WS 2016/17 Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch Fakultät für Mathematik

Nichtlineare Optimierung

Blatt 8

Aufgabe 1

Wir betrachten ein Anwendungsbeispiel: Ein gegebenes Werkstück soll durch Erwärmung ein bestimmtes Temperaturprofil y_d erreichen. Dieses Werkstück hat glücklicherweise die Form des Einheitsintervalls $[0,1]$. Das Temperaturverhalten beschreiben wir vereinfacht mit der stationären Wärmeleitgleichung

$$-y''(x) = u(x), \quad y(0) = y(1) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

wobei $y(x)$ das Temperaturprofil und $u(x)$ die Wärmequellstärke ist.
Es soll der Abstand von Temperatur und Zieltemperatur im quadratischen Mittel minimiert werden, d.h. wir haben es mit dem Optimierungsproblem

$$\min \frac{1}{2} \int_0^1 (y(x) - y_d(x))^2 dx \tag{2}$$

mit Nebenbedingung (1) zu tun.
Mit den uns bekannten Methoden können wir dieses Problem nicht behandeln, da es sich um eine unendlichdimensionale Optimierungsaufgabe handelt. Wir können es jedoch in ein endlichdimensionales Problem überführen: Dazu diskretisieren wir den Zustand $y(x)$ und die Steuerung $u(x)$. Das Intervall $[0,1]$ wird in N Teile der Länge $h = 1/N$ zerlegt. Die Funktionen approximieren wir durch ihre Funktionswerte in den Endpunkten $x_i = ih$, $i = 1, \ldots, N-1$ dieser Teilintervalle wie folgt

$$y^{(N)} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x_1) \\ \vdots \\ y(x_{N-1}) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u^{(N)} := \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Dabei haben wir die Werte von y in den Randpunkten $x_0 = 0$ und $x_N = 1$ weggelassen, da diese durch die Randbedingungen festgelegt sind.
Die zweite Ableitung approximieren wir durch den zentralen Differenzenquotienten

$$y''(x_i) \approx \frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1})}{h^2} = \frac{y_{i-1}^{(N)} - 2y_i^{(N)} + y_{i+1}^{(N)}}{h^2}.$$

So entsteht als Näherung von (1) ein lineares Gleichungssystem der Form $Ay^{(N)} = u^{(N)}$.

(a) Geben Sie die Matrix A an. Diskretisieren Sie die Zielfunktion in (2) geeignet (z.B. mit $\int_0^1 f(x)\, dx \approx h \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$). Eliminieren Sie dann den Zustand $y^{(N)}$ durch die Steuerung $u^{(N)}$, um so ein Problem ohne Gleichungsrestriktion zu erhalten.

(b) Welche Form hat die Optimalitätsbedingung erster Ordnung? Ist diese auch hinreichend?

(c) Zur Lösung des Steuerungsproblems kann man beispielsweise das Gradientenverfahren einsetzen. Man ist dabei auch an der Konvergenzgeschwindigkeit interessiert. Bestimmen Sie dazu die Konstanten aus Aufgabe 3 (a) bzw. (b) des letzten Blattes in Abhängigkeit von N. Was passiert, wenn man die Diskretisierung verfeinert, also die Anzahl der Gitterpunkte erhöht bzw. gegen unendlich gehen lässt?
Hinweis: Die Eigenwerte der Matrix A sind gegeben durch: $\lambda_k = 2N^2(1 - \cos\frac{k\pi}{N})$ für $k = 1, \ldots, N-1$.

(d) Nun sollen auch die Kosten der Steuerung in der Zielfunktion mit modelliert werden. Dies geschieht durch einen zusätzlichen, quadratischen Term:

$$\min \frac{1}{2}\int_0^1 (y(x) - y_d(x))^2 dx + \frac{\gamma}{2}\int_0^1 u(x)^2 dx.$$

Dabei ist γ ein positiver Kostenparameter. Diskretisieren Sie dieses Kostenfunktional. Wie sieht jetzt der Gradient und die Hessematrix aus? Wie verändern sich die Eigenwerte gegenüber dem Ausgangsproblem? Was können wir nun für das Konvergenzverhalten des Gradientenverfahrens folgern, wenn γ festgehalten wird?

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_WS1617.php`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Mo	10-12	WSC-N-U-4.03	Arnd Rösch
	Mi	10-12	WSC-S-U-4.02	
Üb	Do	14-16	WSC-S-U-4.02	Hendrik Feldhordt