SS 2014
Prof. Arnd Rösch

Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik

Übung Numerik und Optimierung großer nichtlinearer Systeme

Blatt 4

Aufgabe 1
Sei A eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix. Man beweise die Äquivalenz der beiden folgenden Eigenschaften.

$$x^\top Ax > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0,$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x^\top Ax \geq \alpha \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha > 0.$$

Aufgabe 2

(a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbar und $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex und nichtleer. Man zeige:
$$f \text{ konvex auf } X \Leftrightarrow \forall x, y \in X: \; f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x).$$
Ferner ist f genau dann strikt konvex, wenn die obige Ungleichung für $x \neq y$ strikt erfüllt ist.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, konvex und nichtleer. Man zeige:
$$f \text{ konvex auf } X \Leftrightarrow \forall x \in X: \; f''(x) \text{ positiv definit }.$$
Ferner: Ist die Hesse-Matrix $f''(x)$ sogar positiv definit auf X, so ist f strikt konvex.

Aufgabe 3
Gegeben sei das Optimierungsproblem $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$. Sei $\tilde{x}$ ein Punkt, der die notwendige Bedingung 1. Ordnung und die hinreichende Bedingung 2. Ordnung erfüllt, d.h.

$$f'(\tilde{x}) = \nabla f(\tilde{x})^\top = 0$$

und
$$d^\top f''(\tilde{x}) d \geq \alpha \|d\|^2 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gibt es in einer Umgebung von $\tilde{x}$ keine weiteren lokalen Minima.

Aufgabe 4
Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, konvexe Menge, $f, g : C \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen. Beweisen Sie, dass

(a) $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ auf C konvex ist.

(b) für $x, y \in C, \lambda \notin [0, 1]$, $\lambda x + (1 - \lambda) y \in C$ gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv_assmann_ss14.php`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	10-12	WSC-N-U-4.05	Arnd Rösch
	Do	10-12	WSC-N-U-4.05	
Ü	Mi	10-12	WSC-N-U-4.05	Ute Aßmann