WS 2016/17 Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch Fakultät für Mathematik

Nichtlineare Optimierung

Blatt 11

Aufgabe 1
Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$\min \frac{1}{2} x^T H x + b^T x, \qquad Ax = y \tag{1}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m < n$, $\text{Rang} A = m$ und $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit.

(a) Geben Sie die Lagrangefunktion und die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung an. Ist jeder stationäre Punkt auch ein lokales Minimum?

(b) Zeigen Sie: Die Matrix

$$\begin{pmatrix} H & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$$

ist regulär.

Aufgabe 2
Gegeben sei folgendes Minimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min f(x) &= x_1^2 + (x_2 - x_3)^2 \\ \text{Nb. } x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6. \end{aligned}$$

Berechnen Sie eine Nullraummatrix der Gleichungsnebenbedingungen. Überführen Sie damit dieses Problem in ein unrestringiertes Optimierungsproblem und berechnen Sie die stationären Punkte. Untersuchen Sie, ob lokale Extrema vorliegen.

Aufgabe 3
Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} \min f(x) &= (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \\ \text{Nb. } 2x_1 + x_2 &\le 6. \end{aligned}$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Optimalitätsbedingungen eine Lösung.

Aufgabe 4
Wir betrachten noch einmal das Optimierungsproblem (1), wobei die Matrix $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nun nur als symmetrisch angenommen wird. Beweisen Sie: Ist die Matrix H positiv definit auf $\ker A$, d.h. gilt mit einer Konstanten $\alpha > 0$

$$d^T H d \ge \alpha \|d\|^2 \quad \forall d \in \text{kern } A,$$

dann ist die Zielfunktion von (1) streng konvex auf der zulässigen Menge

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}.$$

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_WS1617.php`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Mo	10-12	WSC-N-U-4.03	Arnd Rösch
	Mi	10-12	WSC-S-U-4.02	
Üb	Do	14-16	WSC-S-U-4.02	Hendrik Feldhordt