SS 2014 | Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch | Fakultät für Mathematik

Übung Numerik und Optimierung großer nichtlinearer Systeme

Blatt 5

Aufgabe 1
Gegeben sei eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung der nichtlinearen Gleichung $F(x) = 0$. Eine Nullstelle von F ist auch lokale Lösung des Optimierungsproblems

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2}\|F(x)\|_2^2.$$

Umgekehrt ist eine lokale Lösung $\tilde{x}$ des Optimierungsproblems Nullstelle von F.
Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, für den $F'(x)$ invertierbar ist und $F(x) \neq 0$ ist. Zeigen Sie, dass dann die Newtonrichtung der nichtlinearen Gleichung eine Abstiegsrichtung für f in x ist.

Aufgabe 2
Gegeben sei eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ so, dass es ein $L > 0$ gibt mit

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\| \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{1+L}$. Für $\varepsilon \leq \sigma \leq \frac{1-\varepsilon}{L}$ betrachten wir das Gradientenverfahren mit konstanter Schrittweite $\sigma_k = \sigma$. Zeigen Sie:

(a) Für die durch den Algorithmus erzeugte Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \geq \varepsilon^2\|\nabla f(x^k)\|^2.$$

(b) Das Verfahren bricht entweder mit einem stationären Punkt ab oder erzeugt eine unendliche Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, deren Häufungspunkte stationäre Punkte von f sind.

Aufgabe 3
Zeigen Sie für die sogenannte Fixpunkt-Homotopie

$$H(x,t) := tF(x) + (1-t)(x - x^0),$$

dass selbst bei einfachen Beispielen der Fall auftreten kann, dass der Homotopie-Pfad nie sein Ziel $t = 1$ erreicht. Überprüfen Sie dieses Phänomen anhand des eindimensionalen Beispiels

$$F(x) := x^2 - 1 \text{ mit } x^0 := -2.$$

(Hinweis: Für $t \in (\frac{1}{3}(5-2\sqrt{3}), \frac{1}{3}(5+2\sqrt{3})) \approx (0.118, 0.651)$ besitzt die Gleichung $H(x,t) = 0$ keine Lösung!)

Aufgabe 4
Benutzen Sie wieder die Fixpunkt-Homotopie aus Aufgabe 3 um anhand des folgenden eindimensionalen Beispiels

$$F(x) := x^3 - x \text{ mit } x^0 := 0$$

den Fall einer auftretenden Bikurkation zu untersuchen. Bestimmen Sie die Pfade, die sich in Abhängigkeit von t ergeben.

Homepage der Veranstaltung ist:

http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv_assmann_ss14.php

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	10-12	WSC-N-U-4.05	Arnd Rösch
	Do	10-12	WSC-N-U-4.05	
Ü	Mi	10-12	WSC-N-U-4.05	Ute Aßmann