

Übung Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Blatt 4

Aufgabe 1

- (i) Es seien U ein normierter linearer Raum, $U_{ad} \subset U$ konvex und $f : U_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ streng konvex. Weiter sei $\bar{u} \in U_{ad}$ ein globales Minimum der Aufgabe

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u).$$

Zeigen Sie, dass $\bar{u}$ eindeutig bestimmt ist.

- (ii) Es seien U und H reelle Hilberträume, $y_d \in H$, $S \in \mathcal{L}(U, H)$ und $\lambda \geq 0$. Beweisen Sie, dass das Funktional

$$\hat{J}(u) = \frac{1}{2} \|Su - y_d\|_H^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_U^2$$

konvex und im Fall $\lambda > 0$ sogar streng konvex ist.

Aufgabe 2

Es sei das Funktional

$$J : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad J(u) = \int_0^1 x^2(u, t) + y^2(u, t) dt$$

gegeben, wobei $x(u, \cdot)$, $y(u, \cdot)$ die Lösungen folgender Differentialgleichungen sind:

$$x' = \cos(\pi u(t)), \quad y' = \sin(\pi u(t)), \quad x(0) = y(0) = 0.$$

- (i) Geben Sie Schranken für den Wert $J^* = \inf\{J(u) \mid u \in C[0, 1]\}$ an.
- (ii) Zeigen Sie $J^* = 0$ (**Hinweis:** Konstruieren Sie eine geeignete Infimalfolge $\{u_n(t)\}$).
- (iii) Existiert eine optimale Lösung u^* , so dass $J^* = J(u^*)$?

Aufgabe 3

Definition: Ein linearer normierter Raum U heißt stetig eingebettet in einen linearen normierten Raum V , wenn $U \subset V$ ein Unterraum von V ist und ein $c \geq 0$ existiert, so dass $\|u\|_V \leq c\|u\|_U$ gilt für alle $u \in U$. Man schreibt $U \hookrightarrow V$.

Beweisen Sie : Für ein beschränktes Gebiet Ω gilt $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für $1 \leq q \leq p \leq \infty$.

Aufgabe 4

Es sei $f : U \rightarrow V$ zwischen linearen normierten Räumen an einer Stelle $u \in U$ in eine Richtung $\delta u \in U$ richtungsdifferenzierbar, Gâteaux-differenzierbar bzw. Fréchet-differenzierbar. Zeigen Sie, dass diese Eigenschaften erhalten bleiben, wenn man U durch U_1 mit $U_1 \hookrightarrow U$ und V durch V_1 mit $V \hookrightarrow V_1$ ersetzt.

Homepage der Veranstaltung ist:

http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv_feldhordt_SS16.php

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	10-12	WSC-S-U-4.02	Arnd Rösch
	Do	10-12	WSC-S-U-4.02	
Ü	Di	14-16	WSC-S-U-4.02	Hendrik Feldhordt