

Übung Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Blatt 5

Aufgabe 1

Weisen Sie nach, dass die folgenden Funktionale Fréchet-differenzierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitungen:

- (i) $f : H \rightarrow \mathbb{R}$, $f(u) := \|u\|_H^2$ (H Hilbertraum);
- (ii) $f : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(u) := \sin(u(1))$.

Aufgabe 2

- (i) Berechnen Sie den adjungierten Operator zu $A : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$,

$$(Au)(t) = \int_0^t e^{t-s} u(s) ds;$$

- (ii) Bestimmen Sie für $p > 2$ den adjungierten Operator zum Einbettungsoperator $E : L^p(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$;
- (iii) Seien H ein Hilbertraum und $y, z \in H \setminus \{0\}$ fest. Für $x \in H$ sei $Ax := \langle x, y \rangle z$. Zeigen Sie $A \in \mathcal{L}(H)$ und bestimmen Sie A^* .

Aufgabe 3

- (i) Seien U ein reeller Banachraum, $C \subset U$ konvex und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ Gâteaux-differenzierbar. Zeigen Sie, dass für eine Lösung $\bar{u} \in C$ der Aufgabe

$$\min_{u \in C} f(u)$$

die notwendige Bedingung

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) \geq 0 \quad \text{für alle } u \in C$$

erfüllt ist.

- (ii) Sei nun zusätzlich f konvex. Zeigen Sie, dass dann jedes $\bar{u} \in C$, welches die Optimalitätsbedingung erfüllt, die Optimierungsaufgabe löst.

Aufgabe 4

Leiten Sie für $\lambda > 0$ und $C \subset \Omega$ notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen für folgende Aufgabe her:

$$\begin{aligned} \min \quad & J(y, u) := \int_C y(x) dx + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & -\Delta y = u \quad \text{in } \Omega \\ & y = 0 \quad \text{auf } \Gamma \\ & u_a \leq u(x) \leq u_b \quad \text{f.ü. in } \Omega. \end{aligned}$$

Homepage der Veranstaltung ist:

http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv_feldhordt_SS16.php

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	10-12	WSC-S-U-4.02	Arnd Rösch
	Do	10-12	WSC-S-U-4.02	
Ü	Di	14-16	WSC-S-U-4.02	Hendrik Feldhordt