WS 2016/17 Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch Fakultät für Mathematik

Nichtlineare Optimierung

Blatt 13

Aufgabe 1
Die zulässige Menge $C \subset \mathbb{R}^2$ für ein Optimierungsproblem sei durch folgende Ungleichungen bestimmt:

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 2, \quad (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \leq 2, \quad x_1 \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass in $\bar{x} = (0,0)$ die Mangasarian-Fromowitz Constraint Qualification (MFCQ) erfüllt, die LICQ jedoch verletzt ist. Ist die globale oder die lokale Slaterbedingung erfüllbar?

Wir betrachten nun ein einfaches Verfahren zur Lösung von Optimierungsproblemen der Form

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{Nb.} & h(x) = 0, \quad g(x) \leq 0. \end{array} \tag{1}$$

Man kann dieses Optimierungsproblem mit Hilfe von Straftermen (penalty) in eine Folge von unrestringierten Problemen überführen:

$$\min F_c(x),$$

wobei F_c gegeben ist durch:

$$F_c(x) = f(x) + \frac{c}{2}\|h(x)\|_2^2 + \frac{c}{2}\sum_{j=1}^{p}(\max\{0, g_j(x)\})^2.$$

Dabei ist $c > 0$ ein Penalty-Parameter, welcher angibt, wie stark die Verletzung der Restriktion $h(x) = 0$ bestraft wird. Diese unrestringierten Probleme können dann mit den bereits behandelten Verfahren (CG, Newton, etc) behandelt werden. Nachfolgend eine sehr vereinfachte Version des Algorithmus:

Algorithmus

1. *Wähle* $c^1 > 0$, $k := 1$.
2. *Berechne* x^k *als Lösung von* $\min F_{c^k}(x)$.
3. *Ende, falls* x^k *zulässig ist.*
4. *Wähle* $c^{k+1} > c^k$, $k := k + 1$, *zurück zu Schritt 2.*

Bricht das Verfahren mit einem zulässigen Punkt x^k ab, so ist dieses x^k bereits eine Lösung von (1). Ein Nachteil des Penalty-Verfahrens ist, daß die Kondition der Hessematrix $\nabla^2 F_c(x)$ mit dem Strafparameter c ansteigt.

Aufgabe 2
Zu lösen ist die (zugegeben einfache) Optimierungsaufgabe

$$\min \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad x_1 = 1.$$

(a) Berechnen Sie die globale Lösung x^* dieser Aufgabe mit dem zugehörigen Lagrange-Multiplikator λ^*.

(b) Berechnen Sie das globale Minimum von F_c für $c > 0$. Was passiert für $c \to \infty$?

(c) Wie verhält sich die Konditionszahl der Hesse-Matrix $\nabla^2 F_c(x)$ für $c \to \infty$?

Für gleichungsrestringierte Probleme bietet das folgende Verfahren einen Ausweg. Man verwendet statt der Funktion F_c die sogenannte erweiterte (augmented) Lagrange-Funktion

$$L_c(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T h(x) + \frac{c}{2}\|h(x)\|^2,$$

und sucht für festes λ ein globales Minimum dieser Funktion.
Multiplikatoren-Methode:

1. *Wähle* x^0, λ^0, $c_0 > 0$, $\delta \in (0, 1)$ *und setze* $k := 0$
2. *Ist* (x^k, λ^k) *KKT-Punkt von* (1) *: STOP*
3. *Berechne* x^{k+1} *als Minimum von* $L_{c^k}(x, \lambda^k; c_k)$
4. *Update des Multiplikators:* $\lambda^{k+1} := \lambda^k + c_k h(x^k)$
5. *Ist* $\|h(x^{k+1})\| \geq \delta \|h(x^k)\|$, *so setze* $c_{k+1} = 10c_k$, *andernfalls* $c_{k+1} := c_k$
6. *Setze* $k \to k + 1$, *und gehe zu (2)*

Diese Methode konvergiert unter gewissen Voraussetzungen für hinreichend große c^k, die aber nicht gegen unendlich streben müssen.

Aufgabe 3
Wir betrachten noch einmal

$$\min \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad x_1 = 1$$

und verwenden nun die Multiplikatoren-Methode.

(a) Berechnen Sie für gegebenes λ das globale Minimum $x(c, \lambda)$ von $L_c(x, \lambda)$. Wie verhält sich $x(c, \lambda)$ für $\lambda \to \lambda^*$ bei festem c?

(b) Wie sehen die Iterierten der Multiplikatoren-Methode aus? Was kann man über die Konvergenz von x^k und λ^k aussagen?

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_WS1617.php`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Mo	10-12	WSC-N-U-4.03	Arnd Rösch
	Mi	10-12	WSC-S-U-4.02	
Üb	Do	14-16	WSC-S-U-4.02	Hendrik Feldhordt