

Übung Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Blatt 7

Aufgabe 1

Gegeben ist das folgende elliptische PDE-System auf einem beschränkten Lipschitzgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} -\Delta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + C_0 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 y_1 \\ \alpha_2 y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{1}$$

mit einer Matrix $C_0 \in [L^\infty(\Omega)]^{2 \times 2}$, $\alpha \in [L^\infty(\Gamma)]^2$, $f \in [L^2(\Omega)]^2$ und $g \in [L^2(\Gamma)]^2$.

- (i) Welche Voraussetzungen an C_0 bzw. α wird man stellen, damit das Lemma von Lax-Milgram anwendbar ist?
- (ii) Wir betrachten das Optimalsteuerproblem mit verteilter Steuerung

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad J(y, u) &= \frac{1}{2} \|y_1 - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \text{unter} \quad \text{Gleichung (1) mit} \quad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{und} \quad u &\in L^2(\Omega) \end{aligned}$$

Leiten Sie mit Hilfe der formalen Lagrangetechnik die notwendigen Bedingungen der Aufgabe her. Was ändert sich bei der Einführung der Beschränkung $u_a \leq u \leq u_b$ f.ü. in Ω ?

- (iii) Wir ändern das Problem ab in ein Randsteuerproblem:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad J(y, u) &= \frac{1}{2} \|y_1 - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ \text{unter} \quad \text{Gleichung (1) mit} \quad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{und} \quad u &\in L^2(\Gamma) \end{aligned}$$

Wie sehen die notwendigen Bedingungen jetzt aus?

- (iv) Unter welchen Voraussetzungen entkoppelt das PDE-system bzw. das adjungierte PDE-system in (iii)? Wann in Aufgabe (ii)?

Homepage der Veranstaltung ist:

http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv_feldhordt_SS16.php

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	10-12	WSC-S-U-4.02	Arnd Rösch
	Do	10-12	WSC-S-U-4.02	
Ü	Di	14-16	WSC-S-U-4.02	Hendrik Feldhordt