

Übung Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Blatt 8

Aufgabe 1

Wenn der Regularisierungsparameter λ vor $\|u\|^2$ verschwindet, ergeben sich unter gewissen Voraussetzungen Bang-Bang-Steuerungen, d.h. die Steuerungen nehmen fast überall nur Werte auf dem Rand der zulässigen Menge an. Eine solche Lösung soll nun konstruiert werden. Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} \min J(y, u) &:= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y - y_d)^2 dx \\ -\Delta y &= u + e_{\Omega} \quad \text{in } \Omega \\ y &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \\ -1 &\leq u(x) \leq 1 \quad \text{f. ü. in } \Omega \end{aligned}$$

($\Omega := (0, 1)^2$).

- (i) Stellen Sie das Optimalitätssystem auf.
- (ii) Konstruieren Sie eine optimale Lösung des Problems so, dass die optimale Steuerung eine Schachbrettfunktion darstellt. Hinweis: Wählen Sie zunächst einen geeigneten adjungierten Zustand. Nutzen Sie dazu die Eigenschaften der Sinusfunktion.

Aufgabe 2

Wir betrachten nun eine Aufgabe mit homogener Neumann-Randbedingung:

$$\begin{aligned} \min J(y, u) &:= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y - y_d)^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \\ -\Delta y + y &= u + e_{\Omega} \quad \text{in } \Omega \\ \partial_n y &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \\ u_a &\leq u(x) \leq u_b \quad \text{f. ü. in } \Omega \end{aligned}$$

($\Omega := (0, 1)^2$). Konstruieren Sie erneut eine analytische Lösung für das Problem, indem Sie die festen Funktionen y_d , e_{Ω} sowie die Schranken u_a , u_b geeignet anpassen. Weiterhin sollte die optimale Steuerung auch aktiv auf Teilgebieten von Ω sein.

Aufgabe 3

Man zeige: Die Funktion

$$y(x, t) = \frac{e^t}{\sqrt{x}}$$

gehört dem Raum $C([0, T], L^1(0, 1))$. Berechnen Sie die Norm in diesem Raum. In welchen Räumen $L^p(0, T; L^q(0, 1))$ liegt diese Funktion?

Aufgabe 4

Warum gehört die Funktion $y : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$y(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq t \\ 0 & \text{für } x > t \end{cases}$$

zu $L^p(0, 1; L^p(0, 1))$ für beliebiges $p < \infty$ aber nicht zu $L^\infty(0, 1; L^\infty(0, 1))$?

Homepage der Veranstaltung ist:

http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv_feldhordt_SS16.php

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	10-12	WSC-S-U-4.02	Arnd Rösch
	Do	10-12	WSC-S-U-4.02	
Ü	Di	14-16	WSC-S-U-4.02	Hendrik Feldhordt