Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. R. Simon

SS 2014

Übungen zu Mehrgitterverfahren
Blatt 4

Aufgabe 1

Die Matrix $A_l = A_l^T$ habe das Spektrum $\sigma(A) \subset [-\alpha_l, \beta_l]$, $0 \le \alpha_l \le \beta_l$ und $\lim_{l\to\infty} \frac{\alpha_l}{\beta_l} = 0$. Das Richardson-Verfahren sei gegeben durch die Iterationsmatrix:

$$S_l = I - \Theta A_l, \quad \Theta_l = \frac{1}{\varrho(A_l)} = \frac{1}{\|A_l\|_2}.$$

Man zeige:

1. Das Richardson-Verfahren divergiert.
2. Das Richardson-Verfahren besitzt die (allgemeine) Glättungseigenschaft.

Aufgabe 2

Für die Iterationsmatrix $S_l = I - W_l^{-1} A_l$ der symmetrischen Iteration $\mathcal{S}_l$ gelte

$$\gamma W_l \le A_l \le \Gamma W_l, \quad 0 \le \gamma \le \Gamma < 2.$$

Man zeige:

$$\|A_l S_l^\nu\| \le \|W_l\| \max\{\eta_0(\nu), \Gamma|1-\Gamma|^\nu\}.$$

Tipp: Betrachte $Y := W_l^{-1/2} R_l W_l^{-1/2}$ mit $A_l = W_l - R_l$.

Aufgabe 3

Man zeige: Ist $A_l = A_l^T > 0$ schwach diagonaldominant und D_l die Diagonale von A_l, dann gilt

$$0 < \Theta A_l \le D_l, \qquad \forall 0 < \Theta \le 1/2.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4

Gegeben seien zwei Hilberträume U, V mit $V \subset U = U' \subset V'$. Sei $a\colon V \times V \to \mathbb{K}$ eine stetige Bilinearform, d.h.

$$|a(u,v)| \leq C_a \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V.$$

Weiter gelte die inverse Abschätzung

$$\|v_l\|_V \leq C_{\text{inv}} h_l^{-m} \|v_l\|_U,$$

und die Verträglichkeit der Normen

$$\underline{C}_P^{-1} \|x_l\|_l \leq \|P_l x_l\|_U \leq \bar{C}_P \|x_l\|_l.$$

Man zeige, dass dann für die zugehörige Matrix A_l des diskretisierten Problems gilt:

$$\|A_l\| \leq C_K h_l^{-2m}, \quad \text{mit } C_K := C_a (C_{\text{inv}} \bar{C}_P)^2.$$

Programmieraufgabe

Implementieren Sie das Multigridverfahren für unser Modellproblem.

Besprechung: Mittwoch, 12.06.2014