmenge ist, stellt dagegen die Einheitssphäre S^{n-1} in \mathbb{R}^n für $n \geq 3$ dar. Schwartz hat in [Sch48] gezeigt, dass S^{n-1} für $L^1(\mathbb{R}^n)$ in diesem Fall keine Spektralmenge ist.

Es gibt zwei große offene Fragen in der Spektralsynthese von $L^1(G)$:

- (1) Ist jede Spektralmenge in \widehat{G} eine Ditkin-Menge?
- (2) Ist die Vereinigung zweier Spektralmenge wieder eine Spektralmenge?

Falls die erste Frage positiv beantwortet wird, hat das auch eine positive Antwort auf die zweite Frage zur Folge, da die Vereinigung von zwei Ditkin-Mengen wieder eine Ditkin-Menge ist.

Wir müssen hier genau zwischen $L^1(G)$ und $\ell^1(h)$ unterscheiden. Die hier genannten Ergebnisse zu $L^1(G)$ sind nicht auf $\ell^1(h)$ anwendbar, da $(\mathbb{N}_0, +)$ keine Gruppe ist und die Faltung in beiden Fällen unterschiedlich definiert ist. Im Allgemeinen sind nicht alle Punktmenge in $\widehat{\mathbb{N}}_0$ Spektralmenge. Vogel untersucht in [Vog87] für verschiedene polynomielle Hypergruppen auf \mathbb{N}_0 , welche Punktmenge aus $\widehat{\mathbb{N}}_0$ Spektralmenge sind. Seine Ergebnisse werden in Kapitel 3 vorgestellt.

Für mehr Informationen über die Spektralsynthese regulärer kommutativer Banachalgebren verweisen wir auf Kapitel 5 in [Kan09].

Wie wir gesehen haben gilt in vielen Fällen keine Spektralsynthese. Aus diesem Grund verallgemeinert man den Begriff der Spektralmenge und führt den der schwachen Spektralmenge ein.

Sei A eine reguläre halbeinfache kommutative Banach-Algebra. Eine abgeschlossene Teilmenge E von $\Delta(A)$ heißt *schwache Spektralmenge*, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a^n \in \overline{j(E)}$ für alle $a \in k(E)$.

Schwache Spektralmenge wurden von Warner in [War87] im Zusammenhang mit dem Vereinigungsproblem von Spektralmenge eingeführt und untersucht. Varopoulos hat sie jedoch bereits zuvor implizit in seinen Arbeiten [Var66], [Var68] benutzt.

Die Einheitssphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n = \Delta(L^1(\mathbb{R}^n))$ ist für $n \geq 3$ eine schwache Spektralmenge, aber keine Spektralmenge, siehe [Var68]. Es gibt eine Reihe von Banach-Algebren, für die zwar schwache Spektralsynthese gilt, aber keine Spektralsynthese, siehe [Kan07], Abschnitt 1.

Parthasarathy und Varma haben in [ParVar91] gezeigt, dass für die Fourier Algebra $A(G) = L^1(\widehat{G})$ einer nichtdiskreten lokalkompakten abelschen Gruppe G keine schwache Spektralsynthese gilt. Kaniuth hat dieses Ergebnis in [Kan07] auf den nichtabelschen Fall erweitert und gezeigt, dass für $A(G)$ mit einer beliebigen lokalkompakten Gruppe G genau dann schwache Spektralsynthese gilt, wenn G diskret ist.

In [Kan10a] formuliert Kaniuth Bedingungen, unter denen im Fall einer regulären halbeinfachen kommutativen Banach-Algebra der Schnitt zweier

schwachen Spektralmenge und die abzählbare Vereinigung schwacher Spektralmenge wieder eine schwache Spektralmenge ist.

In [KanUel] führen Kaniuth und Ülger eine absteigende Folge $\sigma_n(E)$ von Teilmengen von $\Delta(A)$ ein um damit schwache Spektralmenge zu untersuchen und zu charakterisieren, und vergleichen diese mit dem von Muraleedharan und Parthasarathy in [MurPar99] eingeführten n -Differenz-Spektrum $\Delta_n(E)$.

Darüber hinaus beschäftigt sich Kaniuth mit der schwachen Spektralsynthese der Fourier-Algebra $A(G/K)$ einer Faktorgruppe G/K , wobei G eine lokalkompakte Gruppe und K eine kompakte Untergruppe von G ist [Kan10b], sowie mit der schwachen Spektralsynthese des projektiven Tensorprodukts $A \hat{\otimes} B$ zweier regulärer kommutativer Banach-Algebren A und B [Kan04].

2.2 Wachstumsbedingungen

Wir werden sehen dass die Art des Wachstums einer Hypergruppe auf \mathbb{N}_0 sowohl bei der Spektralsynthese als auch bei der schwachen Spektralsynthese eine entscheidende Rolle spielt.

Zunächst erweitern wir die Haar-Funktion h auf endliche Teilmengen $C \subset \mathbb{N}_0$, indem wir

$$h(C) := \sum_{k \in C} h(k)$$

setzen. Weiter bezeichne $C^n = C * \dots * C$ die n -fache Faltung von $C \subset \mathbb{N}_0$. Damit definieren wir mehrere Wachstumsbedingungen.

- (1) Die Hypergruppe \mathbb{N}_0 *wächst polynomiell*, wenn es für jedes endliche $C \subset \mathbb{N}_0$ ein $\alpha = \alpha(C) \geq 0$ gibt, so dass

$$h(C^n) = O(n^\alpha) \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

- (2) sie *wächst subexponentiell*, wenn es für jedes endliche $C \subset \mathbb{N}_0$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine Konstante $M = M(C, \varepsilon) > 0$ gibt, so dass

$$h(C^n) \leq M(1 + \varepsilon)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0,$$

- (3) und sie *wächst exponentiell*, wenn sie nicht subexponentiell wächst.

Aus subexponentiellem Wachstum folgt also polynomielles Wachstum. Diese Wachstumsbedingungen lassen sich mit Hilfe der Haar-Funktion h noch etwas handlicher formulieren.

Lemma 3. (1) Die Hypergruppe \mathbb{N}_0 *wächst genau dann polynomiell*, wenn es ein $\alpha \geq 0$ gibt, so dass

$$h(n) = O(n^\alpha) \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

(2) und sie wächst genau dann subexponentiell, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Konstante $K = K(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass

$$h(n) \leq K(1 + \varepsilon)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. (1) Angenommen, $h(n) = O(n^\beta)$ für $n \rightarrow \infty$. Sei $C \subseteq \mathbb{N}_0$ endlich und $n_0 = \max C$. Es ist $\text{supp } c * d \subseteq \{|c - d|, \dots, c + d\}$ für alle $c \in C$ und $d \in C^n$. Nehmen wir an, dass $C^n \subseteq \{0, 1, \dots, nn_0\}$, so folgt daraus nach Definition der Faltung, dass

$$C^{n+1} = \bigcup_{c \in C, d \in C^n} \text{supp } c * d \subseteq \{0, \dots, (n+1)n_0\}.$$

Per Induktion nach n folgt mit $C \subset \{0, \dots, n_0\}$, dass

$$C^n \subseteq \{0, 1, \dots, nn_0\}.$$

Damit ist

$$h(C^n) = \sum_{k \in C^n} h(k) = O((nn_0 + 1)(nn_0)^b) = O(n^{\beta+1}) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Setzen wir umgekehrt polynomielles Wachstum von \mathbb{N}_0 voraus. Da $(R_1)^n$ den Grad n hat, ist $n \in \{1\}^n$. Damit folgt aus dem polynomiellen Wachstum von \mathbb{N}_0 , dass

$$h(n) \leq \sum_{k \in \{1\}^n} h(k) = h(\{1\}^n) = O(n^\alpha) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

(2) Wir nehmen an, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $K > 0$ gibt, so dass $h(n) \leq K(1 + \varepsilon)^n$ ist. Sei $C \subseteq \mathbb{N}_0$ endlich, $\delta > 0$ und $n_0 = \max C$. Weil $\sum_{k=1}^{n_0} (1 + \varepsilon)^k$ stetig von ε abhängt, und $\sum_{k=1}^{n_0} (1 + 0)^k = n_0$ ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\sum_{k=1}^{n_0} (1 + \varepsilon)^k \leq n_0(1 + \delta).$$

Erfülle ε außerdem $(1 + \varepsilon)^{n_0} \leq 1 + \delta$. Da $C^n \subseteq \{0, \dots, nn_0\}$, erhalten wir damit nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} h(C^n) &= \sum_{k \in C^n} h(k) \leq \sum_{k=0}^{nn_0} h(k) \leq K \sum_{k=0}^{nn_0} (1 + \varepsilon)^k \\ &= K \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n_0} (1 + \varepsilon)^{in_0+j} \right) \\ &= K \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} ((1 + \varepsilon)^{n_0})^i \sum_{j=1}^{n_0} (1 + \varepsilon)^j \right) \\ &\leq K \left(1 + n_0 \sum_{i=1}^n (1 + \delta)^i \right). \end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^n (1+\delta)^i = \frac{(1+\delta)^{n+1} - 1}{(1+\delta) - 1} = \frac{1+\delta}{\delta} (1+\delta)^n - \frac{1}{\delta} \leq \frac{1+\delta}{\delta} (1+\delta)^n$$

und mit $M(C, \delta) := 2Kn_0 \frac{1+\delta}{\delta}$ folgt daraus, dass

$$h(C^n) \leq K \left(1 + n_0 \frac{1+\delta}{\delta} (1+\delta)^n \right) \leq M(C, \delta) (1+\delta)^n.$$

Die Umkehrung folgt wie bei (1), indem man $C = \{1\}$ betrachtet. \square

Mit Hilfe dieser Wachstumsbedingungen lassen sich Aussagen über D_s und D treffen. Wir fassen Theorem 5.2 und Korollar 6.1 in [Las05] zu folgendem Satz zusammen.

Satz 4. *Für eine polynomielle Hypergruppe \mathbb{N}_0 mit subexponentiellem Wachstum gilt*

$$\text{supp } \pi = D_s = D,$$

wobei π das Wahrscheinlichkeitsmaß ist, bezüglich dem die Polynome R_n orthogonal sind.

Die Art des Wachstums ist auch von Bedeutung wenn man untersucht, welche Punktmenge $\{x_0\} \subseteq D_s$ Spektralmengen sind. Vogel beschreibt in [Vog87] (Theorem 3.11) für den Fall polynomiellen Wachstums die abgeschlossenen Ideale in $l^1(h)$, deren Hülle $\{x_0\}$ ist, und zeigt, dass es nur endlich viele sind.

Satz 5. *Sei \mathbb{N}_0 eine polynomielle Hypergruppe mit polynomielltem Wachstum, P_n , $n \in \mathbb{N}_0$ die zugehörigen orthogonalen Polynome, $a_0 > 0$, h die Haar-Funktion von \mathbb{N}_0 , $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass*

$$h(n) = O(n^N) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

und $x_0 \in D_s$. Dann gibt es ein $K(x_0) \in \mathbb{N}_0$, $K(x_0) \leq N+4$ mit den folgenden Eigenschaften.

(1) Die Folge

$$k(\{x_0\}) = I_0 \supseteq I_1 \supseteq \cdots \supseteq I_{K(x_0)} = \overline{j(\{x_0\})}$$

mit

$$I_k = \{a \in l^1(h) : \widehat{a}^{(n)}(x_0) = 0 \text{ für } n = 0, 1, \dots, k\}$$

besteht aus allen abgeschlossenen Idealen in $l^1(h)$, deren Hülle $\{x_0\}$ ist.

(2) $K(x_0) = \max\{k \in \mathbb{N}_0 : \exists M > 0 : |P_n^{(k)}(x_0)| \leq M \forall n \in \mathbb{N}_0\}$

$k(\{x_0\})$ und $\overline{j(\{x_0\})}$ stimmen also genau dann überein, wenn $K(x_0) = 0$ ist. Diese Charakterisierung von Spektralmengen formuliert Vogel im folgenden Korollar ([Vog87], Korollar 3.12).

Korollar 6. *Sei \mathbb{N}_0 eine polynomielle Hypergruppe mit polynomielltem Wachstum, P_n , $n \in \mathbb{N}_0$ die zugehörigen orthogonalen Polynome und $a_0 > 0$. $\{x_0\}$ mit $x_0 \in D_s$ ist genau dann keine Spektralmenge, wenn die Folge $(P'_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}_0}$ beschränkt ist, das heißt wenn es ein $M > 0$ gibt, so dass*

$$|P'_n(x_0)| < M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Bei der Untersuchung von Punktmengeten ist auch der folgende Korollar (Korollar 3.13 in [Vog87]) hilfreich.

Korollar 7. *Unter den Voraussetzungen von Korollar 6 gilt:*

- (1) $\{1\}$ ist eine Spektralmenge.
- (2) Ist $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\{1 - 2a_0\}$ eine Spektralmenge.

Wir werden uns nun mit der schwachen Spektralsynthese von Punktmengeten $\{\alpha\}$ mit $\alpha \in D_s$ im Fall polynomiellen Wachstums beschäftigen. Dazu benötigen wir das folgende Lemma von Dixmier (Lemma 7 in [Dix60]). Bezeichne C_n für $n \in \mathbb{N}$ die Menge der Funktionen $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\varphi(0) = 0$, die stetige integrierbare Ableitungen bis zur Ordnung $n + 3$ besitzen. Bezeichne weiter $f^n = f * \dots * f$ die n -fache Faltung von $f \in \ell^1(h)$,

$$\exp(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n$$

und $c_{00}(\mathbb{N}_0)$ die komplexen Folgen mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Folgengliedern.

Lemma 8. *Sei \mathbb{N}_0 eine polynomielle Hypergruppe mit polynomielltem Wachstum und $M \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass*

$$h(n) = O(n^M) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Dann konvergiert für alle reellwertigen Folgen $f \in c_{00}(\mathbb{N}_0)$ und für alle $\varphi \in C_M$ das Integral

$$\varphi(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(itf) \widehat{\varphi}(t) dt,$$

$\varphi(f) \in \ell^1(h)$ und für alle $\alpha \in D_s$ gilt

$$\widehat{\varphi(f)}(\alpha) = \varphi(\widehat{f}(\alpha)).$$

Ist darüber hinaus $\varphi(t) = t^p$ für $|t| \leq \|f\|_1$, so ist $\varphi(f) = f^p$.

Es stellt sich heraus, dass im Fall polynomiellen Wachstums jede Punktmenge $\{x\} \subseteq D_s$ eine schwache Spektralmenge ist. Ein Ergebnis von Vogel (Lemma 2.9 in [Vog87]) ist

Lemma 9. *Sei \mathbb{N}_0 eine polynomielle Hypergruppe mit polynomielltem Wachstum und sei $\alpha \in D_s$. Dann gibt es ein $M \in \mathbb{N}$, so dass*

$$f^{2M+8} \in \overline{j(\{\alpha\})} \quad \text{für alle } f \in k(\{\alpha\}).$$

Beweis. Zunächst begründen wir, dass es genügt, $f \in c_{00}(\mathbb{N}_0) \cap k(\alpha)$ zu betrachten, wobei $k(\alpha) = \{f \in \ell^1(h) : \widehat{f}(\alpha) = 0\}$. Die Abbildung

$$f \mapsto P(f) = f - \widehat{f}(\alpha)\varepsilon_0$$

ist wegen der Stetigkeit der Fourier-Transformation und der Punkteinssetzung und wegen $\widehat{\varepsilon_0}(\alpha) = P_0(\alpha) = 1$ eine stetige Projektion von $\ell^1(h)$ auf $k(\alpha)$. Außerdem ist $P(f) \in c_{00}(\mathbb{N}_0)$ für alle $f \in c_{00}(\mathbb{N}_0)$.

Nun zeigen wir, dass $k(\alpha) \subseteq \overline{c_{00}(\mathbb{N}_0) \cap k(\alpha)}$. Sei dazu $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in k(\alpha)$. Sei weiter

$$g_m := \sum_{n=0}^m f_n \varepsilon_n \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}_0.$$

Die so definierte Folge $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen f und ihre Folgenglieder g_m liegen alle in $c_{00}(\mathbb{N}_0)$. Die Folge $(P(g_m))_{m \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert ebenfalls gegen $f = P(f)$, und $P(g_m) \in c_{00}(\mathbb{N}_0) \cap k(\alpha)$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Zusammen mit der offensichtlichen Inklusion $k(\alpha) \supseteq \overline{c_{00}(\mathbb{N}_0) \cap k(\alpha)}$ gilt also

$$k(\alpha) = \overline{c_{00}(\mathbb{N}_0) \cap k(\alpha)}.$$

Wegen der Stetigkeit der Abbildung $f \mapsto f^{2M+8}$ auf $\ell^1(h)$ mit einem festen $M \in \mathbb{N}$ können wir uns sogar auf $f \in c_{00}(\mathbb{N}_0) \cap k(\alpha)$ beschränken.

Sei also $f \in c_{00}(\mathbb{N}_0) \cap k(\alpha)$. Wir zerlegen zunächst f in zwei reellwertige Folgen $g_1, g_2 \in c_{00}(\mathbb{N}_0) \cap k(\alpha)$ derart, dass $f = g_1 + ig_2$. Sei weiter $M \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass

$$h(n) = O(n^M) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Jetzt wählen wir $\varphi \in C_M$ mit $\varphi(t) = t^{M+4}$ für $|t| \leq \max\{\|g_1\|_1, \|g_2\|_1\}$ und wenden Lemma 8 an. Für $l = 1, 2$ ist $\varphi(g_l) \in \ell^1(h)$ und es gilt

$$\varphi(g_l) = g_l^{M+4}.$$

Als nächstes definieren wir mit Hilfe von Lemma 8 in [Dix60] eine Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ von Funktionen $\varphi_k \in C_m$, die für $|t| \geq 1$ mit φ übereinstimmen, die auf einer Nullumgebung den Wert 0 annehmen, und für die gilt

$$\left\| \varphi_k^{(\beta)} - \varphi^{(\beta)} \right\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty \text{ und für } \beta = 0, 1, \dots, M+3.$$

Dabei nützen wir aus, dass auf einer Nullumgebung $\varphi(t) = t^{M+4}$ ist. Nach Lemma 8 ist $\varphi_k(g_l) \in \ell^1(h)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und für $l = 1, 2$. Darüber hinaus gilt

$$\varphi_k(g_l) \rightarrow \varphi(g_l) \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Da $\widehat{g_l}(\alpha) = 0$ und $\widehat{g_l}$ stetig ist, $\widehat{\varphi_k(g_l)} = \varphi_k \circ \widehat{g_l}$ gilt, und weil auf einer Nullumgebung $\varphi_k = 0$ ist, ist auch $\widehat{\varphi_k(g_l)} = 0$ auf einer Umgebung von α und damit

$$\varphi_k(g_l) \in j(\{\alpha\}) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und für } l = 1, 2.$$

Daraus folgt

$$g_l^{M+4} = \varphi(g_l) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(g_l) \in \overline{j(\{\alpha\})} \quad \text{für } l = 1, 2$$

Weiter ist

$$f^{2M+8} = (g_1 + ig_2)^{2M+8} = \sum_{n=0}^{2M+8} i^n \binom{2M+8}{n} g_1^{2M+8-n} g_2^n \in \overline{j(\{\alpha\})},$$

da in jedem Summand die Potenz von g_1 oder g_2 größer oder gleich $M+4$ ist. Es folgt

$$h^{2M+8} \in \overline{j(\{\alpha\})} \quad \text{für alle } h \in k(\{\alpha\}).$$

□

Vogel beweist dieses Lemma knapp und in etwas allgemeinerer Form für eine beliebige kompakt erzeugte kommutative Hypergruppe mit polynomiellem Wachstum. Es wird im Beweis von Satz 5 verwendet, um zu zeigen, dass die Folge von Idealen endlich ist. Aus dem Lemma folgt

Korollar 10. *Ist \mathbb{N}_0 eine polynomielle Hypergruppe mit polynomiellem Wachstum, dann ist jede Punktmenge $\{\alpha\} \subseteq D_s$ eine schwache Spektralmenge.*

Beweis. Wir überprüfen für die Definition schwacher Spektralmengen, ob $\ell^1(h)$ regulär und halbeinfach ist.

Vogel zeigt in [Vog87] (Lemmata 3.4 und 3.9), dass die Fourier-Algebra $A(D_s)$, die wir über die Fourier-Transformation mit $\ell^1(h)$ identifizieren können, regulär ist.

Zur Halbeinfachheit: Wir zeigen, dass $\bigcap \{\ker \varphi_x : x \in D_s\} = \{0\}$ gilt, wobei $\varphi_x(f) = \widehat{f}(x)$ für alle $f \in \ell^1(h)$. Wegen

$$\bigcap \{\ker \varphi_x : x \in D_s\} \supseteq \bigcap \{\ker \varphi : \Delta(\ell^1(h))\} = \text{rad}(A)$$

folgt dann daraus, dass $\text{rad}(A) = \{0\}$ ist, das heißt $\ell^1(h)$ ist halbeinfach.

Sei also $f = (f_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in A$ derart, dass $\varphi_x(f) = 0$ für alle $x \in D_s$. Nach

Satz 4 ist $D_s = \text{supp } \pi$ und diese Menge ist kompakt. Daraus folgt mit der Orthogonalität der zugehörigen Polynome R_n , dass

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} R_n(x) \widehat{f}(x) d\pi(x) = \int_{D_s} R_n(x) \sum_{k=0}^{\infty} f_k R_k(x) h(k) d\pi(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k h(k) \underbrace{\int_{D_s} R_n(x) R_k(x) d\pi(x)}_{= \delta_{n,k} \frac{1}{h(k)}} = f_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Dabei darf die Grenzwertbildung der Reihe und die Integration vertauscht werden, weil $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, so dass die Fourier-Reihe gleichmäßig konvergiert. Es folgt $f = 0$. \square

Der folgende Satz (eine Abschwächung von Theorem 2.11 aus [Kan10a]) betrifft die abzählbare Vereinigung von schwachen Spektralmengen. Sei $\xi(E) \in \mathbb{N} \cap \{\infty\}$ für eine abgeschlossene Teilmenge E von $\Delta(A)$ die kleinste Zahl, für die $a^n \in \overline{j(E)}$ für alle $a \in k(E)$.

Satz 11. *Sei A eine reguläre halbeinfache kommutative Banach-Algebra und seien E_k , $k \in \mathbb{N}$ abgeschlossene Teilmengen von $\Delta(A)$, so dass $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ abgeschlossen ist. Seien zudem die folgenden beiden Bedingungen erfüllt.*

(1) E_j ist für alle $j \in \mathbb{N}$ eine schwache Spektralmenge und

$$\sup\{\xi(E_j) : j \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

(2) Zu jedem $j \in \mathbb{N}$ existiert eine Ditkin-Menge D_j , so dass

$$\partial(E_j) \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N} \setminus \{j\}} E_i \subseteq D_j \subseteq E_j.$$

Dann ist E eine schwache Spektralmenge.

Mit ihm lässt sich die Aussage von Korollar 10 noch etwas verallgemeinern.

Korollar 12. *Sei \mathbb{N}_0 eine polynomielle Hypergruppe mit polynomielltem Wachstum. Dann ist jede abzählbare abgeschlossene Teilmenge von D_s eine schwache Spektralmenge.*

Beweis. Sei $E = \{E_1, E_2, \dots\}$ eine abzählbare abgeschlossene Teilmenge von D_s . Aus Korollar 10 wissen wir bereits, dass alle Punkte E_i , $i \in \mathbb{N}$ schwache Spektralmengen sind und dass $\xi(E_j)$ durch $2M + 8$ beschränkt ist, wobei M die Ordnung des polynomiellen Wachstums der Hypergruppe

ist. Um Satz 11 anwenden zu können, wählen wir $D_j = \emptyset$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und überprüfen, dass die leere Menge eine Ditkin-Menge ist. Wir haben $k(\emptyset) = \ell^1(h)$ und $j(\emptyset) = \ell^1(h)$. Sei $x \in k(\emptyset)$. Für $(y_k)_k$ wählen wir die konstante Folge $(\varepsilon_0)_{k \in \mathbb{N}_0}$. Wegen $\widehat{\varepsilon}_0(x) = R_0(x) = 1$ für alle $x \in D_s$ ist ε_0 das Einselement in $\ell^1(h)$, so dass $y_k x = x \rightarrow x$ für $k \rightarrow \infty$. \square

Im nächsten Kapitel werden wir auf einige Beispiele eingehen, auf die sich die Korollare 10 und 12 anwenden lassen.

Kapitel 3

Beispiele und deren Spektralsynthese

In diesem Kapitel stellen wir mehrere polynomielle Hypergruppen auf \mathbb{N}_0 vor und gehen auf die Art ihres Wachstums ein. Wir fassen Ergebnisse von Vogel zusammen, der in [Vog87] mit Hilfe von Satz 5 und der Korollare 6 und 7 für mehrere polynomielle Hypergruppen beschreibt, welche Punktmen- gen $\{x_0\} \subseteq D_s$ Spektralmengen sind.

3.1 Jacobi-Polynome

Wir wählen zwei Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha \geq \beta > -1$ und $\alpha + \beta + 1 \geq 0$. Durch die Folgen

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2(n + \alpha + \beta + 1)(n + \alpha + 1)(\alpha + \beta + 2)}{(2n + \alpha + \beta + 2)(2n + \alpha + \beta + 1)2(\alpha + 1)}, \\ b_n &= \frac{\alpha - \beta}{2(\alpha + 1)} \left(1 - \frac{(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta)}{(2n + \alpha + \beta + 2)(2n + \alpha + \beta)} \right), \\ c_n &= \frac{2n(n + \beta)(\alpha + \beta + 2)}{(2n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta)2(\alpha + 1)} \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und

$$a_0 = \frac{2(\alpha + 1)}{\alpha + \beta + 2}, \quad b_0 = \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + 2}$$

werden wie in Abschnitt 1 beschrieben die auf $R_n^{(\alpha, \beta)}(1) = 1$ normierten Jacobi-Polynome $R_n^{(\alpha, \beta)}$ definiert. Die Jacobi-Polynome erzeugen eine Hypergruppe auf \mathbb{N}_0 mit polynomielltem Wachstum und es ist

$$D_s = [-1, 1]$$

(siehe [Las83], 3(a)). Nach Beispiel 4.1 in [Vog87] gilt:

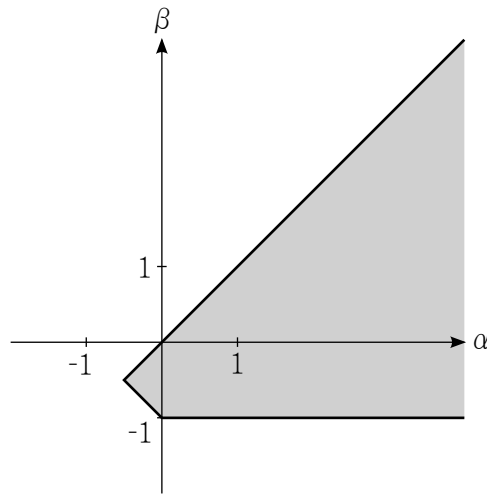


Abbildung 3.1: Die Parameter der Jacobi-Polynome.

- $\{1\}$ ist nach Korollar 7 eine Spektralmenge.
- $\{x\}$ ist für alle $x \in (-1, 1)$ keine Spektralmenge.
- $\{-1\}$ ist genau dann eine Spektralmenge, wenn $\alpha - \beta < 2$.

Wegen des polynomiellen Wachstums sind jedoch nach Korollar 10 alle Punktfolgen aus $[-1, 1]$ schwache Spektralmengen.

3.1.1 Ultrasphärische Polynome

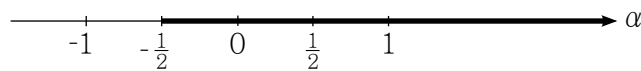


Abbildung 3.2: Der Parameter der ultrasphärischen Polynome.

Die ultrasphärischen Polynome $R_n^{(\alpha)}$ (auch Gegenbauer-Polynome) ergeben sich für $\alpha = \beta \geq -\frac{1}{2}$ als Unterklasse der Jacobi-Polynome. In diesem Fall sind $\{-1\}$ und $\{1\}$ Spektralmengen, wohingegen $\{x\}$ für alle $x \in (-1, 1)$ keine Spektralmenge ist.

Die ultrasphärischen Polynome umfassen eine Reihe bekannter Beispiele. Für $\alpha = -\frac{1}{2}$ erhalten wir die Chebyshev-Polynome erster Art, für $\alpha = 0$ die Legendre-Polynome und für $\alpha = \frac{1}{2}$ die Chebyshev-Polynome zweiter Art.

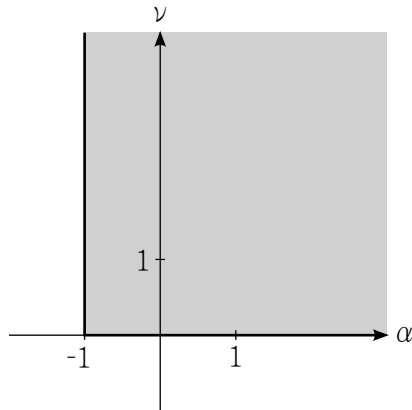


Abbildung 3.3: Die Parameter der zugehörigen ultrasphärischen Polynome.

3.2 Zugehörige ultrasphärische Polynome

Seien $\alpha, \nu \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, $\nu > 0$. Wir erhalten die zugehörigen ultrasphärischen Polynome $R_n^{(\alpha)}(x; \nu)$, indem wir bei den Koeffizientenfolgen der ultrasphärischen Polynome n durch $n + \nu$ ersetzen und auf $R_n^{(\alpha)}(1; \nu) = 1$ normieren (siehe [Las94], Abschnitt 3). Das führt auf

$$c_n = \frac{(\nu + n)(2\alpha + \nu)_{n+1} - (n + \nu + 2\alpha)(\nu)_{n+1}}{(2n + 2\nu + 2\alpha + 1)[(2\alpha + \nu)_{n+1} - (\nu)_{n+1}]}, \quad a_n = 1 - c_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $a_0 = 1$ und $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dabei bezeichnet

$$(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1), \quad (a)_0 = 1$$

das Pochhammer-Symbol. Diese Folgen definieren eine polynomielle Hypergruppe auf \mathbb{N}_0 mit $D_s = [-1, 1]$ und polynomielltem Wachstum ([Las94], Theorem 3.1). Nach Korollar 10 sind also alle $\{x\}$ mit $x \in [-1, 1]$ schwache Spektralmengeten.

3.3 q-ultrasphärische Polynome

Für $\beta, q \in \mathbb{R}$ mit $-1 < \beta < 1$, $0 < q < 1$ definieren wir zunächst die Hilfsfolgen

$$A_n = \frac{1 - q^{n+1}}{2(1 - \beta q^n)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0,$$

$$C_n = \frac{1 - \beta^2 q^{n-1}}{2(1 - \beta q^n)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

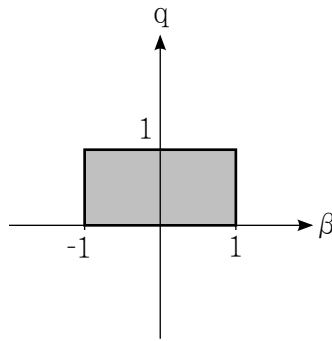


Abbildung 3.4: Die Parameter der q -ultrasphärischen Polynome.

Die rekursiv definierten Folgen

$$a_n = 1 - c_n, \quad c_n = \frac{C_n A_{n-1}}{a_{n-1}} \quad \text{für } n \geq 2,$$

$b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$,

$$a_0 = 1, \quad c_1 = C_1 A_0 \quad \text{und} \quad a_1 = 1 - c_1,$$

erzeugen dann eine Hypergruppe auf \mathbb{N}_0 (siehe Beispiel 3.3.8 in [BloHey95], und die zugehörigen Polynome $P_n^{(\beta, q)}$ sind die auf $P_n^{(\beta, q)}(1) = 1$ normierten q -ultrasphärischen Polynome. In Beispiel 4.5 in [Vog87] wird gezeigt, dass ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $h(n) = O(n^{2k_0})$. Wir haben also polynomielles Wachstum und nach Satz 4 ist

$$[-1, 1] = \text{supp } \pi = D_s = D.$$

Nach Beispiel 4.5 in [Vog87] gilt:

- $\{-1\}$ und $\{1\}$ sind Spektralmengen.
- Für alle $x \in (-1, 1)$ ist $\{x\}$ keine Spektralmengen.

Wegen des polynomiellen Wachstums sind jedoch nach Korollar 10 alle Punktmenge aus $[-1, 1]$ schwache Spektralmengen.

3.4 Verallgemeinerte Chebyshev-Polynome

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta > -1$, $\alpha \geq \beta + 1$. Sei weiter

$$a_n = \begin{cases} \frac{l + \alpha + \beta + 1}{2l + \alpha + \beta + 1}, & \text{falls } n = 2l, l \in \mathbb{N}, \\ \frac{l + \alpha + 1}{2l + \alpha + \beta + 2}, & \text{falls } n = 2l + 1, l \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

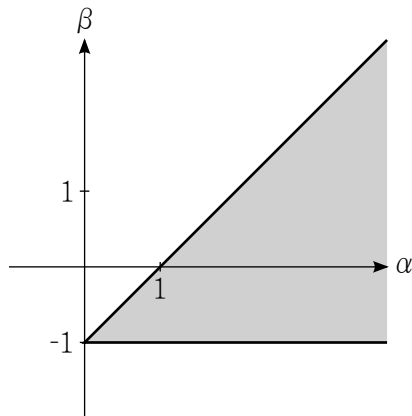


Abbildung 3.5: Die Parameter der verallgemeinerten Chebyshev-Polynome.

$a_0 = 1$, $b_n = 0$ und $c_n = 1 - a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Die Folgen (a_n) , (b_n) und (c_n) definieren die verallgemeinerten Chebyshev-Polynome $T_n^{(\alpha, \beta)}$. Sie erzeugen eine Hypergruppe auf \mathbb{N}_0 , die zugehörige Haar-Funktion h wächst polynomiell und es ist $D_s = [-1, 1]$ (siehe [Las83], 3(f)).

Die verallgemeinerten Chebyshev-Polynome lassen sich durch die Jacobi-Polynome $R_n^{(\alpha, \beta)}$ ausdrücken,

$$T_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \begin{cases} R_l^{(\alpha, \beta)}(2x^2 - 1) & \text{falls } n = 2l, l \in \mathbb{N}, \\ x R_l^{(\alpha, \beta+1)}(2x^2 - 1) & \text{falls } n = 2l + 1, l \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Nach Beispiel 4.2 in [Vog87] gilt:

- $\{-1\} = \{1 - 2a_0\}$ und $\{1\}$ sind nach Korollar 7 Spektralmengen.
- $\{0\}$ ist keine Spektralmenge.
- $\{x\}$ ist für $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ genau dann eine Spektralmenge, wenn $\alpha < \frac{1}{2}$.

Korollar 10 liefert, dass $\{x\}$ für alle $x \in [-1, 1]$ eine schwache Spektralmenge ist.

3.5 Geronimus-Polynome

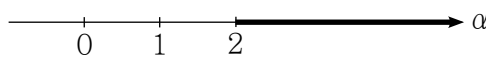


Abbildung 3.6: Der Parameter der Geronimus-Polynome.

Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 2$ definieren wir

$$a_n = \frac{a(n+1) - 2n}{2an - 4(n-1)}, \quad c_n = 1 - a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

setzen $a_0 = 1$ und $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Diese Folgen liefern die von Geronimus untersuchten Polynome M_n^α . Sie erzeugen eine Hypergruppe auf \mathbb{N}_0 , die zugehörige Haar-Funktion h wächst polynomiell und es ist $D_s = [-1, 1]$ (siehe [Las83], 3(g)). Die Untersuchung der Punktmenen in Beispiel 4.3 in [Vog87] ergibt:

- $\{-1\}$ und $\{1\}$ sind nach Korollar 7 Spektralmengen.
- Alle anderen $\{x\}$ mit $x \in (-1, 1)$ sind keine Spektralmengen.

Auch hier sind nach Korollar 10 alle Punktmenen $\{x\} \subseteq [-1, 1]$ schwache Spektralmengen.

3.6 Grinspun-Polynome

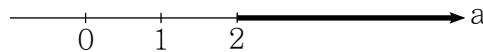


Abbildung 3.7: Der Parameter der Grinspun-Polynome.

Für ein festes $a \in \mathbb{R}$, $a > 2$ definieren wir

$$a_1 = \frac{a-1}{a}, \quad c_1 = \frac{1}{a}, \quad a_n = c_n = \frac{1}{2} \quad \text{für } n \geq 2$$

und $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter setzen wir $a_0 = 1$ und $c_0 = 0$. Die Folgen (a_n) , (b_n) und (c_n) definieren die Grinspun-Polynome G_N^a . Diese erzeugen eine Hypergruppe mit polynomielllem Wachstum und es ist $D_s = [-1, 1]$ (siehe [Las83], 3(g), (ii)). Es stellt sich mit Hilfe der Korollare 6 und 7 heraus, dass alle $\{x\} \subseteq [-1, 1]$ Spektralmengen und damit auch schwache Spektralmengen sind.

3.7 Cartier-Dunau-Polynome



Abbildung 3.8: Der Parameter der Cartier-Dunau-Polynome.

Die Cartier-Dunau-Polynome werden für $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$ durch die konstante monische Rekursionsformel

$$xR_n(x; q) = \frac{q}{q+1}R_{n+1}(x; q) + \frac{1}{q+1}R_{n-1}(x; q) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

sowie $R_0(x; q) = 1$ und $R_1(x; q) = x$ definiert. Die Koeffizientenfolgen sind also $a_0 = 1$, $b_0 = 0$,

$$a_n = \frac{q}{q+1}, \quad b_n = 0 \quad \text{und} \quad c_n = \frac{1}{q+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für $q \in \mathbb{N}$ hängen diese Polynome mit homogenen Bäumen vom Grad q zusammen. Sie erzeugen eine Hypergruppe auf \mathbb{N}_0 . Das folgt für $\alpha = \frac{q+1}{q}$ und $\gamma = \frac{q}{(q+1)^2}$ aus Theorem 6.1 in [Las94]. Dieses Theorem besagt außerdem, dass $D_s = [-1, 1]$ ist,

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{2\sqrt{q}}{q+1} \right| + \left| z + \frac{2\sqrt{q}}{q+1} \right| \leq 2 \right\}, \quad \text{falls } q > 1$$

und $D = [-1, 1]$, falls $q = 1$. Eine kurze Rechnung zeigt, dass D eine Ellipse mit einer Hauptachse der Länge 2 und einer Nebenachse der Länge $2\frac{q-1}{q+1}$ ist.

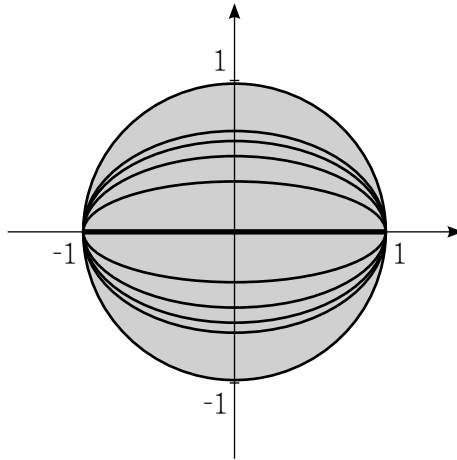


Abbildung 3.9: D_s und D von innen nach außen für $q = 2, 3, 4, 5, 100$.

Für $q = 1$ sind die Cartier-Dunau-Polynome gerade die Chebyshev-Polynome erster Art. Da sie ein Spezialfall der ultrasphärischen Polynome sind, wächst die von ihnen erzeugte Hypergruppe polynomiell (siehe Abschnitt 3.1.1).

Für $q > 1$ stimmen D und D_s hingegen nicht überein. Daraus folgt mit Satz 4, dass in diesem Fall die von den Cartier-Dunau-Polynomen erzeugte Hypergruppe exponentiell wächst.

So ist Korollar 6 über die Charakterisierung von Spektralmenge über die Folge der ersten Ableitungen $(R'_n(x; q))_{n \in \mathbb{N}_0}$ nicht anwendbar. Auch Satz 5, der die Folge der abgeschlossenen Ideale mit Hülle $\{x\} \subseteq D$ beschreibt, kann hier nicht zu Hilfe genommen werden. Wir zeigen jedoch, dass $\{0\}$ keine Spektralmenge ist.

Lemma 13. *Es gibt zwei verschiedene abgeschlossene Ideale in $\ell^1(h)$, deren Hülle $\{0\}$ ist, das heißt $\{0\}$ ist keine Spektralmenge.*

Beweis. Diese Ideale sind $I_0 = k(\{0\})$ und

$$I_1 = \{f \in \ell^1(h) : \hat{f}'(0) = \hat{f}(0) = 0\}.$$

Dass I_0 und I_1 Ideale sind, lässt sich leicht nachrechnen. Für die Abgeschlossenheit schreiben wir

$$I_0 = \ker \psi_0, \quad I_1 = \ker \psi_1 \cap \ker \psi_0$$

mit $\psi_0(f) = \hat{f}(0)$ und $\psi_1(f) = \hat{f}'(0)$ für alle $f \in \ell^1(h)$. Die Funktionale ψ_0 und ψ_1 sind stetig, so dass I_0 und I_1 als Kern stetiger Abbildungen abgeschlossen sind. Die Stetigkeit sieht man wie folgt. Wir zeigen zunächst durch Induktion, dass die Polynome $R_n(x) = R_n(x; q)$ für gerades n gerade und für ungerades n ungerade sind. Für R_0 und R_1 ist das offensichtlich der Fall. Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$ und sei R_{2n} gerade und R_{2n+1} ungerade. Mit der Rekursionsformel gilt dann

$$\begin{aligned} R_{2n+2}(-x) &= \frac{q+1}{q}(-x)R_{2n+1}(-x) - \frac{1}{q}R_{2n}(-x) \\ &= \frac{q+1}{q}xR_{2n+1}(x) - \frac{1}{q}R_{2n}(x) = R_{2n+2}(x), \\ R_{2n+3}(-x) &= \frac{q+1}{q}(-x)R_{2n+2}(-x) - \frac{1}{q}R_{2n+1}(-x) \\ &= -\left(\frac{q+1}{q}xR_{2n+2}(x) - \frac{1}{q}R_{2n+1}(x)\right) = -R_{2n+3}(x). \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie haben wir $R'_{2k}(0) = 0$ und $R_{2k+1}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Für ungerades n vereinfacht sich die Rekursionsformel damit zu $R_{n+1}(0) = -\frac{1}{q}R_{n-1}(0)$ und induktiv folgt $R_{2k}(0) = \frac{(-1)^k}{q^k}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Ableiten der Rekursionsformel führt auf

$$R_n(0) = \frac{q}{q+1}R'_{n+1}(0) + \frac{1}{q+1}R'_{n-1}(0).$$

Mittels vollständiger Induktion nach k folgt daraus

$$R'_{2k+1}(0) = (-1)^k \frac{(k+1)q + k}{q^{k+1}} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0,$$

denn mit $R'_1(0) = 1$ und der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} R'_{2k+3}(0) &= \frac{q+1}{q} R_{2k+2}(0) - \frac{1}{q} R'_{2k+1}(0) \\ &= \frac{q+1}{q} \frac{(-1)^{k+1}}{q^{k+1}} - \frac{1}{q} (-1)^k \frac{(k+1)q+k}{q^{k+1}} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{(k+2)q+(k+1)}{q^{k+1}} \end{aligned}$$

Damit ist $(R'_n(0))_{n \in \mathbb{N}_0}$ für $q > 1$ beschränkt, denn

$$|R'_{2k+1}(0)| = \frac{(k+1)q+k}{q^{k+1}} = \frac{k}{q^k} + \frac{1}{q^k} + \frac{k}{q^{k+1}} \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Mit $M = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} |R'_n(0)|$ gilt für alle $f \in \ell^1(h)$

$$\begin{aligned} |\psi_1(f)| &= \left| \widehat{f}'(0) \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} f(k) R'_k(0) h(k) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} M |f(k)| h(k) = M \|f\|_1, \end{aligned}$$

das heißt ψ_1 ist stetig. ψ_0 ist wegen $0 \in D$ ebenfalls stetig.

I_0 und I_1 sind tatsächlich verschieden, denn $\varepsilon_1 \in I_0$, aber $\varepsilon_1 \notin I_1$. Wir zeigen, dass auch $h(I_0) = h(I_1) = \{0\}$ gilt. Wegen $I_1 \subseteq I_0$ gilt

$$\{0\} \subseteq h(k(\{0\})) = h(I_0) \subseteq h(I_1).$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $h(I_1) \subseteq \{0\}$. Dazu wählen wir

$$g = \frac{1}{q} \frac{\varepsilon_0}{h(0)} + \frac{\varepsilon_2}{h(2)}.$$

Dann ist $g \in I_1$, denn

$$\widehat{g}'(0) = \frac{1}{q} R'_0(0) + R'_2(0) = 0,$$

und wegen

$$\begin{aligned} \widehat{g}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k) R_k(x) h(k) = g(0) R_0(x) h(0) + g(2) R_2(x) h(2) \\ &= \frac{1}{q} + \frac{4}{q+1} x^2 - \frac{1}{q} = \frac{4}{q+1} x^2 \quad \text{für alle } x \in D. \end{aligned}$$

ist auch $\widehat{g}(0) = 0$. Für ein beliebiges $x \in h(I_1) = \{x \in D : \widehat{f}(x) = 0 \forall f \in I_1\}$ gilt also insbesondere $g(x) = 0$, und daraus folgt bereits $x = 0$. \square

Es ist weder bekannt, ob $\{0\}$ eine schwache Spektralmenge ist, noch ob die zugehörige Hypergruppe regulär und halbeinfach ist. Es ist also nicht klar, ob die Definition schwacher Spektralmenge wie in Abschnitt 2.1 hier überhaupt sinnvoll ist.

Literaturverzeichnis

- [Ask75] Richard Askey: *Orthogonal Polynomials and Special Functions*. SIAM, Philadelphia, 1975.
- [Atz70] Aharon Atzmon: *Spectral synthesis in regular Banach algebras*. Israel J. Math. **8** (1970), 197–212.
- [BloHey95] W. R. Bloom und H. Heyer: *Harmonic Analysis and Probability Measures on Hypergroups*. de Gruyter, Berlin, 1995.
- [Chi78] T. S. Chihara: *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach, 1978.
- [Dix60] Jacques Dixmier: *Opérateurs de rang fini dans les représentations unitaires*. Publ. Math., Inst. Hautes Études Sci. **6** (1960), 305–317.
- [Hel52] Henry Helson: *Spectral synthesis of bounded functions*. Ark. Mat. **1** (1952), 497–502.
- [Her58] C. S. Herz: *Spectral synthesis for the circle*. Ann. Math. **68** (1958), 709–712.
- [Kan04] Eberhard Kaniuth: *Weak spectral synthesis for the projective tensor product of commutative Banach algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 2959–2967.
- [Kan07] Eberhard Kaniuth: *Weak spectral synthesis in commutative Banach algebras*. J. Funct. Anal. **254** (2007), 987–1002, doi:10.1016/j.jfa.2007.10.002
- [Kan09] Eberhard Kaniuth: *A Course in Commutative Banach Algebras*. Springer, 2009.
- [Kan10a] Eberhard Kaniuth: *Weak spectral synthesis in commutative Banach algebras. II*. J. Funct. Anal. **259** (2010) 524–544, doi:10.1016/j.jfa.2010.04.011
- [Kan10b] Eberhard Kaniuth: *Weak spectral synthesis in Fourier algebras of coset spaces*. Studia Mathematica **197** (2010), 229–246, doi:10.4064/sm197-3-2

- [KanUel] Eberhard Kaniuth und Ali Ülger: *Weak spectral synthesis in commutative Banach algebras. III*. Preprint.
- [Kap49] Irving Kaplansky: *Primary ideals in group algebras*. Proc. Nat. Acad. Sciences USA **35** (1949), 133–136.
- [KhaNik91] Viktor Petrovich Khavin und Nikolaij Kapitonovich Nikol'skij: *Commutative Harmonic Analysis I*. Springer, 1991.
- [Las83] Rupert Lasser: *Orthogonal polynomials and hypergroups*. Rend. Mat. **3** (1983), 185–209.
- [Las94] Rupert Lasser: *Orthogonal polynomials and hypergroups II - The symmetric case*. Trans. Amer. Math. Soc. **341**, (1994), 749–770.
- [Las05] Rupert Lasser: *Inzell Lectures on Orthogonal Polynomials*. In: Advances in the Theory of Special Functions and Orthogonal Polynomials, Eds. W. zu Castell, F. Filbir, B. Forster, Nova Science Publishers, 55–102 (2005).
- [Mal59] Paul Malliavin: *Impossibilité de la synthèse spectral sur les groupes abéliens non compacts*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **2** (1959), 61–68.
- [Mir60] Hazleton Mirkil: *A counter example to discrete spectral synthesis*. Compos. Math. **14** (1960), 269–273.
- [MurPar99] Thettath K. Muraleedharan und Krishnan Parthasarathy: *Difference spectrum and spectral synthesis*. Tohoku Math. J. **51** (1999), 65–73.
- [ParVar91] K. Parthasarathy und S. Varma: *On weak spectral synthesis*. Bull. Austral. Math. Soc. **43** (1991), 279–282.
- [Sch48] Laurent Schwartz: *Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes noncompacts*. C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A **227** (1984), 424–426.
- [Var66] Nikolaos Th. Varopoulos: *Spectral synthesis on spheres*. Proc. Cambridge Philos. Soc. **62** (1966), 379–387.
- [Var68] Nikolaos Th. Varopoulos: *Tensor algebras and harmonic analysis*. Acta Math. **119** (1968), 51–112.
- [Vog87] Matthias Vogel: *Spectral Synthesis on Algebras of Orthogonal Polynomial Series*. Math. Z. **194** (1987), 99–116.
- [War87] C. R. Warner: *Weak spectral synthesis*. Proc. Amer. Soc. **99** (1987), 244–248.