WS 2016/17 Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch Fakultät für Mathematik

Nichtlineare Optimierung

Blatt 7

Aufgabe 1
Beim BFGS-Verfahren seien als Schrittweiten die Powell- bzw. die exakte Schrittweite gewählt. Zeigen Sie, dass dann die Bedingung $(y^{(k)})^\top s^{(k)} > 0$ erfüllt ist.

Aufgabe 2
Wir betrachten wieder das quadratische Optimierungsproblem

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T H x + b^T x + c \tag{1}$$

mit symmetrischer und positiv definiter Matrix $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Sei x^* das Minimum von f. Wir definieren die Energienorm als $\|x\|_H := (x^T H x)^{1/2}$. Zeigen Sie:

(a) $\|\cdot\|_H$ ist tatsächlich eine Norm.

(b) Es gilt $f(x) = \frac{1}{2}\|x - x^*\|_H^2 + f(x^*)$ bzw. $\|x - x^*\|_H^2 = 2(f(x) - f(x^*))$.

(c) Für $E(x) := \frac{1}{2}\|x - x^*\|_H^2$ gilt: $\nabla E(x) = \nabla f(x)$.

(d) Man kann also an Stelle von f auch die Funktion $E(x)$ betrachten. Was misst E?

Aufgabe 3
Wir setzen die Untersuchung des Gradientenabstiegsverfahrens mit exakter Schrittweite für das quadratische Optimierungsproblem (1) fort.
Es sei $E(x) := \frac{1}{2}\|x - x^*\|_H^2$ wie in Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, dass für die Iterierten gilt:

$$E(x^{k+1}) \leq \left(\frac{M - m}{M + m} \right)^2 E(x^k) = \left(\frac{\frac{M}{m} - 1}{\frac{M}{m} + 1} \right)^2 E(x^k), \tag{2}$$

wobei M bzw. m den größten bzw. kleinsten Eigenwert von H bezeichnen. Das Verhältnis $\kappa = \frac{M}{m}$ ist die Konditionszahl der Matrix H.
Hinweise:

- Schreiben Sie $E(x^k)$ in der Form $\frac{1}{2}(g^k)^T H^{-1} g^k$.
- Benutzen Sie die *Ungleichung von Kantorovich*:

$$\frac{\|x\|_2^4}{\|x\|_H^2 \|x\|_{H^{-1}}^2} \geq \frac{4Mm}{(M + m)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ungleichung (2) eine Konstante C so, dass sich der Fehler $\|x^{k+1} - x^*\|_2$ abschätzen lässt als

$$\|x^{k+1} - x^*\|_2 \leq C \|x^k - x^*\|_2.$$

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_WS1617.php`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Mo	10-12	WSC-N-U-4.03	Arnd Rösch
	Mi	10-12	WSC-S-U-4.02	
Üb	Do	14-16	WSC-S-U-4.02	Hendrik Feldhordt