Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. R. Simon SS 2014

Übungen zu Mehrgitterverfahren
Blatt 3

Aufgabe 1

Wir ändern den Beginn des vollen Multigridzyklus der Vorlesung wie folgt ab:

$$\tilde{u}_0 \approx A_0^{-1} f_0 \qquad (\text{statt } \tilde{u}_0 = A_0^{-1} f_0).$$

Man zeige:

1. Ist $\|\tilde{u}_0 - u_0\| \leq C_3(\zeta, i) C_1 h_0^\eta$, so gilt wie in der Vorlesung

$$\|\tilde{u}_k - u_k\| \leq C_3(\zeta, i) C_1 h_k^\eta, \quad (0 \leq k \leq l).$$

2. Gilt

$$\|\tilde{u}_0 - u_0\| = C_3(\zeta, i) C_1 h_0^\eta + \delta, \quad \delta > 0,$$

   so gilt

$$\|\tilde{u}_k - u_k\| \leq C_3(\zeta, i) C_1 h_k^\eta + (C_{2,0} \zeta^i)^k \delta, \quad (0 \leq k \leq l),$$

   mit $C_{2,0} = \max_{1 \leq k \leq l} \|\tilde{p}_{k-1}^k\|$ wie aus der Vorlesung.

Aufgabe 2

Sei $0 \leq B = B^T \leq I$. Man zeige

$$\|B^\alpha (I - B)^\beta\| \leq \left(\eta_0\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right)^\alpha, \quad \alpha > 0,\ \beta \geq 0.$$

Aufgabe 3

Zeige für $\eta_0(\nu) = \frac{\nu^\nu}{(\nu+1)^{\nu+1}}$ die Abschätzung:

$$\eta_0(\nu) \leq \frac{\eta_0(\mu)(\mu + c)}{\nu + c}, \quad \nu \geq \mu \geq 0,\ c \geq \frac{1}{2}.$$

Tipp: Zeige, dass die Funktion

$$\varphi(\nu) := (\nu + c)\eta_0(\nu), \quad c \geq \frac{1}{2},\ \nu \geq 0$$

eine fallende Funktion ist.

Bitte wenden!

Programmieraufgabe

Programmieren Sie das Zweigitterverfahren zur Lösung unseres 2-dimensionalen Modellproblems. Als Glätter verwenden Sie die Funktionen aus der letzten Programmieraufgabe (gedämpftes Jacobi-Verfahren und Gauss-Seidel-Verfahren). Bestimmen Sie die benötigte Iterationszahl, um den Anfangsfehler um einen festen Faktor ε zu reduzieren. Testen Sie dabei verschiedene Dämpfungsparameter und variieren Sie auch die Zahl der Glättungsschritte. Geben Sie jeweils die durchschnittliche Konvergenzrate der Verfahren an.

Besprechung: Mittwoch, 21.05.2014