

Übung Numerik und Optimierung großer nichtlinearer Systeme

Blatt 1

Aufgabe 1

- (a) Sei $X = Y = C[a, b]$ mit Norm $\|\cdot\|_\infty$ und sei $T : X \rightarrow X$ ein linearer Integraloperator, der wie folgt definiert ist,

$$(Tu)(x) = \int_a^b K(x, s)u(s)ds,$$

mit Kern $K(x, s)$, der auf $[a, b] \times [a, b]$ stetig ist.

Zeigen Sie, dass T Fréchet-differenzierbar ist und bestimmen Sie die Fréchet-Ableitung.

- (b) Sei wieder $X = Y = C[a, b]$ mit Norm $\|\cdot\|_\infty$. Nun sei $T : X \rightarrow X$ ein nichtlinearer Integraloperator, der wie folgt definiert ist,

$$(Tu)(x) = u(x) \int_a^b K(x, s)u(s)ds,$$

mit Kern $K(x, s)$, der auf $[a, b] \times [a, b]$ stetig ist.

Zeigen Sie auch hier, dass T Fréchet-differenzierbar ist und bestimmen Sie die Fréchet-Ableitung.

Aufgabe 2

Man zeige: Der Sinus-Operator $F : L^p(0, 1) \rightarrow L^q(0, 1)$, $F(x(t)) := \sin(x(t))$ für alle $x \in L^p(0, 1)$ ist Fréchet-differenzierbar für $1 \leq q < p \leq \infty$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass der Mittelwertsatz in \mathbb{R}^1 , d.h.

$$f \in C^1(a, b), x, y \in (a, b), \Rightarrow \quad \exists t \in (0, 1) \text{ mit } f(y) - f(x) = f'(x + t(y - x))(y - x),$$

schon in \mathbb{R}^2 nicht mehr korrekt ist. Benutzen Sie dazu als Gegenbeispiel die Funktion $f(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2^3)^\top$ an den Stellen $y = (1, 1)^\top$ und $x = (0, 0)^\top$.

Aufgabe 4

- (a) Seien $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ Normen auf \mathbb{R}^n . Zeigen Sie, dass Konstanten $\underline{c}, \bar{c} > 0$ existieren, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\underline{c}\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \bar{c}\|x\|_a, \tag{1}$$

d.h. alle Normen auf \mathbb{R}^n sind äquivalent.

- (b) Berechnen Sie für die Euklidische Norm und die Maximumnorm die optimalen Konstanten \underline{c} und \bar{c} aus (1).

- (c) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Äquivalenz der Normen in unendlich-dimensionalen Räumen im Allgemeinen nicht gilt.

Homepage der Veranstaltung ist:

http://www.uni-due/mathematik/agroesch//lv_assmann_SS14.shtml

Termine und Räume:

		Zeit		Raum	
VL	Di	10-12	WSC-N-U-4.05	Arnd Rösch	
	Do	10-12	WSC-N-U-4.05		
Ü	Mi	10-12	WSC-N-U-4.05	Ute Aßmann	