

Übung Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Blatt 3

Aufgabe 1

- (i) Beweisen Sie ein Analogon zur Hölderschen Ungleichung für drei Terme und Exponenten $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$.
- (ii) Es seien $u \in L^2(\Omega)$ und $v \in L^6(\Omega)$. In welchem $L^p(\Omega)$ liegt das punktweise Produkt uv ?

Aufgabe 2

Beweisen Sie, dass durch

$$\|A\|_{\mathcal{L}(U,V)} = \sup_{\|u\|_U=1} \|Au\|_V$$

im Raum der linearen stetigen Operatoren von U nach V eine Norm definiert ist. Berechnen Sie die Norm des Integraloperators

$$A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], \quad A(u)(t) = \int_0^1 e^{(t-s)} u(s) ds, \quad t \in [0, 1].$$

Aufgabe 3

Weisen Sie nach, dass der Raum $C[a, b]$ versehen mit

$$\|f\|_{C_{L^2}[a,b]} := \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

ein linearer normierter Raum ist. Ist dieser Raum auch ein Banachraum?

Aufgabe 4

Beweisen Sie:

- (i) Aus starker Konvergenz folgt schwache Konvergenz: $u_n \rightarrow u \Rightarrow u_n \rightharpoonup u$;
- (ii) In einem Hilbertraum H ist die schwache Konvergenz $u_n \rightharpoonup u$ äquivalent zu

$$(v, u_n)_H \rightarrow (v, u)_H$$

für alle $v \in H$.

- (iii) In einem Hilbertraum H gilt:

$$u_n \rightarrow u \text{ und } u_n \rightharpoonup u \quad \Rightarrow \quad (v_n, u_n)_H \rightarrow (v, u)_H$$

Aufgabe 5

Es sei

$$U_{ad} = \{u \in L^2(\Omega) : u_a \leq u \leq u_b \text{ f. ü. in } \Omega\}$$

mit $u_a, u_b \in L^2(\Omega)$ und $u_a \leq u_b$. Zeigen Sie, dass U_{ad} eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge von $L^2(\Omega)$ ist. Ist U_{ad} in $L^2(\Omega)$ beschränkt? Hat U_{ad} innere Punkte?

Homepage der Veranstaltung ist:

http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv_feldhordt_SS16.php

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	10-12	WSC-S-U-4.02	Arnd Rösch
	Do	10-12	WSC-S-U-4.02	
Ü	Di	14-16	WSC-S-U-4.02	Hendrik Feldhordt