Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. R. Simon

SS 2014

Übungen zu Mehrgitterverfahren
Blatt 1

Aufgabe 1

Zu einer beliebigen Vektornorm $\|\cdot\|_V$ sei die Matrixnorm einer $n \times n$-Matrix definiert durch

$$\|A\| := \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V}.$$

Man zeige:

1. Die Matrixnorm $\|\cdot\|$ ist konsistent, d.h.

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

2. Die Matrixnorm $\|\cdot\|$ ist mit der Vektornorm $\|\cdot\|_V$ verträglich, d.h.

$$\|Ax\|_V \leq \|A\|\|x\|_V.$$

Aufgabe 2

Das symmetrische Gauß-Seidel-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystem $Au = f$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}(L+D)u^{(i+\frac{1}{2})} + Uu^{(i)} &= f\\ (U+D)u^{(i+1)} + Lu^{(i+\frac{1}{2})} &= f.\end{aligned}$$

Dabei ist $A = L + D + U$ zerlegt in die untere Dreiecksmatrix L, Diagonalmatrix D und die obere Dreiecksmatrix U.
Man zeige:

1. Das symmetrische Gauß-Seidel-Verfahren ist ein iteratives Verfahren der Form

$$W(u^{(j+1)} - u^{(j)}) = f - Au^{(j)} \quad \text{mit} \quad W = (L+D)D^{-1}(D+U).$$

2. Falls A symmetrisch ist, so ist auch das obige Gauß-Seidel-Verfahren symmetrisch, d.h. $W = W^T$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3

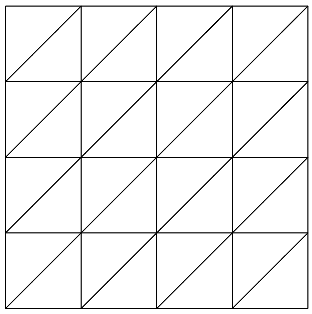
Gegeben sei die zweidimensionale Poisson-Gleichung:

$$-\Delta y + y = f, \quad \text{in } \Omega = (0,1)^2, \qquad y = 0 \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega.$$

Wie lautet das zugehörige Variationsproblem im $H_0^1(\Omega)$?

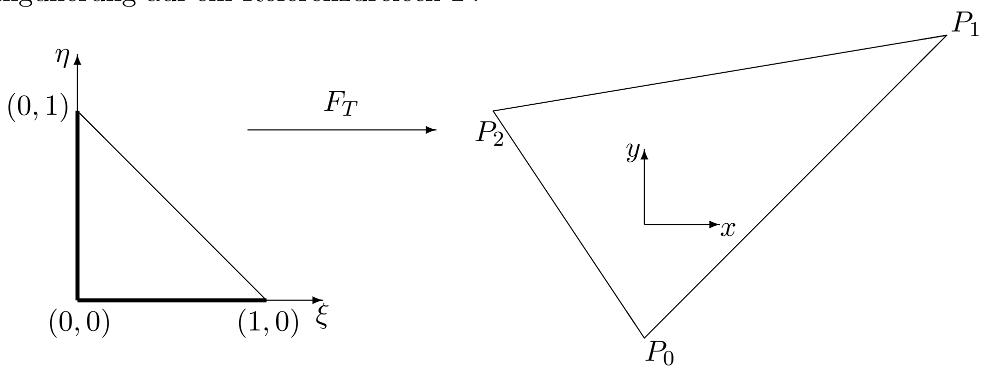
Aufgabe 4

Wir wollen nun eine Finite-Elemente-Diskretisierung für das Problem von Aufgabe 3 herleiten. Dazu zerlegen wir das Einheitsquadrat in Dreiecke (siehe Abbildung):



Als Ansatzraum wählen wir wieder stückweise lineare Funktionen, d.h. als Basis $\{\psi_i\}$ wieder die Hutfunktionen mit $\psi_i(x_j) = \delta_{ij}$.

1. Ein wesentliches Grundprinzip ist die Transformation eines beliebigen Dreiecks T aus der Triangulierung auf ein Referenzdreieck $\hat{T}$.



   Die Punkte P_i haben die Koordinaten (x_i, y_i). Bestimmen Sie die Abbildung

$$F_T \colon \hat{T} \to T.$$

2. Geben Sie die drei Basisfunktionen auf dem Einheitsdreieck an.

3. Bestimmen Sie die Struktur der Steifigkeitsmatrix K und der Massenmatrix M für die spezielle Triangulierung, wobei

$$M_{ij} = \int_\Omega \psi_i \psi_j \, dx, \quad K_{ij} = \int_\Omega \nabla\psi_i \cdot \nabla\psi_j \, dx.$$

Besprechung: Dienstag, 22.04.2014