Nichtlineare Optimierung

Blatt 9

Aufgabe 1
Das CG-Verfahren für nichtlineare Optimierungsprobleme aus der Vorlesung, bei dem in Schritt 3 $\beta_k = \frac{\|\nabla f(x^{k+1})\|^2}{\|\nabla f(x^k)\|^2}$ gesetzt wird, wird auch als *Fletcher-Reeves-Verfahren* bezeichnet. Benutzt man stattdessen die Formel

$$\beta_k := \frac{(\nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k))^T \nabla f(x^{k+1})}{\|\nabla f(x^k)\|^2},$$

so spricht man vom *Polak-Ribière-Verfahren.*

(a) Zeigen Sie: Für eine quadratische Zielfunktion und bei Wahl der exakten Schrittweite σ_k sind beide Versionen äquivalent, das heißt, das CG-Verfahren erzeugt die gleichen Iterierten.

(b) Die Wahl von β_k nach *Polak-Ribière* ist robuster bei einer Degeneration der Iterierten, wenn die Suchrichtung d^k fast orthogonal zu $\nabla f(x^k)$ wird. Was könnte eine Begründung dafür sein?

Aufgabe 2
Wir betrachten ein Beispiel für ein Trust-Region-Problem. Gegeben sei

$$\min_{\|d\| \leq \sqrt{2}} \frac{1}{2} d^T H d + b^T d \quad \text{mit } b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen an.

(b) Berechnen Sie

$$d(\lambda) := -(H + \lambda I)^{-1} b, \quad \text{für } \lambda \geq \max\{0, -\lambda_{\min}(H)\}$$

und

$$\varphi(\lambda) := \|d(\lambda)\|_2.$$

(c) Bestimmen Sie die Optimallösung des Trust-Region-Problems.

Aufgabe 3
Wir untersuchen das Gauß-Newton-Verfahren, welches wir in der Vorlesung nur als Minimierungsproblem formuliert hatten.

(a) Geben Sie eine explizite Formel für die neue Iterierte im Vollrangfall an.

(b) Wir können die Gauß-Newton-Iteration damit als Fixpunktiteration ansehen. Seien nun L eine Lipschitzkonstante von F' und $M > 0$ mit $\left\|F'(x^k)\right\|^{-1} \leq M$. Zeigen Sie: Gilt $M^2 L \|F(\tilde{x})\| < 1$, dann konvergiert das Verfahren (lokal).
(**Hinweis:** Verwende Lemma 4.3.1)

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_WS1617.php`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Mo	10-12	WSC-N-U-4.03	Arnd Rösch
	Mi	10-12	WSC-S-U-4.02	
Üb	Do	14-16	WSC-S-U-4.02	Hendrik Feldhordt