WS 2016/17 Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch Fakultät für Mathematik

Nichtlineare Optimierung

Blatt 1

Aufgabe 1
Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^3 - 12y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Wo liegen lokale Minima/Maxima vor?

Aufgabe 2
Untersuchen Sie die Aufgabe

$$f(x,y) = x^2 + xy^2 + y^2, \qquad x^2 + y^2 = 1$$

auf bedingte Extrema, indem Sie die Nebenbedingung nach y auflösen. Bestimmen Sie nun die stationären Punkte mit Hilfe der Lagrangefunktion. Wieso erhalten Sie auf diese Art weitere Lösungen?

Aufgabe 3
Das Standardargument, um die Existenz einer Lösung für ein Optimierungsproblem zu sichern, ist der Satz von Weierstraß. Gegeben seien Aufgaben $\min\limits_{x \in \mathcal{F}} f(x)$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(i) $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } x = 0 \\ x & \text{sonst} \end{cases}$, $\mathcal{F} := \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$;

(ii) $f(x) := x$, $\mathcal{F} := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$;

(iii) $f(x) := e^{-x}$, $\mathcal{F} = \mathbb{R}$;

(iv) $f(x) := \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 3 & x \ge 1 \end{cases}$, $\mathcal{F} := \{x \in \mathbb{R} : x > -1\}$.

Welche der drei Voraussetzungen (f stetig, $\mathcal{F}$ abgeschlossen, beschränkt) sind verletzt? Welche der Aufgaben besitzt dennoch eine Lösung?

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f(x) = \infty$ und beliebiges $w \in \mathbb{R}^n$ die Niveaumenge $\mathcal{N}(f, f(w))$ kompakt ist.

Aufgabe 5
Beweisen Sie mit Hilfe der Definition, dass folgende Mengen konvex sind:

(a) jedes Polytop $P := \{x \in \mathbb{R}^n : \, Ax \le b\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$;

(b) die Einheitskugel $E := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$.

Aufgabe 6
Zeigen Sie: Ist $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit, so ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^T Hx + b^T x$ streng konvex.

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_WS1617.php`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Mo	10-12	WSC-N-U-4.03	Arnd Rösch
	Mi	10-12	WSC-S-U-4.02	
Üb	Do	14-16	WSC-S-U-4.02	Hendrik Feldhordt