SS 2014 Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch Fakultät für Mathematik

Übung Numerik und Optimierung großer nichtlinearer Systeme

Blatt 10

Aufgabe 1
Sei U ein Hilbertraum und U_h ein endlich-dimensionaler Teilraum von U. Der orthogonale Projektionsoperator Π_h von U auf den Unterraum U_h wird definiert durch

$$(u, u_h)_U = (\Pi_h u, u_h)_U \quad \forall u_h \in U_h. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass für den so definierten Projektionsoperator Π_h gilt:

- Das Supremum von $(v_h, u)_U$ über alle $v_h \in U_h$ mit $\|v_h\|_U = 1$ wird in $v_h = \dfrac{\Pi_h u}{\|\Pi_h u\|_U}$ angenommen.

Aufgabe 2
Sei U ein Hilbertraum und u_1, $u_2 \in U$ gegeben mit $u_1 \neq u_2$. Weiter sei U_h ein endlich-dimensionaler Teilraum von U. Wir betrachten das Minimierungsproblem

$$\min f(u) = \frac{1}{2}\|u - u_1\|_U^2 \|u - u_2\|_U^2. \tag{2}$$

Zeigen Sie,

(a) dass ein $\tilde{u}_h$ existiert, das unter bestimmten Bedingungen die folgenden Eigenschaften hat,

- $f'(\tilde{u}_h) = 0$
- $f''(\tilde{u}_h)(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_U^2 \qquad \forall v_h \in U_h$ mit $\alpha > 0$.

(b) dass die Hessematrix $f''(\tilde{u}_h)$ nicht auf ganz U positiv definit ist.

(c) dass $\tilde{u}_h$ nicht in der Nähe der globalen Minima u_1 bzw. u_2 liegt.

Aufgabe 3
Wir betrachten weiterhin das Problem (2). Wir wählen hier $U := L^2(0, 1)$. Wir unterteilen das Interval $(0, 1)$ in N Teilintervalle I_j der Länge $h := 1/N$, $j = 1, \ldots, N$. Der endlichdimensionale Teilraum U_h sei der Raum der stückweise stetigen Funktionen auf den Intervallen I_j. Π_h sei ein gemäß (1) definierter Projektionsoperator von $L^2(0, 1)$ nach U_h. Zeigen Sie, dass für kleines $\varepsilon > 0$, für $u_1 = x^{-1/2+\varepsilon}$ gilt

$$\|u_1 - \Pi_h u_1\|_U \geq g(\varepsilon) h^\varepsilon, \quad \text{für } g(\varepsilon) = \frac{|2\varepsilon - 1|}{\sqrt{2\varepsilon}|2\varepsilon + 1|}.$$

Dazu gehen Sie in drei Schritten vor:

- Man definiere eine Funktion $w = \begin{cases} w_0, & \text{falls } x \in (0,h), \\ u_1(x), & \text{falls } x \in [h,1), \end{cases}$ mit $w_0 \in \mathbb{R}$ und zeige, dass gilt $\|u_1 - \Pi_h u_1\|_U \geq \|u_1 - w\|_U$.
- Man bestimme $w_0 \in \mathbb{R}$, welches $\|u_1 - w\|_U^2$ minimiert.
- Man zeige, dass mit diesem w_0 gilt

$$\int_0^h (u_1(x) - w_0)^2 dx = h^{2s} \frac{(\varepsilon - 1/2)^2}{2\varepsilon(\varepsilon + 1/2)^2}.$$

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv_assmann_ss14.php`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	10-12	WSC-N-U-4.05	Arnd Rösch
	Do	10-12	WSC-N-U-4.05	
Ü	Mi	10-12	WSC-N-U-4.05	Ute Aßmann